

Απαντήσεις μαθηματικών κατεύθυνσης 2021

ΘΕΜΑ Α

A1) Σελ. 135

A2) Σελ. 51

A3) Σελ. 23

A4) α) Σ. β) Λ. γ) Σ δ) Σ. ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1) $f(x+1) = (x+1)e^{-x}$, θέτω $x+1 = y$

$$f(y) = ye^{1-y}$$

Άρα

$$f(x) = xe^{1-x}$$

B2) $f'(x) = e^{1-x}(1-x)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Για $x = 1$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(1) = 1$

B3) $f''(x) = e^{1-x}(x-2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Στο $x = 2$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής το $f(2) = \frac{2}{e}$

Ασύμπτωτες

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{x-1}} \right) =$$

$$(dlh) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{x-1}} \right) = 0$$

Άρα έχει την $y = 0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

B4) i) **Σύνολο τιμών**

- $$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- $$f(1) = 1$$

Άρα αφού είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1

$$f(\Delta_1) = (-\infty, 1]$$

- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{x-1}} \right) =$$

$$(dlh) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^{x-1}} \right) = 0$$

- $$f(1) = 1$$

Άρα αφού είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_2

$$f(\Delta_2) = (0,1]$$

$$\text{Οπότε } f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (-\infty, 1]$$

ii)

- Αν $\lambda < 0$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και η f είναι αύξουσα
άρα έχει μια ακριβώς ρίζα
- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και $\lambda \in f(\Delta_2)$ η
 f είναι αύξουσα στο Δ_1 φθίνουσα στο Δ_2 άρα έχει
δυο ακριβώς ρίζες.
- Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(\Delta_1)$ και $\lambda \notin f(\Delta_2)$ άρα δεν
έχει καμία ρίζα
- $\lambda = 1$ είναι ακρότατο άρα έχει 1 ρίζα
- αν $\lambda = 0$ τότε $\lambda \in f(\Delta_1)$ και f είναι αύξουσα
στο Δ_1 άρα 1 ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Άρα είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

- Όταν $x \leq 0$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική
- Όταν $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ η f είναι συνεχής ως
τριγωνομετρική

Παραγωγισιμότητα

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Γ2) i)

- Η f είναι συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ ως τριγωνομετρική
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$
- $f(0) \neq f(\frac{3\pi}{2})$

Άρα δεν ισχύει η Τρίτη συνθήκη του θεωρήματος Rolle.

ii) όταν $\xi \in (0, \frac{3\pi}{2})$

$$f'(\xi) = 0$$

$$-\eta\mu\xi = 0 \Rightarrow \xi = \pi$$

$$\Gamma 3) f'(\xi) = 0 \text{ όταν } \xi < 0 \Rightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12a < 0 \text{ για κάθε } a < -3$$

Επομένως δεν υπάρχουν σημεία της f με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4) αν $x \leq 0$ τότε $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$

$\Delta < 0$

x	$-\infty$ 0
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

Αν $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$

$f'(x) = -\eta\mu x$

$f'(x) = 0$

$\eta\mu x = 0 \Rightarrow x = \pi$

x	0 π $\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $\nearrow$

Συγκεντρωτικός πίνακας

x	$-\infty$ 0 π $\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$ $-$ $+$
$f(x)$	$\searrow$ $\searrow$ $\nearrow$

Στο $x = \pi$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(\pi) = -1$

Άρα $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1) \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{Θέτουμε } k(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x > 0$$

k :συνεχής στο $[1, e]$

$$k(1) \cdot k(e) = -1 \left(1 - \frac{1}{e}\right) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον

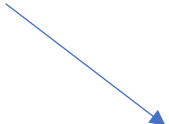
$$x_0 \in (1, e) \text{ τέτοιο ώστε } k(x_0) = 0$$

Και είναι μοναδικό αφού η $k'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$.

$$\Delta 2) f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{x \ln(x_0) - 1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x \ln(x_0) - 1}{x} > 0$$

$$\Rightarrow x > \frac{1}{\ln(x_0)} \Rightarrow x > x_0$$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Για $x = x_0$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$$

Δ3) Αν το $x > 0$ τότε $g(x) > 0$ και έχουμε

$$\begin{aligned} g(x) = h(x) &\Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln(xe^{-x}) \\ &= (x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ που ισχύει για $x = x_0$

Επίσης έχουμε :

$$g'(x) = -xe^{-x} + e^{-x}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

Άρα

$$g'(x_0) = -x_0 e^{-x_0} + e^{-x_0} = x_0 e^{-x_0} \left(-1 + \frac{1}{x_0}\right) =$$

$$g(x_0) \left(-1 + \frac{1}{x_0}\right) (1)$$

$$h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = h(x_0)(\ln x_0 - 1) =$$

$$h(x_0) \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) (2)$$

$$\text{Διότι } \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

Άρα από (1) και (2) ισχύει ότι $h(x_0) = g(x_0)$

Και $h'(x_0) = g'(x_0)$

Άρα έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Δ4) Η απόσταση AB είναι

$$d(x) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$$

Επειδή $f(x) > \varphi(x)$

Αν η $\phi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε

$$d'(x) = (f(x) - \varphi(x))' = f'(x) - \varphi'(x)$$

Αφού η απόσταση είναι ελάχιστη στο x_0 και είναι

παραγωγίσιμη στο x_0 από θεώρημα Fermat $d'(x_0) = 0$

$$f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0$$

Όμως

$f'(x_0) = 0$ αφού είναι ακρότατο για την f

Άρα

$$\varphi'(x_0) = 0$$

Επομένως το x_0 είναι κρίσιμο σημείο για την ϕ

Αν η ϕ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.

Επιμέλεια

Ανδριοπούλου Τασιάνα - Μαθηματικός