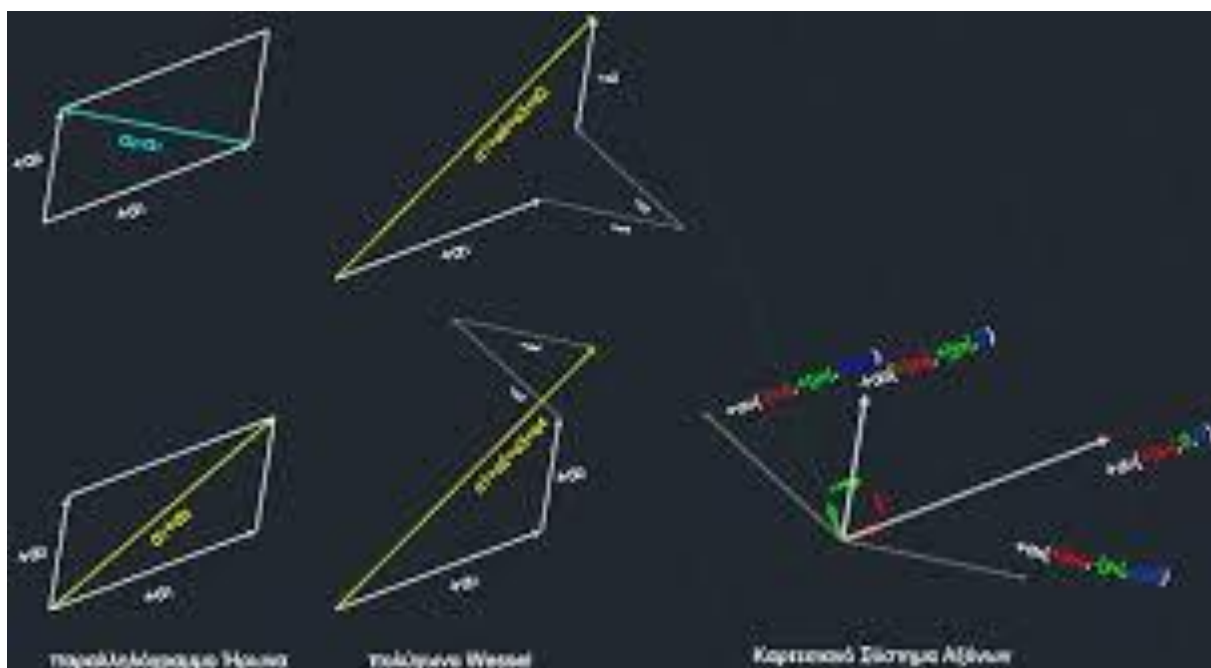


ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1.1 1.2 Η έννοια του διανύσματος	7
Ασκήσεις στις βασικές έννοιες :	10
1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα	12
Ασκήσεις στον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα :	15
1.4 Συντεταγμένες διανύσματος	18
Ασκήσεις στις συντεταγμένες διανύσματος:	21
1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	24
Ασκήσεις στο εσωτερικό γινόμενο:	26
Επαναληπτικές ασκήσεις στα διανύσματα	33
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ	36
2.1 Ερωτήσεις θεωρίας στην ευθεία	42
Ασκήσεις στην εξίσωση ευθείας	44
2.2 Γενική μορφή ευθείας	48
Ασκήσεις στη Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας	49
2.3 Απόσταση σημείου από ευθεία – εμβαδόν τριγώνου	54
Ασκήσεις στο Εμβαδόν Τριγώνου – Απόσταση σημείου από ευθεία	57
Γενικές ασκήσεις στην ευθεία	59
Διαγώνισμα στην ευθεία	62
Κωνικές τομές	66
κύκλος	66
Ασκήσεις στον κύκλο	69
3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ	73
Ασκήσεις στην παραβολή	78
3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ	81
Ασκήσεις στην έλλειψη	88
3.4 Υπερβολή	91
Ασκήσεις στην Υπερβολή	97
Γενικές ασκήσεις στις κωνικές τομές	102
Διαγώνισμα στις κωνικές τομές	105
Επαναληπτικά θέματα στα διανύσματα	108
Επαναληπτικά θέματα στην ευθεία	112

Επαναληπτικά θέματα στις κωνικές τομές.....	120
Επαναληπτικό διαγώνισμα στα μαθηματικά κατεύθυνσης	124

Διανύσματα



1.1 1.2 Η έννοια του διανύσματος

1. Τι ονομάζουμε διάνυσμα;

Διάνυσμα ονομάζουμε ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα .

Δηλαδή ένα τμήμα του οποίου τα άκρα είναι διατεταγμένα



2. Τι ονομάζουμε μηδενικό διάνυσμα ;

Μηδενικό διάνυσμα ονομάζουμε το διάνυσμα του οποίου η αρχή και το πέρας συμπίπτουν.

3. Τι ονομάζουμε μήκος διανύσματος $\overrightarrow{AB}$;

Μήκος διανύσματος ονομάζουμε την απόσταση των άκρων του

4. Τι ονομάζουμε μοναδιαίο διάνυσμα;

Μοναδιαίο είναι το διάνυσμα που έχει μέτρο 1

5. Τι ονομάζουμε φορέα διανύσματος;

Φορέα διανύσματος ονομάζουμε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα διάνυσμα

6. Πότε δυο διανύσματα λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά ;

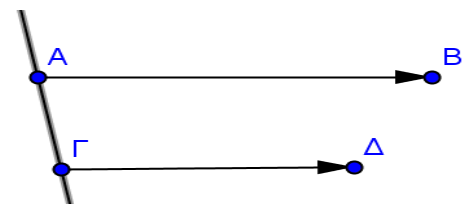
Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς , λέγονται παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$$

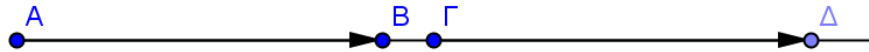
7. Πότε δυο διανύσματα λέγονται ομόρροπα;

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα

Α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους



Β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μια από τις ημιευθείες AB και ΓΔ Περιέχει την άλλη



Τότε λέμε ότι τα διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση (ίδια διεύθυνση και φορά)
 $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$

8. Πότε δυο διανύσματα λέγονται αντίρροπα;

Δυο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται αντίρροπα όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα

Τότε λέμε ότι έχουν αντίθετη κατεύθυνση $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{\Gamma\Delta}$

9. Πότε δύο διανύσματα λέγονται ίσα ;

Δυο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα όταν έχουν ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα $\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}$

10. Πότε δυο διανύσματα λέγονται αντίθετα;

Δύο διανύσματα λέγονται αντίθετα όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα $\vec{AB} = -\vec{\Gamma\Delta} = \vec{\Delta\Gamma}$

11. Τι ονομάζουμε γωνία δυο διανυσμάτων;

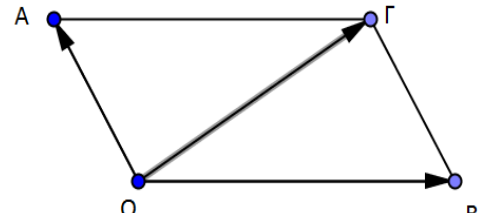
Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB την ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \theta$

Γενικά για την γωνία δυο διανυσμάτων ισχύουν

- $0 \leq \theta \leq \pi$
- Αν $\theta=0$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$
- Αν $\theta=\pi=180^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$
- Αν $\theta=\frac{\pi}{2} = 90^\circ$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

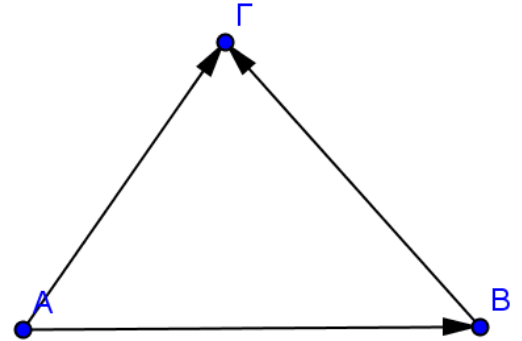
12. Πως προσθέτουμε διανύσματα;

- Όταν έχουν κοινή αρχή, με τον νόμο του παραλληλογράμμου βρίσκω την συνισταμένη $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OG}$



- Όταν είναι διαδοχικά ενώνω την αρχή του πρώτου με το πέρας του τελευταίου

$$\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$$

**13. Να γράψετε τις ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων**

A) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)

B) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)

Γ) $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$

Δ) $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}$

14. Γενικά ισχύουν :

i) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

Κάθε διάνυσμα στο επίπεδο ισούται με την διανυσματική ακτίνα του

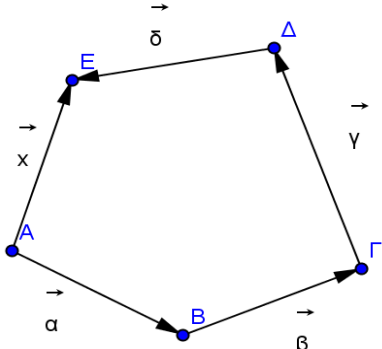
Πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής

ii) $||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

iii) $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$

iv) $\vec{\alpha} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = ||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}||$

Ασκήσεις στις βασικές έννοιες :

- Να γράψετε ως ένα διάνυσμα τα παρακάτω διανύσματα:
i) $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Gamma}$ ii) $\vec{K\Lambda} + \vec{MN} + \vec{LM} + \vec{NP}$ iii) $\vec{AB} + \vec{\Delta\Lambda} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{B\Gamma}$
 - Να γράψετε ως ένα διάνυσμα τα παρακάτω διανύσματα:
i) $\vec{A\Gamma} - \vec{B\Delta} - \vec{\Delta\Gamma}$ ii) $\vec{K\Lambda} - \vec{NM} + \vec{NK} - \vec{M\Lambda}$ iii) $\vec{NM} - \vec{P\Gamma} - \vec{NT} + \vec{P\Sigma} - \vec{T\Sigma}$
 - Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τα παρακάτω αθροίσματα :
i) $\vec{AB} + \vec{AD}$ ii) $\vec{DA} - \vec{GD}$ iii) $\vec{AB} + \vec{GD}$ iv) $\vec{GB} + \vec{GD} + \vec{A\Gamma}$
 - Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε τέτοια ώστε : $\vec{E\Gamma} - \vec{\Delta\Lambda} = \vec{E\Delta} - \vec{B\Lambda}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β και Γ συμπίπτουν.
 - Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\chi}$ του διπλανού σχήματος ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$
- 
- Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:
i) $\vec{AB} - \vec{\Delta\Gamma} = \vec{A\Delta} - \vec{B\Gamma}$ ii) $\vec{K\Lambda} - \vec{PN} = \vec{M\Lambda} - \vec{MN} + \vec{KP}$
 - Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Ορίζουμε το σημείο Ρ από τη σχέση $\vec{\Delta P} = \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta\Lambda} + \vec{\Delta B}$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΡΒΓ είναι παραλληλόγραμμο,
 - Αν ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε :
 $\vec{A\Gamma} + \vec{\Delta B} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma}$.
 - Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ.
i) Να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου Ε για το οποίο ισχύει $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{B\Gamma}$
ii) Για κάθε σημείο Ρ να αποδείξετε ότι ισχύει $\vec{PE} + \vec{PB} = \vec{PA} + \vec{P\Gamma}$
 - Πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{AZ} = \vec{N\Gamma}$, $\vec{\Delta E} = \vec{MB}$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.

11. Αν $\left|\vec{a}\right| = \frac{5}{4}, \left|\vec{\beta}\right| = \frac{7}{4}$ και $\left|\vec{a} + \vec{\beta}\right| \geq 3$ να αποδείξετε ότι $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$.

12. Δίνονται τα αντίρροπα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με $\left|\vec{v}\right| = 7, \left|\vec{u} + \vec{v}\right| = 12$. Να προσδιορίσετε το $\left|\vec{u}\right|$.

13. Έστω $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{\left|\vec{a}\right|}{3} = \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{5} = \frac{\left|\vec{\gamma}\right|}{8}$. Δείξτε ότι : Ι) $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$,

14. Έστω τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ και ο πραγματικός αριθμός λ , έτσι ώστε

$$\left|\vec{a}\right| = \lambda - 1, \left|\vec{\beta}\right| = 3\lambda - 8 \text{ και } \left|\vec{a} + \vec{\beta}\right| = \lambda^2 - 2\lambda. \text{ Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός } \lambda.$$

15. Να δείξετε ότι : $\left|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}\right| + \left|\vec{u} + \vec{w} - \vec{v}\right| + \left|\vec{v} + \vec{w} - \vec{u}\right| \geq \left|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\right|$.

16. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει ότι :

$$\left|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{\Gamma\Delta} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{B\Delta}\right| = 2$$

17. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει ότι :

$$\left|\overrightarrow{M\Delta} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta B}\right| - \left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{\Gamma B}\right| = 0$$

18. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ , ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Gamma}$ να είναι μοναδιαίο . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει ότι :

$$\left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{B\Delta} - \overrightarrow{\Gamma A} - \overrightarrow{A\Delta}\right|$$

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

1. Τι ονομάζουμε γινόμενο ενός πραγματικού αριθμού λ με το διάνυσμα $\vec{a}$;

- Αν $\lambda \neq 0$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{a}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda\vec{a}$ ένα διάνυσμα το οποίο :
Είναι ομόρροπο του $\vec{a}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{a}$ αν $\lambda < 0$ και
Έχει μέτρο $|\lambda||\vec{a}|$
- Αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda\vec{a}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$

2. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$;

Γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ονομάζεται κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = k\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$ όπου $k, \lambda \in \mathbb{R}$

3. Ποια η σχέση που συνδέει δυο παράλληλα διανύσματα;

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \kappa\vec{\beta}$$

4. Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

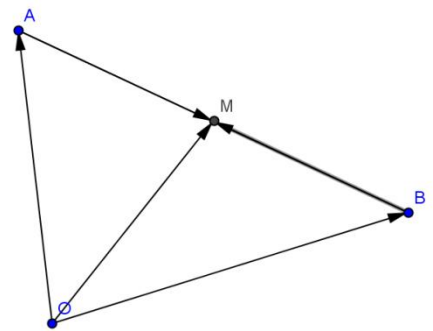
Απόδειξη:

Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\vec{AB}$ και Ο ένα σημείο αναφοράς

Έχουμε: $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$ και : $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$

Επομένως: $2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} + \vec{OB} + \vec{BM} = \vec{OA} + \vec{OB}$

Δηλαδή $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$



5. Να γράψετε τις ιδιότητες του γινομένου αριθμού με διάνυσμα

1. $\lambda(\vec{a} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{\beta}$
2. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
3. $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
4. $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$
5. αν $\lambda\vec{a} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$
6. αν $\lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε $\lambda = \mu$

6. πότε τρία σημεία είναι συνευθειακά;

Τρία σημεία A ,B ,Γ είναι συνευθειακά όταν $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AG}$

7. Τι ονομάζουμε γεωμετρικό τόπο και ποιους γεωμετρικούς τόπους γνωρίζετε;

Γεωμετρικό τόπο ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα

- i) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} = \lambda \vec{a}$ είναι μια ευθεία ε παράλληλη στο $\vec{a}$ και διέρχεται από το A
- ii) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει : $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ είναι η μεσοκάθετος του AB
- iii) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για τα οποία ισχύει : $|\overrightarrow{MA}| = \rho, \rho > 0$ είναι κύκλος με κέντρο το A και ακτίνα ρ
- iv) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από δύο ευθείες που δεν είναι παράλληλες είναι η διχοτόμος των γωνιών που σχηματίζουν οι γωνίες αυτές
- v) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από δύο ευθείες που είναι παράλληλες είναι η μεσοπαράλληλη των ευθειών αυτών.

Βασικά παραδείγματα:

1. Αν ισχύει ότι : $3\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{GA}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B και Γ είναι συνευθειακά .

Λύση:

Θεωρούμε το A ως σημείο αναφοράς

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AG} &= 5\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{GA} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} - 2(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD}) = 5(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{GA} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AG} + \\ 2\overrightarrow{AD} &= 5\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG} \\ \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} &= 5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Άρα $\overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{AB}$ επομένως οι ευθείες AB , AG είναι παράλληλες και έχουν κοινό σημείο , επομένως ταυτίζονται

2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ και σημείο Δ για το οποίο ισχύει : $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{AB}$

a. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BG}$

b. Να βρείτε τον $\chi \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\chi \cdot \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD}$

Λύση:

$$\text{a. } \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG} - 4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 3(\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{BG}$$

$$\text{Άρα } \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BG}$$

$$\text{b. } \chi \cdot \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GD} \Leftrightarrow \chi \cdot \overrightarrow{AG} = 3(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA}) + \overrightarrow{GD} \Leftrightarrow \chi \cdot \overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} \Leftrightarrow$$

$$(\chi - 3) \cdot \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AG} \stackrel{\overrightarrow{AG} \neq \vec{0}}{\Leftrightarrow} \chi - 3 = -1 \Leftrightarrow \chi = 2$$

Ασκήσεις στον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα :

- Έστω ΑΒΓΔ ένα παραλληλόγραμμο και Μ ένα σημείο τέτοιο ώστε $\vec{AM} = 2007 \vec{AB} + \vec{AD}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Μ και Δ είναι συνευθειακά
- Αν ισχύει ότι $8\vec{MB} = 5\vec{MA} + 3\vec{MG}$ να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά
- Αν ισχύει ότι $\vec{AG} - 3\vec{GB} + 2\vec{AB} = \vec{BD} - 3\vec{MA}$, να δειχθεί ότι τα σημεία Γ, Δ, Μ είναι συνευθειακά.
- Αν ισχύει ότι $4\vec{MA} + 5\vec{MB} - 9\vec{MG} = \vec{0}$, να αποδείξεις ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά
- Δίνονται τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε για τα οποία ισχύει ότι $5\vec{AD} - 3\vec{AE} - 4\vec{AG} = 4\vec{EB} - \vec{EG} + 9\vec{BD}$ Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά
- Αν ισχύει ότι $(\kappa + 2)\vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa + 5)\vec{PT}$ Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ τέτοιο ώστε $\vec{AD} = (1 - \lambda)\vec{AB} + \lambda\vec{AG}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Μ, τέτοιο ώστε $\vec{AM} = \kappa\vec{AB} + \lambda\vec{AG}$ με $\kappa + \lambda = 1$. Να δειχθεί ότι το Μ ανήκει στην ευθεία ΒΓ.
- Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθεί σημείο Κ του επιπέδου ώστε $2\vec{AK} + 3\vec{BK} + 5\vec{CK} = \vec{0}$.
- Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Κ, Λ, Μ τέτοια ώστε : $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{GL} = \frac{1}{3}\vec{BG}, \vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AG}$. Α) Αν $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AG} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\vec{KL}, \vec{KM}$ συναρτήσει των $\vec{a}, \vec{\beta}$. Β) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά.
- Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει $\kappa\vec{OA} + \lambda\vec{OB} + \mu\vec{OG} = \vec{0}$ με $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \kappa + \lambda + \mu = 0, |\kappa| + |\lambda| + |\mu| \neq 0$ να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και αντίστροφα.
- Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Δ και Ε ισχύουν οι ισότητες $\vec{AB} = \vec{GD}, \vec{DA} = \vec{EG}$, να αποδείξετε ότι το Δ είναι μέσο του ΒΕ.
- Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Μ, Ν τα μέσα των ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε τέτοια ώστε $\vec{MD} = \vec{AM}, \vec{NE} = \vec{GN}$. Να δείξετε ότι το Β είναι μέσο του ΔΕ.
- Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του και Κ το μέσο του ΟΒ να αποδείξετε ότι $\vec{DA} + \vec{DG} = 4\vec{DK} - 2\vec{DB}$.
- Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί σημείο Ρ, τέτοιο ώστε : $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PG} + \vec{PD} = \vec{0}$.

16. Αν Μ σημείο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και ισχύει $\vec{AM} = \rho \vec{AB} + \kappa \vec{AG}$, να δείξετε ότι $\rho + \kappa = 1$.

17. Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμικά, να βρεθεί ο

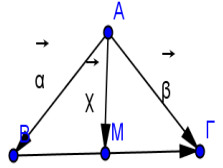
$\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\beta} - 3\lambda\vec{\alpha}$ και $\vec{v} = (\lambda + 1)\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ να είναι παράλληλα.

18. Στο διπλανό σχήμα είναι $(BM) = 3(M\Gamma)$

i. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{\chi}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

ii. Αν $\vec{\chi} = \frac{\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}}{4}$ και για τα σημεία Δ και Ε, ισχύουν $\vec{AD} =$

$\frac{1}{2}\vec{\chi}$ και $\vec{AE} = \frac{3}{7}\vec{AG}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Δ και Ε είναι συνευθειακά



19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε το μέσο της ΑΒ. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ΔΕ και ΑΓ, να δείξετε ότι: $\vec{AZ} = \frac{1}{3}\vec{AG}$.

20. Έστω ότι για τα διακεκριμένα σημεία Α, Β, Γ ισχύει ότι:

$$4\vec{OA} + \vec{GA} = 3\vec{OB} + \vec{OG}$$

i. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία

ii. Να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ

iii. Να βρείτε την τιμή του χ ώστε να ισχύει $\vec{AM} = \chi \vec{AB}$ και το Μ να είναι μέσο του ΑΓ

21. Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{\delta}$ και ισχύει ότι: $|\vec{\chi} - \vec{\alpha}| \cdot \vec{\chi} = |\vec{\chi} + 3\vec{\alpha}| \cdot \vec{\alpha}$, να δείξετε ότι:

i. $\vec{\chi} \neq \vec{\alpha}$

ii. $\vec{\chi} \uparrow \vec{\alpha}$

iii. $\vec{\chi} = 3\vec{\alpha}$

22. Δίνονται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ, για τα οποία ισχύει:

i. $(\lambda + 1)\vec{MA} = \lambda(\vec{MG} + \vec{BA})$

ii. $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{AG} + \vec{MG} - \vec{AM}|$

iii. $|\vec{MB} - \vec{GM}| = |\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MG}|$

23. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία Α, Β, Γ, Δ ισχύει ότι:

$$4\vec{AB} + 3\vec{AG} = 4\vec{DB} + 3\vec{DG} - 7\vec{DA}$$

24. Αν ισχύει ότι: $5\vec{AG} - 2\vec{DB} = 5\vec{BG} - 2\vec{DA}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία Α και Β ταυτίζονται

25. Δίνονται τα διαφορετικά ανα δύο σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε, για τα οποία ισχύει η σχέση:

$$3\vec{AD} + 5\vec{BD} - 8\vec{GD} = \vec{AE} + 3\vec{BE} - 4\vec{GE}$$

Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΑΒ.

26. Έστω Α,Β,Γ,Δ σημεία μη συνευθειακά ανά τρία για τα οποία ισχύει ότι : $5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD} - 3\overrightarrow{BD}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
27. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα : $\vec{u} = \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{GM} - 3\overrightarrow{DM} - 6\overrightarrow{MA}$ είναι ανεξάρτητο του σημείου Μ
28. Αν ισχύει ότι $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AG}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BG}$
29. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι :
- Το διάνυσμα $\vec{v} = 4\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{GD}$ είναι ομόορο του $\overrightarrow{BG}$
 - Το διάνυσμα $\vec{w} = 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BD}$ είναι αντίροπο του $\overrightarrow{AD}$
30. Αν ισχύει ότι : $2\overrightarrow{AL} + 3\overrightarrow{BL} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$ να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{KL}$ και $\overrightarrow{ML}$ είναι αντίροπα
31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει :
- $$|3\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}| = |3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BG}|$$
32. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:
- $$|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MG}| = |5\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{MB}|$$
33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει : $|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{AD}|$
34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ για την οποία ισχύει ΑΔ=6. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει ότι : $|3\overrightarrow{MA} + 6\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MG} - 2\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{AD}|$

1.4 Συντεταγμένες διανύσματος

1. Να αποδείξετε ότι κάθε διάνυσμα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Απόδειξη

Έστω $\vec{OA} = \vec{a}$ και A_1, A_2 οι προβολές του A στους άξονες $x'x$ και $y'y$

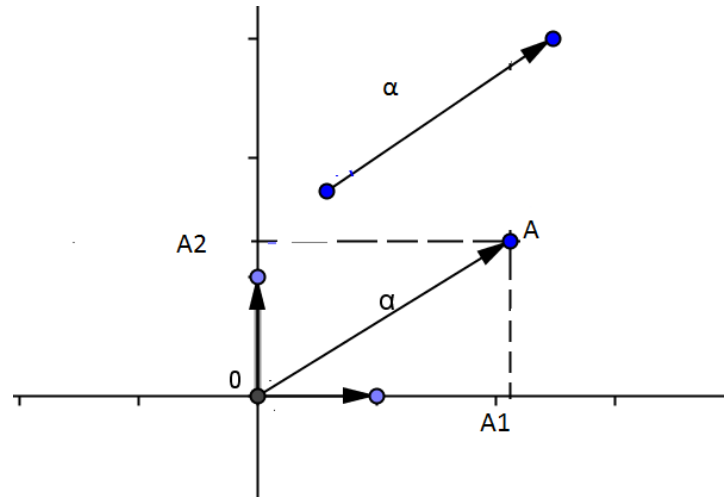
$$\vec{OA} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} \quad (1)$$

Αν x, y οι συντεταγμένες του

A τότε ισχύει : $\vec{OA_1} = x\vec{i}, \vec{OA_2} = y\vec{j}$

Τότε η (1) γράφεται : $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι το : $\vec{a}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}, \vec{j}$



Θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω έκφραση είναι μοναδική

Έστω ότι ισχύει ότι : $\vec{a} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

Τότε θα έχουμε : $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

$$(x - x')\vec{i} = (y' - y)\vec{j}$$

$$\vec{i} = \frac{y' - y}{x - x'}\vec{j}$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι $\vec{i} // \vec{j}$ που είναι άτοπο αφού τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ δεν είναι συγγραμμικά επομένως $x' = x$ και $y' = y$

2. Συντεταγμένες γραμμικού συνδυασμού διανύσματος

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$

i) $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

ii) $\lambda\vec{\alpha} = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

iii) $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$

Απόδειξη:

$$i) \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \chi_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$ii) \lambda \vec{\alpha} = \lambda(\chi_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) = (\lambda \chi_1) \vec{i} + (\lambda y_1) \vec{j} = (\lambda \chi_1, \lambda y_1)$$

3. Συντεταγμένες μέσου τμήματος

$A(\chi_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ και M μέσο του AB $M\left(\frac{\chi_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$$\chi_M = \frac{\chi_1+x_2}{2} \text{ και } y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Δηλαδή :

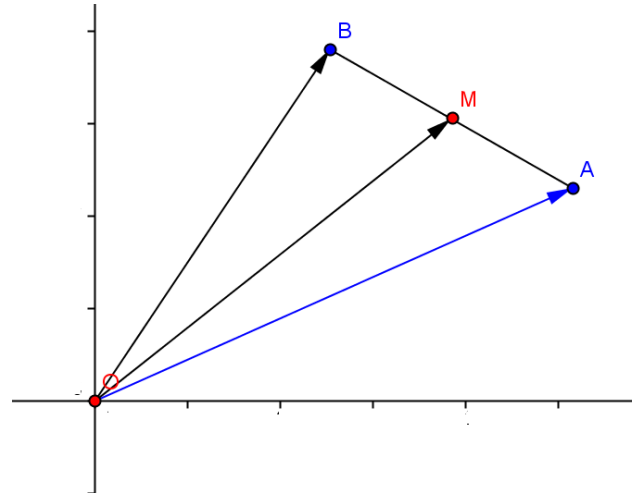
$$M\left(\frac{\chi_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Απόδειξη:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \text{ , με } \overrightarrow{OM} = (\chi, y),$$

$$\overrightarrow{OA} = (\chi_1, y_1) \quad \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} = (\chi, y) &= \frac{1}{2}[(\chi_1, y_1) + (x_2, y_2)] \\ &= \left(\frac{\chi_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \end{aligned}$$



4. Συντεταγμένες διανύσματος με γνωστά άκρα :

Οι συντεταγμένες (χ, y) διανύσματος με άκρα $A(\chi_1, y_1)$ και $B(\chi_2, y_2)$

Δίνονται από τις σχέσεις : $\chi = \chi_2 - \chi_1$ και $y = y_2 - y_1$

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

5. Μέτρο διανύσματος

$$\vec{\alpha} = (\chi, y) \text{ τότε } |\vec{\alpha}| = \sqrt{\chi^2 + y^2}$$

6. Η απόσταση δυο σημείων $A(\chi_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$$(AB) = \sqrt{(\chi_2 - \chi_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

7. Πότε δυο διανύσματα είναι παράλληλα;

$$1. \text{ Αν } \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

$$2. \text{ Αν } \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}, \text{ όπου } \lambda = \frac{y}{x} = \epsilon\phi\omega$$

Απόδειξη:

$$2. \quad \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \xLeftrightarrow{x_1 x_2 \neq 0} \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}} = \lambda_{\vec{\beta}}$$

Παρατήρηση:

$$1) \vec{\alpha} \parallel x'x \Leftrightarrow y = 0$$

$$2) \vec{\alpha} \parallel y'y \Leftrightarrow x = 0$$

3) Κάθε διάνυσμα $\vec{v}$ γράφεται κατα μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός δύο μή παράλληλων διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Παράδειγμα

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (1, 3)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\beta} = (-2, 1)$ και $\vec{\gamma} = (3, 7)$

Λύση:

Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\beta} = (-2, 1)$ και $\vec{\gamma} = (3, 7)$ όταν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ τέτοιοι ώστε

$$\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta} + \lambda \vec{\gamma}$$

$$(1, 3) = \kappa(-2, 1) + \lambda(3, 7) \Rightarrow (1, 3) = (-2\kappa + 3\lambda, \kappa + 7\lambda)$$

$$\begin{cases} -2\kappa + 3\lambda = 1 \\ \kappa + 7\lambda = 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -14 - 3 = -17$$

$$D_{\kappa} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_{\lambda} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

$$\kappa = \frac{2}{17} \quad \lambda = \frac{7}{17}$$

Ασκήσεις στις συντεταγμένες διανύσματος:

1. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2\lambda^2 - 4\lambda - 2, \lambda^2 - 3\lambda - 5)$, $\vec{\beta} = (\lambda^2 - 5\lambda + 4, 10 - \lambda)$ να είναι ίσα .
2. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 9, \lambda^2 - 5\lambda + 6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Για ποια τιμή του λ είναι:
 - I) $\vec{a} = \vec{0}$
 - II) $\vec{a} \neq \vec{0}, a // x'x$
3. Να βρείτε τις τιμές των x, y ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x^2 + y^2, x + y)$, $\vec{\beta} = (-13, 5)$ Να είναι αντίθετα.
4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 + 3\lambda, \lambda^2 - 9)$ και $\vec{\beta} = (\lambda - 5, 3\lambda - 1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε για ποια τιμή του λ :
 - a) Τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίθετα
 - b) Το $\vec{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα
 - c) Είναι $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel x'x$
 - d) Είναι $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\alpha} \parallel y'y$
5. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(-2,4) , B(6,-8) και Γ(-4,0). Να βρείτε τις συντεταγμένες των
μέσων Z, H, M των πλευρών AB , BΓ και AΓ αντίστοιχα , καθώς επίσης και τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους Θ του τριγώνου ABΓ.
6. Αν τα σημεία A, B, Γ έχουν διανύσματα θέσης ως προς Ο τα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$, $\vec{\beta} = (3, 5)$, $\vec{\gamma} = (-3, 2)$ αντίστοιχα τότε:
 - i. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$
 - ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά
 - iii. Να βρείτε τη σχετική θέση των A , B και Γ
7. Αν τα σημεία K(3,1) , Λ(2,2) και Μ(1,-4) είναι τα μέσα των πλευρών AB , BΓ και AΓ αντίστοιχα τριγώνου ABΓ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου ABΓ.
8. Οι τετμημένες δυο σημείων A και B είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (k^2 - k)x - 12 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$, ώστε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB να έχει τετμημένη ίση με 6.
9. Να βρείτε τους αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3x - 2y + 3)i + (x + y - 1)j$, $\vec{\beta} = (x + y - 1)i + (5x + 4y + 1)j$

Να είναι ίσα . Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.

10. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (7,11)$ σε δυο συνιστώσες με διευθύνσεις εκείνες των $\vec{\alpha} = (-1,2), \vec{\beta} = (2,-3)$.
11. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε τα σημεία $A(-4,-2)$, $B(2,1)$ και $\Gamma(-3,2)$. Να βρείτε σημείο του επιπέδου P τέτοιο ώστε : $2\vec{PA} - 3\vec{PB} - \vec{P\Gamma} = \vec{B\Gamma}$.
12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (5,5), \vec{\beta} = (\mu - 2,5), \vec{\gamma} = (1, \mu + 2)$. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τι διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$.
13. Έστω το διάνυσμα $\vec{u} = (5,-12)$. ι) Να βρείτε το $|\vec{u}|$. ιι) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{v}$ αντίρροπο του $\vec{u}$, με μέτρο διπλάσιο του $\vec{u}$.
14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με διαγωνίους $\vec{A\Gamma} = (-9,12), \vec{B\Delta} = (3,-4)$. Να υπολογίσετε τα μέτρα $|\vec{AB}|, |\vec{AD}|$ των πλευρών.
15. Έστω τα σημεία $A(-3,4)$ και $B(2,-1)$. Να βρείτε σημείο M του άξονα γ'γ, ώστε το τρίγωνο MAB να είναι ισοσκελές με βάση AB.
16. Δίνονται τα σημεία $A(2,-3)$, $B(1,-2)$ και $\Gamma(3,5)$. Να βρείτε σημείο P, ώστε το άθροισμα των Τετραγώνων των αποστάσεων του από τα A,B,Γ να είναι ελάχιστο.
17. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (k-1, 9-k), \vec{\beta} = (2, k-3)$. Να βρείτε τον $k \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι ομόρροπα.
18. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (2, x-y), \vec{v} = (x+y, 2x-2y-4-y^2)$. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ να είναι παράλληλα.
19. Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = (\lambda + 2, -1), \vec{v} = (\lambda^2 + 5\lambda + 6, \lambda + 2)$ να είναι συγγραμμικά.
20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (k^2 + 1, \lambda^2 + 1), \vec{\beta} = (2\lambda, 2k)$.

Αν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, να βρείτε :

Ι) Τα $k, \lambda \in \mathbb{R}$

II) Το συντελεστή διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$.

III) Τη γωνία που σχηματίζει το $-\vec{\alpha}$ με τον $\chi'\chi$.

21. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha\beta, 2)$ $B(2\beta-4, 6)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

I) Αν $\alpha=2$, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{AB}$ και την γωνία που

Σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$.

II) Αν $\alpha=3$, να βρείτε το β , ώστε το διάνυσμα $\vec{AB}$ να σχηματίζει με τον άξονα $\chi'\chi$ γωνία $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

22. Σε ένα επίπεδο θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(-7, -1)$, $\Gamma(1, 0)$ και $\Delta(-3, -5)$. Να δείξετε ότι οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται.

23. Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα

$$\vec{\alpha} = (2x - y, 3), \vec{\beta} = (5x + 2y - 7, 3x - y - 10) \text{ και } \vec{\gamma} = (3y - 6x - 4, x - y - 1)$$

να σχηματίζουν τρίγωνο.

24. Δίνονται τα σημεία $A(2x-1, x-2)$, $B(x+1, x-4)$ και $\Gamma(3x, 4)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τα σημεία A, B, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.

25. Δίνονται τα σημεία $A(2, 6)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(2, 2)$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

26. Δίνονται τα σημεία $B(4, 5)$, $\Gamma(2, -1)$ και $\Delta(-1, -3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A , ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

27. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 2)$, $B(k-3, k+1)$, $\Gamma(1, -1)$ και $\Delta(3, 4)$. Για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο;

28. Δίνονται τα σημεία $A(0, 1)$, $B(-2, 0)$ και $\Gamma(1, 3)$

i. Να δείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου

ii. Να βρείτε το Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ είναι #

29. Δίνονται τα σημεία $A(\lambda-1, -2)$, $B(-1, 0)$ και $\Gamma(\lambda-3, 2\lambda)$

i. Να βρείτε το λ ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι κορυφές τριγώνου

ii. Για $\lambda=-1$ να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1. Τι ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων ;

- Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \sin \phi$ όπου ϕ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$
- Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε ορίζουμε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

2. Ποια είναι η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου;

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Το εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων ισούται με το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντεταγμένων τους

3. Να γράψετε τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων

- $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)
- $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$
- $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$
- $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{\beta})$

Απόδειξη:

$$\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2) \text{ και } \vec{\gamma} = (x_3, y_3)$$

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{\beta} &= \lambda(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \cdot (x_2, y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 \\ &= \lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\lambda \vec{\beta}) &= (x_1, y_1) \cdot \lambda(x_2, y_2) = (x_1, y_1) \cdot (\lambda x_2, \lambda y_2) = \lambda x_1 x_2 + \lambda y_1 y_2 \\ &= \lambda(x_1 x_2 + y_1 y_2) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \end{aligned}$$

- $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα)

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + y_1 y_2 + y_1 y_3 = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{\beta} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \end{aligned}$$

- $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \lambda_{\vec{\beta}} = -1$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{\beta} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 = -y_1y_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}}\lambda_{\vec{\beta}} = -1\end{aligned}$$

Προσοχή: δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $\vec{a} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

4. Πως βρίσκουμε τη γωνία δυο διανυσμάτων;

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

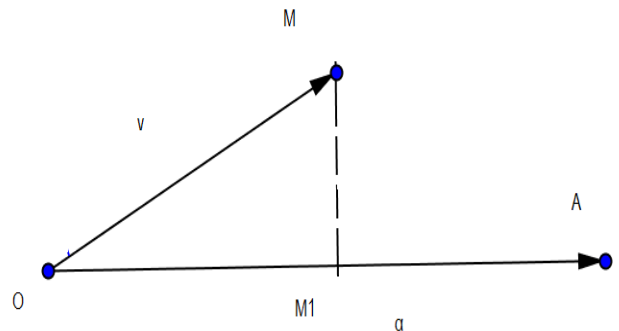
5. Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$$

Απόδειξη

Έστω $\vec{a}, \vec{v}$ δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Με αρχή ένα σημείο ο παίρνουμε τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{a}$ και $\vec{OB} = \vec{v}$



Από το M φέρνουμε κάθετο στο $\vec{OA}$ και έστω M_1 το ίχνος της καθέτου

Το διάνυσμα $\vec{OM_1} = \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$ τότε

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot (\vec{OM_1} + \vec{M_1M}) = \vec{a} \cdot \vec{OM_1} + \vec{a} \cdot \vec{M_1M} = \vec{a} \cdot \vec{OM_1} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v}$$

Εφαρμογή :

Να αποδειχθεί ότι:

$$\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Απόδειξη:

$$\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v} \parallel \vec{a} \Leftrightarrow \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v} = \lambda\vec{a} \text{ οπότε } \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{v} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \lambda\vec{a} \Rightarrow \lambda = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}|^2}$$

$$\text{άρα } \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{v}}{|\vec{\alpha}|^2} \cdot \vec{\alpha}$$

Ασκήσεις στο εσωτερικό γινόμενο:

1. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3, |\vec{\beta}| = 4, \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{2\pi}{3}$

να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα : ι) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ιι) $(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})$

2. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι μοναδιαίο και ισχύουν $|\vec{\beta}| = 6$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
3. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, με $|\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 7$ να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
4. Τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, με $|\vec{\alpha}| = 9$ και $|\vec{\beta}| = 4$ να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\beta}| = \sqrt{12}$ $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -12$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 150^\circ$. Να βρείτε:
- Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$
 - Το εσωτερικό γινόμενο $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$
6. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = (-3, 1), \vec{v} = (2, 1)$. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u} \cdot \vec{u}, \vec{v} \cdot \vec{v}, \left(\vec{u} + \vec{v} \right)^2, \left(2\vec{u} - \vec{v} \right)^2$$

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 3, \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{3\pi}{4}$. Να υπολογίσετε το

εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

8. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :
- $\vec{\alpha} = (3, 5)$ και $\vec{\beta} = (4, 2)$
 - $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 5)$
 - $\vec{\alpha} = (-4, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -6)$
 - $\vec{\alpha} = (0, 3)$ και $\vec{\beta} = (7, -2)$

9. Να αποδείξετε ότι: $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2$
10. Δίνονται τα κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 3)$ και $\vec{\beta} = (-6, \lambda + 2)$, με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε
 α. Τον αριθμό λ
 β. Για ποια τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ είναι $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \perp (\mu\vec{\alpha} + \vec{\beta})$
11. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{u} = (1, -2)$. Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{v}$ για τα οποία ισχύει
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3, \left| \vec{v} \right| = 3$.
12. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $\left| \vec{\alpha} \right| = \sqrt{2}, \left| \vec{\beta} \right| = 1, \left| \vec{\gamma} \right| = \sqrt{5}$ και $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - 3\vec{\gamma} = \vec{0}$.
 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$.
13. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $5\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + 4\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 9$
 Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
14. Αν $x^2 + y^2 = 36, x, y \in \mathbb{R}$ να βρείτε την μέγιστη τιμή της παράστασης $\Pi = -6x + 8y$,
 καθώς επίσης και τις τιμές των x, y για τις οποίες η παράσταση Π παίρνει τη μέγιστη τιμή της.
15. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει ότι $\left| \vec{\alpha} \right| = \sqrt{3}, \left| \vec{\beta} \right| = 2, \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{6}$ και
 $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\left(\vec{\alpha}, \vec{\gamma} \right)$.
16. Για τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ ισχύει ότι $(\vec{u} - \vec{v}) \perp (\vec{u} + \vec{v})$ και $(\vec{u} + 3\vec{v}) \perp (3\vec{u} - 3\vec{v})$ Να
 υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$.
17. Έστω δύο διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ με $\left| \vec{u} \right| = 4$ για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{R}$ το διάνυσμα $(k\vec{u} - 2\lambda\vec{v})$

είναι κάθετο στο διάνυσμα $(\lambda \vec{u} + 3\kappa \vec{v})$. Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{v}$, $2\vec{v} + \vec{u}$.

18. Για δυο διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{6}$ και $(4\vec{a} - 2\vec{\beta}) \perp (3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta})$ να

δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

19. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με $|\vec{AB}| = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1), |\vec{BG}| = 2\sqrt{3}, \hat{B} = 60^\circ$. Να βρείτε το μέτρο της διαμέσου BM και την γωνία ABM.

20. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = k\vec{i} - \lambda\vec{j}, \vec{\beta} = (k - \lambda)\vec{i} + (k + \lambda)\vec{j}, \vec{\gamma} = (k + 25)\vec{i} + 5\vec{j}$

και $\vec{\delta} = (2k + \lambda - 5)\vec{i} + (k - 1)\vec{j}$ με $k, \lambda \in \mathbb{R}$.

i) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι παράλληλα, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ είναι Αντίρροπα

ii) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν.

21. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{u} = (-4, 3)$ πάνω στο $\vec{v} = (-3, 1)$.

22. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}, |\vec{\beta}| = 2, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$

i) Να δείξετε ότι $\alpha \nparallel \beta$

ii) Να υπολογίσετε τα $k, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}[k\vec{\alpha} + (2 - \kappa)\vec{\beta}] = 4\kappa\vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\beta}$

23. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ σε δυο συνιστώσες, μια παράλληλη στο $\vec{\beta} = (3, -4)$

και μια κάθετη στο $\vec{\beta}$.

24. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{\beta} = -2\vec{i} + 8\vec{j}$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δυο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μια να είναι παράλληλη με το $\vec{\alpha}$.

25. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (2, -2)$ σε δύο συνιστώσες κάθετες των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = (1, 2), \vec{\beta} = (-3, 1)$.

26. Αν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}, |\vec{\beta}| = 2, \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{5\pi}{6}$ να υπολογίσετε τον $k \in \mathbb{R}$, ώστε

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}-3\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \vec{0}.$$

27. i) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2} \cdot \vec{\alpha}$.

ii) Αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\mu \vec{\beta} + \nu \vec{\gamma}) = \mu \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} + \nu \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\gamma}.$$

28. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}|^2$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, να δείξετε ότι : $|\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}|$.

29. Αν για δυο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ ισχύει ότι : $|\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u} - \vec{v}|$, να δείξετε ότι

$$\left(\vec{u}, \vec{v} \right) > \frac{\pi}{2}.$$

30. δίνεται τρίγωνο ABΓ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι :

$$\overrightarrow{MA}^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG}) \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AG}$$

31. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}, \vec{v}$ με $\vec{v} \neq \vec{0}$ για τα οποία ισχύουν :

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}, \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{u}.$$

I) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

II) Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε να δείξετε ότι $\vec{\beta} = \vec{0}$.

32. Έστω ΑΗ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, στο οποίο ισχύει $\vec{AG}^2 = \vec{GB} \cdot \vec{GH}$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

33. Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με

$$|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{3}, |\vec{\beta}| = 2, \left(\vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{6}. \text{ Στο επίπεδο αυτό θεωρούμε ένα σημείο } O$$

και έστω τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{OB} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ και $\vec{OG} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΗ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

34. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ να δείξετε ότι $\vec{AG} \cdot \vec{BD} + \vec{AB}^2 = \vec{AD}^2$.

35. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να δείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{AD}} \vec{AG} + \text{προβ}_{\vec{AD}} \vec{BD} = 2 \vec{AD}$.

36. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ του επιπέδου, τέτοιο ώστε $\vec{AB} + \vec{AG} = 2 \vec{AP}$.

$$\text{Αν } |\vec{AP}| = |\vec{PG}| = 10 \text{ και } |\vec{AB}| = 10\sqrt{3} \text{ να δείξετε ότι:}$$

i) Τα σημεία Β, Γ, Ρ είναι συνευθειακά

ii) Το Ρ είναι μέσο της ΒΓ

iii) $\angle BAG = 90^\circ$

iv) $\left(\vec{BG}, \vec{AB} \right) = 150^\circ$

v) $\vec{BG} \perp (\vec{AP} + \vec{AG})$

37. Αν $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2\sqrt{5}$, $\hat{\theta} = 120^\circ$ και $\vec{v} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ να υπολογίσετε

- i) $|\vec{v}|$ ii) τις γωνίες των διανυσμάτων $(\vec{\alpha}, \vec{v})$ και $(\vec{v}, \vec{\beta})$

38. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ μοναδιαία διανύσματα και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$

39. Αν $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$

- i) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 ii) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
 iii) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$

40. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και το τρίγωνο ABΓ με

$$\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \overrightarrow{BG} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta} \text{ και AM διάμεσός του}$$

- i) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 ii) Να δείξετε ότι $\overrightarrow{AM} = \frac{4\vec{\alpha} - \vec{\beta}}{2}$
 iii) Να βρείτε το $|\overrightarrow{AB}|$
 iv) Να βρείτε το $\text{syn}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$

41. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(3,-1) B(7,2) Γ $\left(-\frac{5}{7}, -2\right)$ και AM η διάμεσος του

- i) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$
 ii) Να βρείτε σημείο Ρ του άξονα χ'χ ώστε το τρίγωνο APB να είναι ορθογώνιο στο Ρ
 iii) Να βρείτε την προβολή του $\overrightarrow{AM}$ στο $\overrightarrow{AB}$

42. Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν : $|\vec{\alpha}| = 1$ και

$$\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = -2\vec{\alpha}$$

- i. Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 ii. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\chi}$ τέτοιο ώστε $\vec{\chi} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $\vec{\alpha} \perp (\vec{\chi} - 2\vec{\beta})$
 iii. Αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ να βρείτε το $|\overrightarrow{AB}|$ και το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$

43. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 8. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9$

44. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 8. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{3MA} + 4\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{3MA} - 4\overrightarrow{MB}|$
45. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με μήκος 8. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB}|$

Επαναληπτικές ασκήσεις στα διανύσματα

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (8, \lambda)$ και $\vec{\beta} = (-\lambda, -2)$.
 - a) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$
 - b) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ να είναι ομόρροπα
 - c) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2 + \kappa, 4)$ και $\vec{\beta} = (5, \kappa + 11)$, $\kappa \in \mathbb{R}$
 - a) Για $\kappa=1$ να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 - b) Για $\kappa=1$ να βρείτε το $\widehat{\text{syn}}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
 - c) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ για την οποία $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (-3, 4)$
 - a) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$
 - b) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
 - c) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 - d) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{u} = (5, -2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 3)$.
 - a) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 - b) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$
 - c) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (\kappa^2 - \kappa, \kappa)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

5. Δίνονται τα σημεία $A(-4, -3)$, $B(2, 1)$ και $\Gamma(5, 3)$
 - a) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{B\Gamma}$ και να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά
 - b) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου του AB
 - c) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{B\Gamma}$
 - d) Αν $\vec{\alpha} = (2, -3)$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{A\Gamma}$

6. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 1)$, $\vec{\beta} = (-6, 0)$ και $\vec{\gamma} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\kappa \in \mathbb{R}$
 - a) Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -6$
 - b) Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\gamma}$ τότε :
 - i) Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$
 - ii) Να υπολογίσετε το $|\vec{\gamma}|$

- iii) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$
7. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ με $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{AD} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$, $\vec{AG} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο
 - Αν το ABΓΔ είναι ρόμβος και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ τότε
 - Να αποδείξετε ότι τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους
 - Να βρεθεί το μήκος της πλευράς του ρόμβου
 - Να βρεθεί το είδος της γωνίας $\widehat{BAD}$
8. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(0,3), B(-9,0) και Γ(γ,0) όπου $\gamma \in \mathbb{R}$ με $\gamma > 0$. Αν ισχύει ότι : $|\vec{AB}| = 3|\vec{AG}|$, τότε ,
- Να υπολογίσετε την τιμή του γ
 - Αν Δ(κ,λ) και Ε(μ,ν) είναι δύο σημεία του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\vec{AD} = 3 \cdot \vec{AG}$ και $\vec{BE} = 2 \cdot \vec{GE}$ να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Δ και Ε
 - Να αποδείξετε ότι $\vec{DB} \perp \vec{DE}$
9. Αν $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$
- Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 - Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
 - Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\beta})$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\beta}$
10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -5)$, $\vec{\beta} = (-3, 2)$, $\vec{\gamma} = (-2, 2)$
- Να βρείτε το διάνυσμα $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$
 - Να εξετάσετε αν $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$
 - Να βρείτε το είδος της γωνίας των $\vec{\beta}, \vec{\gamma}$
 - Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 - Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
 - Να βρείτε τα $|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\beta}|$
 - Να βρείτε τη γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$
 - Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον $x'x$
11. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} - 4\vec{\gamma} = \vec{0}$

- a) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
b) Αν $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ να βρείτε το $|\vec{u}|$

12. Έστω τα σημεία A(-1,-2) και B(1,2) και $\vec{i}$ και $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα κοψ

- a) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A,O,B είναι συνευθειακά
b) Να γράψετε σαν συνάρτηση των $\vec{i}$ και $\vec{j}$ το $\vec{AB}$
c) Να βρείτε το σημείο Γ στον x'x ώστε : $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$
d) Να υπολογίσετε τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A) Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δυο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$;
- B) Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ για $\vec{a} \neq \vec{0}$
- Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΕΣ ή ΛΑΘΟΣ
- i) Αν $|\vec{a}| = 2|\vec{\beta}|$ τότε $\vec{a} = 2\vec{\beta}$
- ii) Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} > 0$ τότε $0 < \widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} < \frac{\pi}{2}$
- iii) Αν $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε $\vec{a} = \vec{\beta}$
- iv) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$
- v) Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$

ΘΕΜΑ 2^ο

1. Αν $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}| = 1$ και $\vec{a} + \vec{\beta} + 4\vec{\gamma} = \vec{0}$
 - iv) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
 - v) Να βρείτε τη γωνία των $\vec{a}, \vec{\beta}$
 - vi) Να δείξετε ότι $\vec{a} = 3\vec{\beta}$
2. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός χ , έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (\chi, 1)$ και $\vec{\beta} = (9, \chi)$ να είναι αντίρροπα .

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{\beta}| = 3$, $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = 120^\circ$ και $(3\vec{a} - \vec{\beta}) \perp (6\vec{a} + 5\vec{\beta})$

- i) Να αποδείξετε ότι $|\vec{a}| = 2$
- ii) Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$ να βρείτε :
 - α) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$
 - β) Τη γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{\gamma})}$

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω ότι για τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ ισχύουν : $|\vec{a}| = 1$ και $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta} = -2\vec{a}$

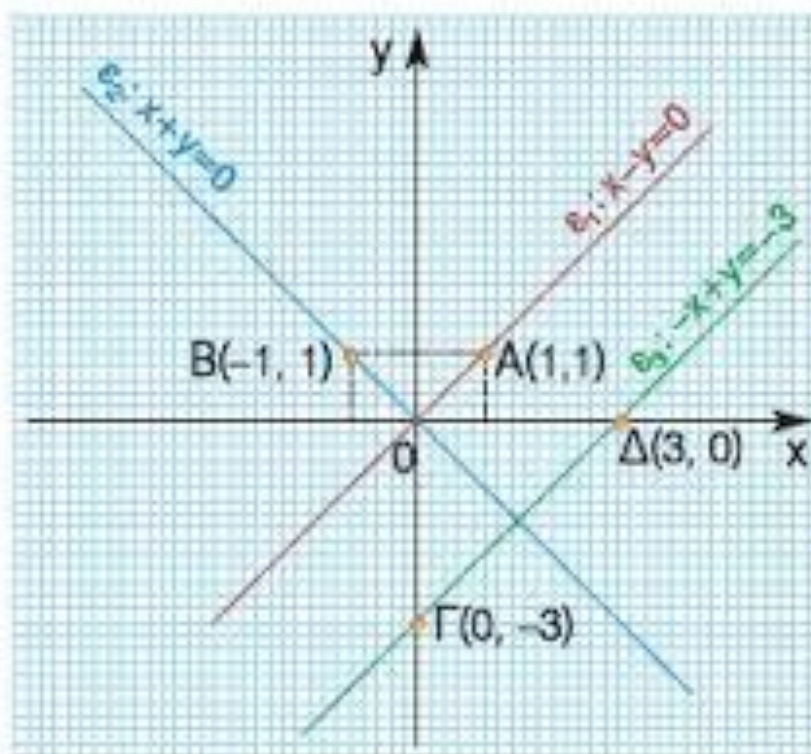
- i) Να βρείτε το $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

ii) Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\chi}$ τέτοιο ώστε: $\vec{\chi} \parallel (\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και
 $\vec{\alpha} \perp (\vec{\chi} - 2\vec{\beta})$

iii) Αν $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = 120^\circ$ και $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ να βρείτε το $|\overrightarrow{AB}|$ και το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 1$$

Ευθεία



2.1 Ερωτήσεις θεωρίας στην ευθεία

1. Τι ονομάζουμε εξίσωση γραμμής;

Μια εξίσωση με δυο αγνώστους x, y λέγεται εξίσωση μιας γραμμής C όταν οι συντεταγμένες των σημείων της C και μόνο αυτές την επαληθεύουν

2. Τι ορίζουμε ως συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας ε ;

Ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση της ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x'

3. Πως βρίσκω τον συντελεστή διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$;

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$$

Απόδειξη:

Η ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ο φορέας του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, άρα είναι $\varepsilon // \overrightarrow{AB}$. Επομένως ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ε είναι ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\text{Δηλαδή } \lambda = \lambda_{\overrightarrow{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4. Πότε δυο ευθείες είναι παράλληλες και πότε είναι κάθετες;

Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο ευθείες με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 τότε :

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

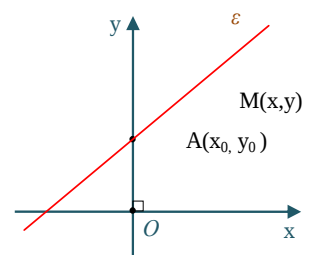
$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

5. Να γραφεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0)$$

Απόδειξη:

Ένα σημείο $M(x, y)$ διαφορετικό από το $A(x_0, y_0)$ ανήκει στην ευθεία ε αν και μόνο αν : $\overrightarrow{AM} // \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\overrightarrow{AM}} = \lambda$ όμως είναι $\overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0)$ άρα



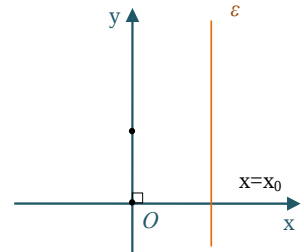
$$\lambda_{\overrightarrow{AM}} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

6. Να γραφεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$;

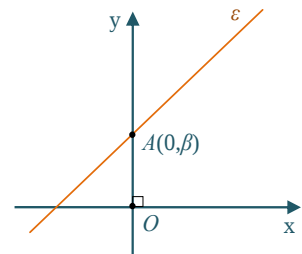
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

7. Να γραφούν όλες οι ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων ευθειών

- Η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχει εξίσωση : $x = x_0$ (για αυτήν την ευθεία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης)

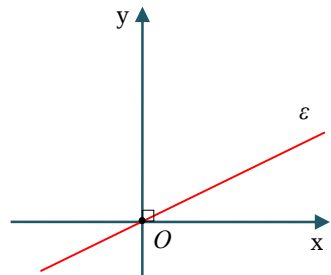


- Η εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $A(0, \beta)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι :



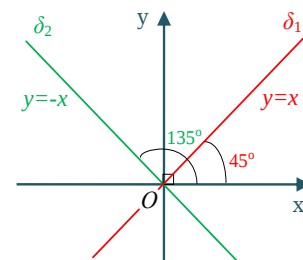
$$\epsilon: y = \lambda x + \beta$$

- Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

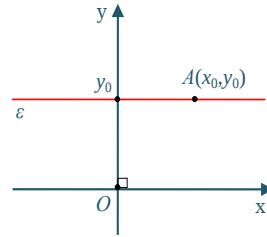


$$\epsilon: y = \lambda x$$

- Οι διχοτόμοι των γωνιών $\chi\hat{\delta}y$ και $y\hat{\delta}x'$ έχουν εξισώσεις : $y=x$ και $y=-x$



- Η οριζόντια ευθεία $y=y_0$



Ασκήσεις στην εξίσωση ευθείας

- Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε , αν αυτή έχει εξίσωση

<i>i</i>) $y = 2x - 1$	<i>iv</i>) $x = 2y + 3$
<i>ii</i>) $y = 3 - 5x$	<i>v</i>) $18x - 6y + 5$
<i>iii</i>) $y = \frac{5x - 6}{10}$	<i>vii</i>) $y = 2$
- Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας, η οποία διέρχεται από τα σημεία A και B όταν

<i>i</i>) $A(0,0)$ και $B(6,10)$
<i>ii</i>) $A(-3,4)$ και $B(2,-6)$
<i>iii</i>) $A(5,-4)$ και $B(8,-4)$
<i>iv</i>) $A(-2,7)$ και $B(-2,4)$

Και έπειτα να βρεθεί η εξίσωσή της .
- Να βρεθεί η τιμή του α για την οποία η ευθεία $\varepsilon: y=3x-\alpha$ διέρχεται από το σημείο $A(2,10)$.
- Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,5)$ και :

<i>i</i>) Έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -4$
<i>ii</i>) Έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 0$
<i>iii</i>) Σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 60^\circ$
<i>iv</i>) Είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (2,20)$
<i>v</i>) Είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (6,3)$
<i>vi</i>) Είναι παράλληλη στη ευθεία $\zeta: 4x+12y-5=0$
<i>vii</i>) Είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: 12y+4x-5=0$

5. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = (\lambda^2 - \lambda + 3)x - \lambda - 2$. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathfrak{R}$ για τις οποίες η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$

6. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathfrak{R}$, ώστε οι ευθείες $(\varepsilon): y = (\lambda - 1)x + 2$

και $(\zeta): y = \left(\lambda - \frac{13}{3}\right)x + 7$ να είναι κάθετες .

7. Δίνεται το σημείο $A(-2,3)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το A και η οποία :

i) είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): y=5x-3$,

ii) είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): x+2y-3=0$

iii) είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$,

iv) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

v) σχηματίζει γωνία $\frac{2\pi}{3}$ με τον άξονα $x'x$.

8. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB , όταν $A(3,-5)$ και $B(-1,3)$.

9. Να βρεθούν οι τιμές του $\theta \in (0, \pi)$, ώστε οι ευθείες $(\varepsilon): y = (\eta \mu 2\theta)x + 3$ και $(\zeta): y = (1 + \sigma \nu 2\theta)x - 7$ να είναι παράλληλες .

10. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(-1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(5,2)$. Να βρεθούν :

i) Οι εξισώσεις των πλευρών του ,

ii) οι εξισώσεις των υψών του

iii) οι εξισώσεις των διαμέσων του .

11. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $(\varepsilon): (a^2 + b^2 + \gamma^2)x - 2(a + b + \gamma)y + 3 = 0$

Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{R}$, ώστε η ευθεία (ε) να διέρχεται από Το σημείο $A(1,1)$

12. Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A(-1,6)$ και οι εξισώσεις δυο πλευρών του είναι $x+y-1=0$ και $x-y+11=0$.

Να βρεθούν οι κορυφές του ορθογωνίου

13. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $A(2,1)$ ως προς την ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y=x+1$
14. Να βρεθούν οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $P(0,2)$ και τέμνουν τις ευθείες $(\epsilon): y=2x+2$ και $(\eta): y=2x-2$ στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι ώστε $AB=4$.
15. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ϵ) και (ζ) με εξισώσεις $(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-3=0$ και $(2\lambda-3)x+3y+7=0$ αντίστοιχα να είναι παράλληλες
16. Να βρεθούν οι εξισώσεις της πλευράς AB και του ύψους BD ενός τριγώνου $AB\Gamma$ αν $K(2,3)$, $\Lambda(-2,2)$ και $M(-3,1)$ είναι τα μέσα των πλευρών του AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
17. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(2,0)$, ενώ οι εξισώσεις μιας διαμέσου και ενός ύψους του που άγονται από διαφορετικές κορυφές είναι $x-y+2=0$ και $3x+y+2=0$ αντίστοιχα. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.
18. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(7,-4)$. Οι εξισώσεις μιας διχοτόμου και μιας διαμέσου του που άγονται από την ίδια κορυφή είναι $3x+y-7=0$ και $11x+6y-35=0$ αντίστοιχα. Να βρεθεί η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ και οι συντεταγμένες της κορυφής Γ .
19. Να βρεθούν οι ευθείες οι οποίες διέρχονται από το σημείο $P(2,3)$ και τέμνουν τους άξονες x' και y' στα σημεία A και B αντίστοιχα έτσι ώστε $OA=OB$.
20. Δίνονται οι ευθείες $(\epsilon): x-3y+10=0$, $(\zeta): 2x+y-8=0$ και το σημείο $P(0,1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες σχηματίζουν με τις (ϵ) και (ζ) παραλληλόγραμμο με κέντρο το σημείο P , καθώς και οι κορυφές του παραλληλογράμμου αυτού.
21. Σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(2,3-\lambda)$, $B(\lambda+1,2)$ και $\Gamma(3,1)$. Να αποδειχθεί ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου κινείται σε μια ευθεία.
22. Στο εξωτερικό ενός ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $ABDE$ και $A\Gamma ZH$. Έστω M το μέσο της DZ . Να αποδειχθεί ότι: i) Τα σημεία Δ, A και Z είναι συνευθειακά
ii) Το τρίγωνο $MB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
23. Να αποδειχθεί ότι όλες οι ευθείες $(\epsilon_\lambda): (2\lambda^2 + \lambda + 1)x - (\lambda^2 - \lambda + 1)y - \lambda^2 - 2\lambda = 0$ διέρχονται από το ίδιο σταθερό σημείο.
24. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$.
25. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda-3, 2\lambda+1)$, όπου το λ διατρέχει το $\mathbb{R}$.

26. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες $(\varepsilon): y = (\lambda - 1)x + 2$

$$(\eta): y = \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)x - 3 \text{ να είναι κάθετες.}$$

27. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τους άξονες και την ευθεία $(\varepsilon): 3x + 4y - 12 = 0$.

28. Να βρεθούν οι τιμές του $\theta \in (0, \pi)$, ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = (2\eta\mu\theta)x + 3$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\eta): y = x + 5$

29. Η προβολή της αρχής των αξόνων σε μια ευθεία (ε) είναι το σημείο $A(4, 5)$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας αυτής.

30. Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(4, 2)$ και $\Gamma(1, 3)$.

i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$.

ii) Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ σχηματίζουν ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

31. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $A(5, -1)$ ως προς την ευθεία $(\varepsilon): x - 2y - 2 = 0$.

32. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία

$$(\varepsilon): (a^2 + \beta^2)x - (\alpha + 2\beta)y + 5 = 0 \text{ να διέρχεται από το σημείο } A(1, 2)$$

33. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\varepsilon): 2x - 3y + 5 = 0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 3 τετραγωνικές μονάδες.

34. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(1, 1)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $MA^2 - MB^2 = 19$

35. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(0, 4)$, $B(0, 2)$ και το Γ κινείται στην ευθεία $(\varepsilon): x - y + 1 = 0$. Να αποδειχθεί ότι το κέντρο βάρους του τριγώνου κινείται σε μια ευθεία.

36. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στην πλευρά $A\Delta$ παίρνουμε σημείο E και στην πλευρά $\Delta\Gamma$ σημείο Z τέτοιο ώστε $\Delta Z = AE$. Να αποδειχθεί ότι $AZ \perp BE$.

37. Έστω $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$. Αν $A\Delta \perp B\Gamma$, $\Delta E \perp AB$, $\Delta Z \perp A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$, να αποδειχθεί ότι $AM \perp ZE$

38. Να αποδειχθεί ότι όλες οι ευθείες $(\varepsilon): \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ με $\alpha + \beta + \gamma = 0$ διέρχονται από σταθερό σημείο.

2.2 Γενική μορφή ευθείας

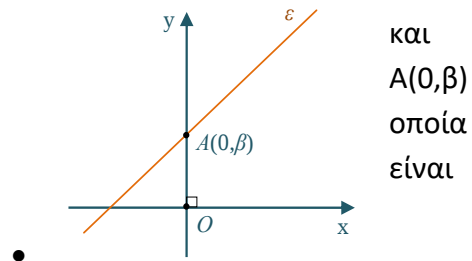
8. Ποια είναι η γενική μορφή εξίσωσης της ευθείας;

Κάθε ευθεία του επιπέδου έχει εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$
Και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της παραπάνω μορφής παριστάνει ευθεία

Απόδειξη:

Έστω μια ευθεία ε στο καρτεσιανό επίπεδο . υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις

- Αν η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ τέμνει τον y' στο σημείο τότε έχει εξίσωση : $y=\lambda x+\beta$ η γράφεται: $\lambda x-y+\beta=0$ δηλαδή της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$



- Αν η ευθεία ε είναι κατακόρυφη και διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0)$ τότε έχει εξίσωση $x=x_0$, η οποία γράφεται $x+0y-x_0=0$ δηλαδή είναι της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$

Αντίστροφα:

Θα αποδείξουμε ότι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ παριστάνει ευθεία

- Αν $B \neq 0$ τότε η εξίσωση γράφεται :

$$By = -Ax - \Gamma \Leftrightarrow y = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B}$$

Η οποία είναι εξίσωση που τέμνει τον άξονα y' στο σημείο $\Sigma(0, -\frac{\Gamma}{B})$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B}$

- Αν $B=0$ τότε από υπόθεση $A \neq 0$ και η εξίσωση γράφεται:

$$Ax + \Gamma = 0 \Leftrightarrow Ax = -\Gamma \Leftrightarrow x = -\frac{\Gamma}{A}$$

Η οποία είναι ευθεία κάθετη στον x' στο σημείο $P(-\frac{\Gamma}{A}, 0)$

9. Να γραφεί το παράλληλο και το κάθετο διάνυσμα προς την ευθεία $Ax+By+\Gamma=0$

- Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$.
- Η ευθεία με εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$.

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι $\lambda = -\frac{A}{B}$

Ασκήσεις στη Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

- Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x+y-1=0$. Να βρείτε :
 - Ευθεία ζ που είναι κάθετη στην ε και διέρχεται από το σημείο $A(-2,-3)$
 - Το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ
- Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 6x-2y+5=0$. Να βρείτε :
 - Ευθεία ζ που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο $A(2,-3)$
 - Τα σημεία τομής της ευθείας ζ με τους άξονες
- Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A(3,2)$ και δυο από τις πλευρές έχουν εξισώσεις $\chi+\psi-1=0$ και $\chi-\psi+3=0$. Να βρεθούν οι άλλες κορυφές του ορθογωνίου.
- Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)\chi-(\lambda^2+5\lambda+6)y-\lambda+3=0, \lambda \in \mathfrak{R}$
 - Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathfrak{R}$
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η ευθεία αυτή να είναι παράλληλη στον άξονα ψ'
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η ευθεία αυτή να είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): \chi+\psi-3=0$
- Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-4)\chi+(\lambda^2+2\lambda-8)y+\lambda^2-3\lambda+2=0$ (1)

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathfrak{R}$ η εξίσωση (1)

 - Παριστάνει ευθεία
 - Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα χ'
 - Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα γ'
 - Παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-3\lambda+2)\chi-(\lambda^2-4\lambda-5)y+\lambda^2-9=0, \lambda \in \mathfrak{R}$
 - Να αποδειχθεί ότι για κάθε λ η εξίσωση αυτή παριστάνει ευθεία.
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα $\psi'\psi$.
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη στον άξονα $\chi'\chi$.
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η ευθεία αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε να ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης της παραπάνω ευθείας, ο οποίος και να βρεθεί.
- Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: (\alpha-3)\chi+2y+2\alpha-1=0$

Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού α η ευθεία ε

 - Είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: 5\chi-10\gamma+13=0$

- b. Είναι κάθετη στην ευθεία η: $6x-3y+1=0$
 c. Σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$
 d. Διέρχεται από το σημείο $M(1,5)$
8. Να βρεθούν οι τιμές των α και $\beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση
- $$(\alpha^2 + \alpha + \beta + 1)x - (\beta^2 + \beta + \alpha + 1)y + \alpha + \beta + 1 = 0$$
- δεν παριστάνει ευθεία .
9. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x + (3\lambda - 1)y + 2\lambda - 10 = 0$ (1) . Να αποδείξετε ότι :
- Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρείτε
10. Δίνεται η εξίσωση $(3 - \mu)x + (4 - \mu)y + \mu = 0$ (1) . Να αποδείξετε ότι :
- Η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$
 - Όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1) για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο και να βρείτε
 - Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία ε που έχει εξίσωση την (1) να είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: 4x+2y+13=0$
11. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x - (\lambda^2 - 4\lambda + 3)y + 1 - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R} : (\varepsilon)$
- Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει ευθεία
 - Αν η (ε) παριστάνει ευθεία , να αποδειχθεί ότι αυτή διέρχεται από σταθερό σημείο .
12. Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda + 1)x + (3 - \lambda)y + 4, (2 - \lambda)x + (2\lambda - 1)y + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$
- Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθεία για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
 - Να βρεθούν οι τιμές του λ , ώστε οι ευθείες αυτές να είναι παράλληλες
13. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες
- $$(\varepsilon): \lambda x + (\lambda - 1)y + 3 = 0, (\zeta): (5 - \lambda)x + (2\lambda - 3)y + 5 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$
- να είναι κάθετες .
14. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: \lambda x + 8y - 4\lambda + 4 = 0$ και $\zeta: (\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y - 3\lambda + 4 = 0$
 Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$
15. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: \lambda x + (\lambda + 1)y - 3 = 0$ και $\zeta: (\lambda - 2)x + \lambda y - 1 = 0$
- Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες ε και ζ έχουν μοναδικό κοινό σημείο

- b. Να βρείτε το λ , ώστε η ευθεία $\eta: 3x+2y+3=0$ να διέρχεται από το κοινό σημείο των ε και ζ
16. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: \lambda x + (\lambda - 3)y - 5 = 0$ και $\zeta: (\lambda - 3)x + (\lambda - 4)y + 2 = 0$
Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ ισχύει :
- $\varepsilon \perp \zeta$
 - $\varepsilon \parallel \zeta$
17. Οι ευθείες $\varepsilon: \lambda x + (\lambda - 3)y - 3 = 0$ και $\zeta: (\lambda - 4)x + (2 - \lambda)y + 14 = 0$ είναι κάθετες .
Να βρείτε :
- Τον πραγματικό αριθμό λ
 - Των σημείο τομής των ε και ζ
18. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon: \sqrt{3} \cdot x - y + 7 = 0$ και $\zeta: \sqrt{3} \cdot x - 3y + 13 = 0$
19. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\varepsilon: y = 2x - 5$ και $\zeta: y = -3x + 1$
20. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες
 $(\varepsilon): x - 5y + 7 = 0, (\zeta): 2x + 3y - 5 = 0$
21. Οι ευθείες $\varepsilon: \alpha x + (\beta - 1)y - 1 = 0$ και $\zeta: \beta x + (\alpha + 1)y + 6 = 0$ τέμνονται στο σημείο $M(1, -2)$. Να βρείτε :
- Τους αριθμούς α και β
 - Την οξεία γωνία των ευθειών ε και ζ
22. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 2y^2 - 3xy - 7x - y + 3 = 0$ (1)
a. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες οι οποίες είναι κάθετες
b. Να βρείτε το σημείο τομής των δύο ευθειών του ερωτήματος α.
23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 3 = 0$ (1)
a. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες ε και ζ οι οποίες είναι παράλληλες
b. Έστω ότι οι ευθείες ε και ζ τέμνουν τον άξονα $y'y$ στα σημεία A και B και έστω M το μέσο του AB . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η που διέρχεται από το M και είναι παράλληλη στις ε και ζ
24. Δίνεται η εξίσωση $6x^2 - y^2 - xy - x - 2y - 1 = 0$ (1)
a. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες
b. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$
25. Δίνεται η εξίσωση : $3x^2 + 2y^2 + 7xy + 2x - y - 1 = 0$ (1)
a. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες , των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις
b. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω ευθείες
26. Να βρείτε τι παριστάνουν οι παρακάτω εξισώσεις
- $x^2 - 2y^2 - xy - 5x - 2y + 4 = 0$
 - $4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 2y - 8 = 0$

27. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που είναι κάθετες στην ευθεία $(\varepsilon): 2x - y + 1 = 0$ και ορίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν $E=4$
28. Αν $K(-3,4)$, $\Lambda(1,-4)$ και $M(7,2)$ είναι τα μέσα των πλευρών AB , BF και AF αντίστοιχα ενός τριγώνου ABF , να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του καθώς και οι κορυφές του.
29. Η ευθεία $(\varepsilon) 2x+3y-7=0$ τέμνει την ευθεία AB η οποία ορίζεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(7,-2)$ στο σημείο M . Να αποδειχθεί ότι $AB=3BM$.

30. Στο εξωτερικό ενός ορθογωνίου τριγώνου ABF ($\hat{A} = 90^\circ$) κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $ABDE$ και $AFZH$. Να αποδειχθεί ότι οι BZ και $ΓΔ$ τέμνονται επί του ύψους που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου.

31. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών με εξισώσεις

i) $3x+y-8=0$

ii) $4x-y+4=0$

iii) $5x+2y+1=0$

iv) $2x-5y+3=0$

Ποιες από αυτές τις ευθείες είναι κάθετες ;

32. Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις

i) $(\lambda - 1)x + (\lambda + 2)y - 3 = 0$

ii) $(\lambda^2 - 1)x + (4 - \lambda^2)y + \lambda^2 - 1 = 0$

iii) $(\lambda^2 - 2\lambda - 3)x + (\lambda^2 - 6\lambda + 8)y + \lambda - 5 = 0$

παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

33. Αν η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda^2 - 6\lambda + 8)y + 7 = 0$ δεν παριστάνει ευθεία, να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

34. Να βρεθούν οι τιμές του $\theta \in (0, \pi)$, ώστε η ευθεία (ε) με εξίσωση

$$(\eta \mu^2 \theta)x + (\sigma \nu^2 \theta)y - 1 = 0:$$

- i) Να διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$
- ii) Να είναι παράλληλη στον άξονα ψ'
- iii) Να είναι παράλληλη στον άξονα χ'

35. Δίνονται οι εξισώσεις $(\lambda-1)x+2y+7=0$ και $(5-\lambda)x+(\lambda-1)y+3=0$

i) Να αποδειχθεί ότι οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν ευθείες

ii) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες αυτές να είναι παράλληλες

36. Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε): $(\mu-2)\chi+3\psi+9=0$ και

(ζ): $(\mu-4)\chi+(\mu-6)\psi+2=0$ να είναι κάθετες

37. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν Α(1,2) και δύο ύψη του έχουν εξισώσεις $2\chi-3\psi+1=0$ και $\chi+\psi=0$.

38. Δίνονται τα σημεία Α(4,2), Β(3,-5) και η ευθεία (ε): $7\chi+\gamma-23=0$. Να βρεθεί σημείο Μ της ευθείας (ε) τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

39. Δίνονται οι ευθείες (ε): $3\chi+\psi-5\alpha=0$ και (ζ): $\chi-3\psi+5\alpha=0$. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (ζ) κινείται σε σταθερή ευθεία.

40. Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$, να αποδειχθεί ότι οι ευθείες (ε): $(\lambda-2)\chi+(\lambda+1)\psi-2=0$ και

(ζ): $(\lambda-1)\chi+\lambda\psi-1=0$ τέμνονται και ότι το σημείο τομής τους κινείται σε σταθερή ευθεία.

41. Να βρεθεί η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες

$$(\varepsilon): 2x + y - 3 = 0, (\zeta): (2 - \sqrt{3})x + (2\sqrt{3} + 1)y - 5 = 0.$$

42. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία (ε): $\chi-\gamma+5=0$ και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν Ε=2.

43. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ:

$$i) M(\lambda - 1, 2\lambda - 3), \lambda \in \mathbb{R} \quad ii) M(\lambda - 1, 2\lambda), \lambda \geq 0 \quad iii) M(2\lambda, 3), \lambda \in \mathbb{R} \quad iv) M(\lambda - 1, -3), 1 < \lambda \leq 5$$

$$v) M(3, \lambda^2 + 1), \lambda \in \mathbb{R} \quad vi) M(\sin \lambda, 3), \lambda \in \mathbb{R}$$

44. Να δείξετε ότι το σημείο $M(1 + \eta\mu^2\theta, 2 - 3\sigma\upsilon\nu^2\theta)$ κινείται σε σταθερή ευθεία

2.3 Απόσταση σημείου από ευθεία – εμβαδόν τριγώνου

45. Να γραφεί ο τύπος που μας δίνει την απόσταση σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: Ax+By+\Gamma=0$

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

46. Να γραφεί ο τύπος που μας δίνει το εμβαδό ενός τριγώνου $AB\Gamma$

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})|$$

47. Να γραφεί ο τύπος που μας δίνει την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών

Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x + \beta_2$

Η απόσταση των ευθειών ε_1 και ε_2 συμβολίζεται $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

1. **Μεσοπαράλληλη** δυο παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις ε_1 και ε_2
Για να βρούμε τη μεσοπαράλληλη δύο ευθειών :
Θεωρούμε ένα σημείο $M(x, y)$ το οποίο ανήκει στη μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 αν και μόνο αν

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

Παράδειγμα : Να βρείτε τη μεσοπαράλληλη των ευθειών $\varepsilon_1: 2x - y - 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - y + 3 = 0$

Λύση:

Το $M(x, y)$ ανήκει στη μεσοπαράλληλη των ε_1 και ε_2 αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) &\Leftrightarrow \frac{|2x - y - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2x - y - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow |2x - y - 5| \\ &= |2x - y - 3| \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 2x - y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση της μεσοπαράλληλης είναι $2x - y - 1 = 0$

2. **Διχοτόμος** γωνίας δύο ευθειών είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας
Για να βρούμε τη διχοτόμο δύο ευθειών :
Θεωρούμε ένα σημείο $M(x, y)$ το οποίο ανήκει στη διχοτόμο των ε_1 και ε_2 αν και μόνο αν

$$d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2)$$

Η παραπάνω σχέση μας οδηγεί σε δύο ευθείες, η μία είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας και η άλλη είναι η διχοτόμος της αμβλείας γωνίας

Για να βρούμε ποια είναι η κάθε μία

- Επιλέγουμε ένα σημείο A της δ_1
- Βρίσκουμε τις αποστάσεις $d(A, \delta_1), d(A, \delta_2)$
- Αν $d(A, \delta_1) < d(A, \delta_2)$ τότε η δ_1 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας

Παράδειγμα: δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - 6y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - y + 3 = 0$.

Να βρείτε:

- Τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι παραπάνω ευθείες
- Ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί στην οξεία γωνία;

Λύση:

- Το σημείο $M(x, y)$ ανήκει στη διχοτόμο μιας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες

$\varepsilon_1: 3x - 6y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2: 2x - y + 3 = 0$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} d(M, \varepsilon_1) = d(M, \varepsilon_2) &\Leftrightarrow \frac{|3x - 6y + 5|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2}} = \frac{|2x - y + 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \Leftrightarrow \sqrt{5}|3x - 6y + 5| \\ &= \sqrt{45}|2x - y + 3| \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow |6x - 3y + 9| = |3x - 6y + 5| \\ &\Leftrightarrow (6x - 3y + 9 = 3x - 6y + 5 \text{ ή } 6x - 3y + 9 = -3x + 6y - 5) \\ &\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3x + 3y + 4 = 0 \text{ ή } 9x - 9y + 14 = 0 \end{aligned}$$

Επομένως οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι :

$$3x + 3y + 4 = 0 \text{ ή } 9x - 9y + 14 = 0$$

- Θεωρούμε τυχαίο σημείο της ευθείας $\varepsilon_1: 3x - 6y + 5 = 0$ π.χ το $A(-1, 1)$.

Υπολογίζουμε τις αποστάσεις

$$\begin{aligned} d(A, \delta_1) &= \frac{|3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ d(A, \delta_2) &= \frac{|9 \cdot (-1) - 9 \cdot 1 + 14|}{\sqrt{9 + 9^2}} = \frac{4}{9\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ισχύει ότι $d(A, \delta_1) > d(A, \delta_2)$ τότε η δ_2 είναι η διχοτόμος της οξείας γωνίας

Μεθοδολογία: προσδιορισμός σημείου ευθείας που απέχει ελάχιστη απόσταση από σταθερό σημείο

Έστω $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ μια ευθεία και M ένα σημείο εκτός αυτής

- Η ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από το σημείο M είναι : $d_{\min} = d(M, \varepsilon)$
- Για να βρούμε το σημείο Δ της ευθείας ε που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το M

- Βρίσκουμε την ευθεία ζ που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην ε
- Το ζητούμενο σημείο Δ είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών ε και ζ οπότε λύνουμε το σύστημά τους

Παράδειγμα : δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 3x-4y-5=0$ και το σημείο $M(-4,2)$

- a.** Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων
- b.** Να βρείτε ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο M

Λύση :

a. $d = d(O, \varepsilon) = \frac{|3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$

- b. Βρίσκουμε την ευθεία ζ που διέρχεται από το σημείο M και είναι κάθετη στην ε

$$\zeta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_{\zeta} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\zeta} = -\frac{4}{3} \quad \text{άρα} \quad y - 2 = -\frac{4}{3}(x + 4) \Leftrightarrow 4x + 3y + 10 = 0$$

Λύνουμε το σύστημα $\begin{cases} 3x - 4y - 5 = 0 \\ 4x + 3y + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$

Άρα το σημείο της ευθείας ε που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το M είναι το $\Delta(-1,-2)$

Ασκήσεις στο Εμβαδόν Τριγώνου – Απόσταση σημείου από ευθεία

1. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: 4x - 3y + 2 = 0$. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων $A(2,5)$ και $B(-4,2)$ από την ευθεία ε
2. Να βρείτε τις αποστάσεις του σημείου $A(1,4)$ από τις ευθείες :
 - a. $\varepsilon: y = 2x - 8$
 - b. $\varepsilon: y = 3x - 9$
 - c. $\varepsilon: y = 5$
 - d. $\varepsilon: x = 7$
3. Να αποδείξετε ότι το σημείο $A(-1,3)$ ισαπέχει από τις ευθείες $\varepsilon: 12x + 5y + 10 = 0$ και $\zeta: 3x + 4y - 14 = 0$
4. Δίνονται τα σημεία $A(4,-2)$, $B(2,-8)$ και $\Gamma(-1,13)$. Να βρείτε :
 - a. Την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$
 - b. Την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $B\Gamma$
5. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2x + y - 1 = 0$, $\zeta: 7x + 2y + 4 = 0$ και $\eta: 3x - y - 9 = 0$. Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής των ε και ζ από την η
6. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 5x + y - 9 = 0$, $\zeta: 3x - 2y - 8 = 0$ και $\eta: \lambda x + 3y - 3\lambda - 6 = 0$. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, το σημείο τομής των ευθειών ε και ζ απέχει από την η απόσταση ίση με $\sqrt{10}$
7. Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 3x + y - 2011 = 0$ και απέχουν από το σημείο $A(-4,2)$ απόσταση ίση με $2\sqrt{10}$
8. Να βρείτε τις ευθείες που σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ και απέχουν από το σημείο $A(2,5)$ απόσταση ίση με $3\sqrt{2}$
9. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών $\varepsilon: y = 2x + 7$ και $\zeta: y = 2x - 3$
10. Οι ευθείες $\varepsilon: \lambda x + (2 - \lambda)y - 24 = 0$ και $\zeta: (\lambda - 4)x + (5 - \lambda)y + 18 = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε
 - a. Τον αριθμό λ
 - b. Την απόσταση των ευθειών ε και ζ
11. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 + y^2 - 4xy - 6x + 3y - 4 = 0$ (1)
 - a. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παράλληλες ευθείες τις οποίες και να βρείτε
 - b. Να βρείτε την απόσταση των δύο παράλληλων ευθειών
12. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon: y = 3x - 1$ και $\zeta: y = 3x + 9$ να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε και ζ
13. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 3x - 4y + 1 = 0$ και $\zeta: 8x - 6y + 5 = 0$. Να βρείτε
 - a. Τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι παραπάνω ευθείες
 - b. Ποια από τις παραπάνω διχοτόμους αντιστοιχεί την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες ε και ζ ;
14. Δίνονται οι ευθείες (ε): $4x + 3y - 2 = 0$ και (ζ): $4x + 3y + 10 = 0$. Να βρεθεί η μεσοπαράλληλη των ευθειών (ε) και (ζ).
15. Οι ευθείες $\varepsilon: (\lambda - 1)x + \lambda y + 1 - 3\lambda = 0$ και $\zeta: (4 - \lambda)x + (6 - \lambda)y - \lambda = 0$ είναι παράλληλες. Να βρείτε:
 - a. Τον αριθμό λ
 - b. Ευθεία η ώστε η η να είναι η μεσοπαράλληλη των ε και ζ
16. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία (ε): $6x + 8y - 7 = 0$ και απέχουν από το σημείο $A(1,2)$ απόσταση $d = 3$.

17. Δίνονται οι ευθείες (ε): $x-3y-2=0$ και (ζ): $x-3y-5=0$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (η) της οποίας η απόσταση από την (ε) είναι διπλάσια από την απόστασή της από τη (ζ).
18. Δίνονται τα σημεία A(-2,1) B(3,4) και Γ(1,-6) . Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
19. Δίνονται τα σημεία A(8,3) Και B(6,-1). Να βρείτε σημείο Γ του άξονα x'x ώστε το τρίγωνο ABΓ να έχει εμβαδόν Και B(6,-1)7 τ.μ.
20. Θεωρούμε τα σημεία A(2,-1) και B(4,5) και έστω Γ σημείο της ευθείας ε: $2x-y-1=0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ ώστε το τρίγωνο ABΓ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.
21. Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι $\vec{AB} = (2,5)$ και $\vec{BG} = (4,9)$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.
22. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με A(-3,4) , B(-1,0) και Γ(3,2) .
- Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου
 - Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου
 - Να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας B του τριγώνου
 - Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές
23. Η ευθεία (ε): $3x+4y-5=0$ είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών (ζ) και (η) . των Οποίων η απόσταση είναι 10. Να βρεθούν οι εξισώσεις των (ζ) και (η).
24. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των ευθειών
 (ε): $(\lambda+2)x + (\lambda-3)y + \lambda^2 - 2 = 0$
 (ζ): $(\lambda-4)x + (\lambda+5)y + \lambda^2 - 12 = 0$
- κινείται σε σταθερή ευθεία , η οποία απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση d=1.
25. Δίνεται η ευθεία ε: $x+2y-6=0$. Να βρείτε
- Τη μικρότερη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων
 - Ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο M(2,-3)
26. Δίνονται τα σημεία A(-2,4) και B(8,-1) .
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων
 - Έστω ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B. Να βρείτε :
 - Την εξίσωση της ευθείας ε
 - Ποιο σημείο της ευθείας ε απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο Γ(5,3)
27. Θεωρούμε τα σημεία M($\lambda-4$, $3\lambda-2$) με $\lambda \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα σημεία M κινούνται σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση
 - Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων

28. Οι ευθείες $\varepsilon: \lambda x + (\lambda - 1)y - 5 = 0$ και $\zeta: (\lambda + 1)x - (\lambda + 4)y - 15 = 0$ είναι κάθετες . Να βρείτε:
- Τον αριθμό λ
 - Σημείο τομής των ευθειών ε και ζ
 - Την ελάχιστη απόσταση που απέχει ένα σημείο της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων O , καθώς και ποιο είναι το σημείο αυτό ;

Γενικές ασκήσεις στην ευθεία

- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2,3)$ $B(-2,5)$ και $\Gamma(-4,-3)$
 - Να βρείτε την εξίσωση του ύψους BE
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $BE\Gamma$
- Θεωρούμε τα σημεία $A(1,2)$ $B(5,5)$ και $\Gamma(7,3)$ του επιπέδου
 - Να αποδείξετε ότι τα A,B και Γ δεν είναι συνευθειακά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του $AB\Gamma$
 - Να προσδιορίσετε τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{BT}$ με τον άξονα $x'x$
 - Να προσδιορίσετε σημείο Δ του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο
 - Αν $\Delta(3,0)$ τότε να υπολογίσετε την απόσταση του Δ από την ευθεία AB
- Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$ και $B(8,-4)$. Ευθεία κάθετη στην AB στο A τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$ στο σημείο Γ .
 - Να βρείτε το μήκος του τμήματος AB και τις εξισώσεις των ευθειών AB και $A\Gamma$
 - Να δείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(6,10)$ και ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
 - Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου από την κορυφή A
- Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(3,4)$ και $\Gamma(-4,7)$
 - Να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου
 - Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο
 - Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$
 - Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία $A\Gamma$
- Δίνονται τα σημεία $A(0,0)$, $B(6,0)$ και $\Gamma(4,3)$ του καρτεσιανού επιπέδου
 - Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$ που σχηματίζεται από τα παραπάνω σημεία A,B,Γ

- b) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του τριγώνου ABΓ που άγεται από την κορυφή Γ
- c) Να βρεθεί η απόσταση της κορυφής Α του τριγώνου από την πλευρά του ΒΓ
- d) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
6. Θεωρούμε δύο σημεία τα B(-3,7) και Γ(3,1) και τις ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y + 2 = 0$ $\varepsilon_2: 2x + y - 7 = 0$ που τέμνονται στο σημείο Α. Να βρείτε :
- a) Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ΒΓ
- b) Τις συντεταγμένες του σημείου Α
- c) Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ABΓ και τη γωνία των ευθειών ΑΜ και ΒΓ
7. Θεωρούμε ευθεία ε η οποία τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Α(2,0) και Β(0,-3) αντίστοιχα
- a) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας ε είναι $\eta: \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$
- b) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ε με τους άξονες x'x και y'y
- c) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ της ευθείας ε που απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων Ο(0,0)
8. Δίνεται η εξίσωση $(\kappa - 2)x + (\kappa + 1)y + \kappa = 0$
- a) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε να παριστάνει ευθεία
- b) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία αυτή να είναι παράλληλη στον y'y
- c) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων
9. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία Α(-1,0) , Β(3,2) και Γ(-3,4)
- a) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ
- b) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΓ (ε_1)
- c) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη στην ευθεία ΒΓ και διέρχεται από το σημείο Α
- d) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
10. Δίνεται η εξίσωση $(3\alpha + 1)x + (2\alpha - 2)y + 7\alpha + 5 = 0$ (1)
- a) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- b) Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζεται από την εξίσωση (1) , διέρχονται από το ίδιο σημείο Α.
- c) Για $\alpha=0$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην (1) στο σημείο Α

- d) Να βρείτε τη γωνία ω που σχηματίζει με τον $x'x$ η ευθεία (1) για $\alpha = -\frac{1}{3}$ και για $\alpha = 1$
11. Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$ και $B(8,-4)$. Ευθεία κάθετη στην AB στο A , τέμνει την ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$ στο σημείο Γ
- Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB και τις εξισώσεις των ευθειών AB και $A\Gamma$
 - Να δείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(6,10)$ και ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές
 - Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ και να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου του από την κορυφή A
12. Θεωρούμε δύο σημεία τα $B(-3,7)$ και $\Gamma(3,1)$ και τις ευθείες $\varepsilon_1: 2x + y - 7 = 0$ που τέμνονται στο σημείο A . Να βρείτε :
- Τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $B\Gamma$, τη γωνία που σχηματίζει η $B\Gamma$ με τον άξονα $x'x$ και την εξίσωση της $B\Gamma$
 - Τις συντεταγμένες του A
 - Την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$ και την γωνία των ευθειών AM και $B\Gamma$

Διαγώνισμα στην ευθεία

Θέμα 1

A. πότε η εξίσωση $Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει ευθεία;

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος

- i) η ευθεία $y=2x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 2
- ii) για την ευθεία $x=2$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης
- iii) η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(3,5)$ και $B(3,-2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -7
- iv) η ευθεία $y = \sqrt{3}x + 5$ σχηματίζει με τον x' γωνία 60°
- v) το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, A)$ είναι παράλληλο στην $-Ax+By+\Gamma=0$

Θέμα 2

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(2,3)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(4,-3)$

- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του AB και AΓ
- ii) Να βρείτε τις εξισώσεις της διαμέσου του AM και του ύψους του BD
- iii) Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου

Θέμα 3

Δίνονται οι εξισώσεις : $(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda^2 - 1 = 0$ (1)

Και $\lambda x + (2-\lambda)y + \lambda + 4 = 0$ (2)

A. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1)

- i) Παριστάνει ευθεία
- ii) Παριστάνει ευθεία παράλληλα στον x'
- iii) Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον y'
- iv) Παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

B. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθείες οι οποίες διέρχονται από σταθερό σημείο

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 με εξισώσεις τις (1) και (2) αντίστοιχα, είναι παράλληλες

Θέμα 4

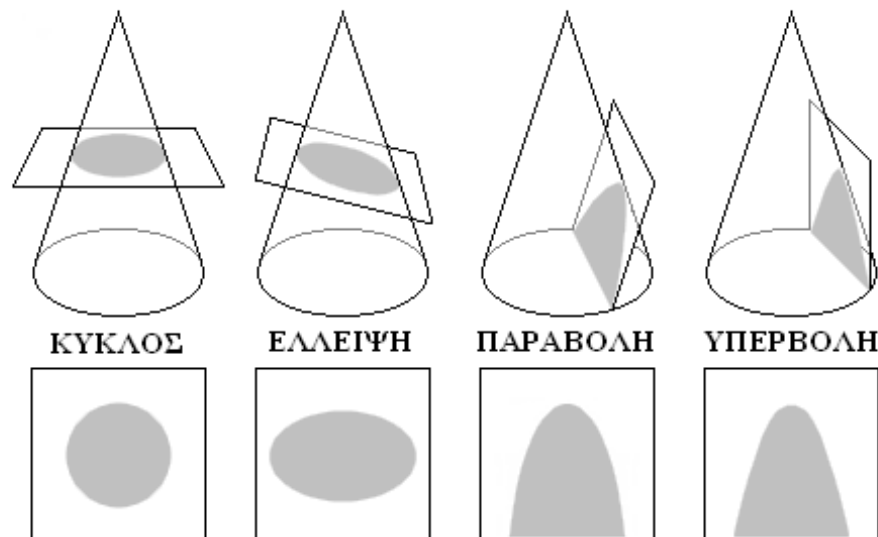
Δίνεται η εξίσωση $6x^2 - y^2 = xy$ (1)

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες τις οποίες και να βρείτε

Β. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B αντιστοίχως ώστε το σημείο M να είναι μέσο του AB

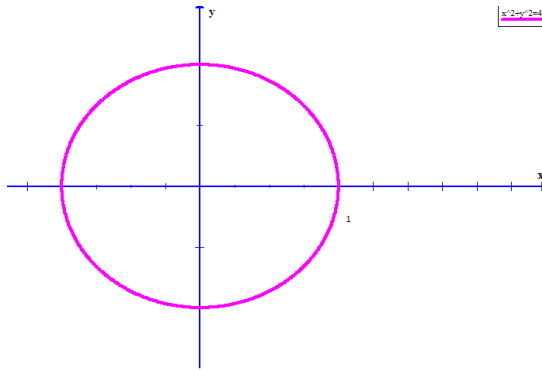
Κωνικές τομές



Κωνικές τομές

κύκλος

1. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση :
- $$x^2 + y^2 = \rho^2$$



Απόδειξη:

Ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο C αν και μόνο αν απέχει από το κέντρο του απόσταση ίση με την ακτίνα του κύκλου
δηλαδή: $(OM)=\rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$
 $\Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι : $xx_1 + yy_1 = \rho^2$

Απόδειξη:

Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$

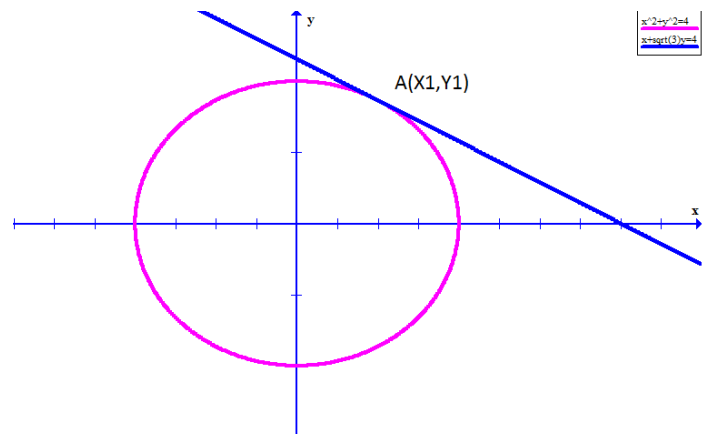
Γνωρίζουμε ότι ένα σημείο $M(x,y)$ ανήκει στη ευθεία ε , αν και μόνο αν $OA \perp AM$

Δηλαδή αν ισχύει $\vec{OA} \cdot \vec{AM} = 0$ (1)

Όμως $\vec{OA} = (x_1, y_1)$ και $\vec{AM} = (x - x_1, y - y_1)$

Έτσι η (1) γράφεται :

$$\begin{aligned} x_1(x - x_1) + y_1(y - y_1) &= 0 \\ xx_1 + yy_1 &= x_1^2 + y_1^2 \\ xx_1 + yy_1 &= \rho^2, \text{ αφού } x_1^2 + y_1^2 = \rho^2 \end{aligned}$$

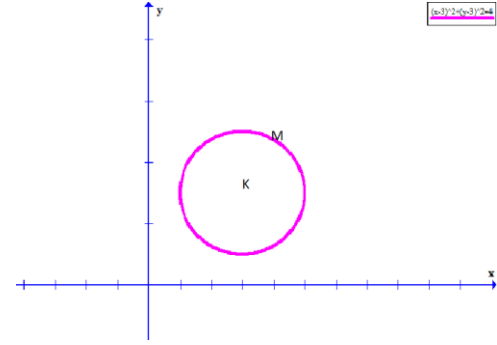


3. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

Απόδειξη :

Το M είναι σημείο του κύκλου αν και μόνο αν απέχει από το $K(x_0, y_0)$ απόσταση ίση με ρ



$$(MK) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \rho \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$$

4. Να αποδειχθεί ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0, \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \quad (1)$$

Και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της μορφής (1) παριστάνει κύκλο

Απόδειξη:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = \rho^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 = 0$$

Οπότε ο κύκλος έχει τη μορφή: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A = -2x_0$ $B = -2y_0$

Και $\Gamma = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2$

Αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$

με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

Με συμπλήρωση τετραγώνου έχουμε:

$$x^2 + 2\frac{A}{2}x + \left(\frac{A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2 + 2\frac{B}{2}y + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + \Gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \Gamma \Leftrightarrow$$

$$\left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - \frac{4\Gamma}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4} \quad (2)$$

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$, η εξίσωση (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$$

- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 0$, η εξίσωση (2) παριστάνει ένα μόνο σημείο το $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$
- Αν $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$, η εξίσωση (2) είναι αδύνατη , δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία $M(x,y)$ που να την επαληθεύουν

Ασκήσεις στον κύκλο

1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και:
 - i) Ακτίνα $\rho=5$
 - ii) Διέρχεται από το σημείο $A(-6,8)$
 - iii) Εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 2x-y+5=0$

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-2,3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1,7)$

3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(-4,1)$ και εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 3x-4y+1=0$

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $A(-2,-1)$ και $B(6,3)$

5. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $K(5,-3)$ και εφάπτεται :
 - i) Στον άξονα $x'x$
 - ii) Στον άξονα $y'y$

6. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση: $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$
 - i) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου
 - ii) Να εξετάσετε ποιά από τα σημεία $M(3,0)$, $N(0,-4)$, $P(3,-7)$ και $\Sigma(1,1)$ είναι σημεία του κύκλου
 - iii) Να εξετάσετε αν το σημείο $O(0,0)$ είναι εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου

7. Να βρείτε τι παριστάνει κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις :
 - i) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$
 - ii) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 = 0$
 - iii) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10 = 0$
 - iv) $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$

8. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ (1)
 - i) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 - ii) Να βρείτε την ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται η διάμετρος του κύκλου που είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta: 2x+y-2013=0$
 - iii) Να βρείτε τα άκρα της παραπάνω διαμέτρου

9. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda + 2)y + \lambda - 1 = 0$ (1)
 - i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

- ii) Να βρείτε για ποιά τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ το κέντρο του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 2x-5y-8=0$
- iii) Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η ακτίνα του κύκλου που παριστάνει η εξίσωση (1) είναι ήση με $2\sqrt{5}$

10. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 6 = 0$ (1)

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
- ii) Να βρείτε το μήκος της χορδής του κύκλου , που έχει μέσο το σημείο $M(2,-1)$
- iii) Να βρείτε τις ευθείες που είναι παράλληλες στη $\zeta: y=3x+2013$ και ορίζουν στον κύκλο χορδές με μήκος 4.

11. Δίνεται κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων , ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(4,-2)$ να βρείτε:

- i) Την εξίσωση του κύκλου
- ii) Την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του A
- iii) Τις εφαπτομένες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 2x+y-2014=0$
- iv) Τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $P(-2,6)$

12. Δίνονται τα σημεία $A(-4,3)$ $B(4,-3)$ να βρείτε :

- i) Την απόσταση (AB) των σημείων A και B
- ii) Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB
- iii) Την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB
- iv) Την εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο σημείο A

13. Δίνεται ο κύκλος με διάμετρο AB όπου $A(0,5)$ και $B(-2,-1)$

- i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου
- ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο $\Gamma(2,3)$ ανήκει στον κύκλο και να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ
- iii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία AB

14. Δίνεται το σημείο $P(-6,-8)$ και η εξίσωση : $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ (1)

- i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
- ii) Να αποδείξετε ότι το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου
- iii) Να βρείτε τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο P

15. Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(-1,3)$ που εφάπτεται στον $x'x$

- i) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου
- ii) Θεωρούμε το σημείο $A(-1,-3)$. Να βρείτε :

- α. Τις εφαπτομένες του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α
 β. Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες

16. Δίνονται οι κύκλοι : $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 10y - 16 = 0$ και

$$C_2: x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$$

- i) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δύο κύκλων
- ii) Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά
- iii) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των κύκλων

17. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$

- i) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου C_1
- ii) Έστω C_2 ο κύκλος που έχει κέντρο $\Lambda(1,4)$ και εφάπτεται εξωτερικά στον κύκλο C_1 .
 Να βρείτε: α) την εξίσωση του κύκλου C_2
 β) το σημείο επαφής Α των κύκλων C_1 και C_2
 γ) την κοινή εφαπτομένη των κύκλων C_1 και C_2 στο Α

18. Δίνονται τα σημεία $A(4,-1)$ και $B(-2,7)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου , για τα οποία το τρίγωνο AMB είναι ορθογώνιο στο Μ

19. Δίνονται τα σημεία : $M(\eta\mu\theta-4, \sigma\upsilon\nu\theta+2)$ με $\theta \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι τα παραπάνω σημεία κινούνται σε κύκλο , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

20. Δίνονται τα σημεία $A(4,-3)$ και $B(-2,-5)$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου , για τα οποία ισχύει : $|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2 = 70$

21. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M\left(\frac{2\lambda}{\lambda^2+2}, \frac{\sqrt{\lambda^4+4}}{\lambda^2+2}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ κινούνται σε ημικόκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων

22. Δίνεται ο κύκλος : $C: x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$ να βρείτε

- i) Το κέντρο και την ακτίνα του
- ii) Την μέγιστη απόσταση που μπορούν να απέχουν δύο σημεία του κύκλου C
- iii) Την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που απέχει το σημείο Α (1,2) από ένα σημείο του κύκλου C

23. Δίνεται ο κύκλος : $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ καθώς και τα σημεία $A(-7,9)$ και $B(9,-3)$. Να βρείτε :

- i) Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου

- ii) Το εμβαδό του τριγώνου KAB
- iii) Την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A και B
- iv) Την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση που μπορεί να απέχει ένα σημείο του κύκλου από την ευθεία ε

24. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής των κύκλων : $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 4$ και $C_2: x^2 + (y+2)^2 = 1$

25. Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 2\lambda(x+2y-5)$ (1) , $\lambda \in \mathbb{R}$

- i) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$
- ii) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1)
- iii) Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

26. A. Δίνονται οι κύκλοι $C_1: x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ και $C_2: x^2 + y^2 = 1$ να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται

B. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x + 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0$ (1) , $\lambda \in \mathbb{R}$

- i. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο
- ii. Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1) διέρχονται από σταθερό σημείο
- iii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1)

27. Έστω P ένα σημείο του κύκλου $C: x^2 + y^2 - 2\lambda x - 5 = 0$.

Αν η ευθεία $\varepsilon: x+y-2=0$ τέμνει τον κύκλο C στα σημεία A και B έτσι ώστε $\widehat{APB} = 90^\circ$

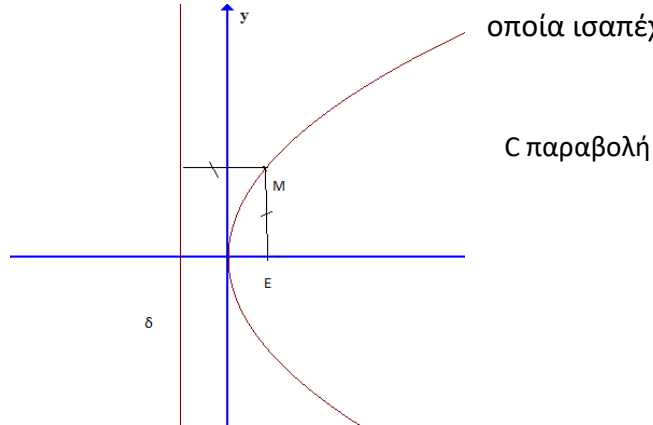
- i. Να βρείτε το λ
- ii. Για $\lambda=2$ να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου C στο σημείο του $\Gamma(1, 2\sqrt{2})$ και μετά στο σημείο του $\Delta(1, -2\sqrt{2})$
- iii. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου, από τα οποία οι εφαπτομένες στον κύκλο είναι κάθετες

3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

1. Τι ονομάζουμε παραβολή;

Απάντηση:

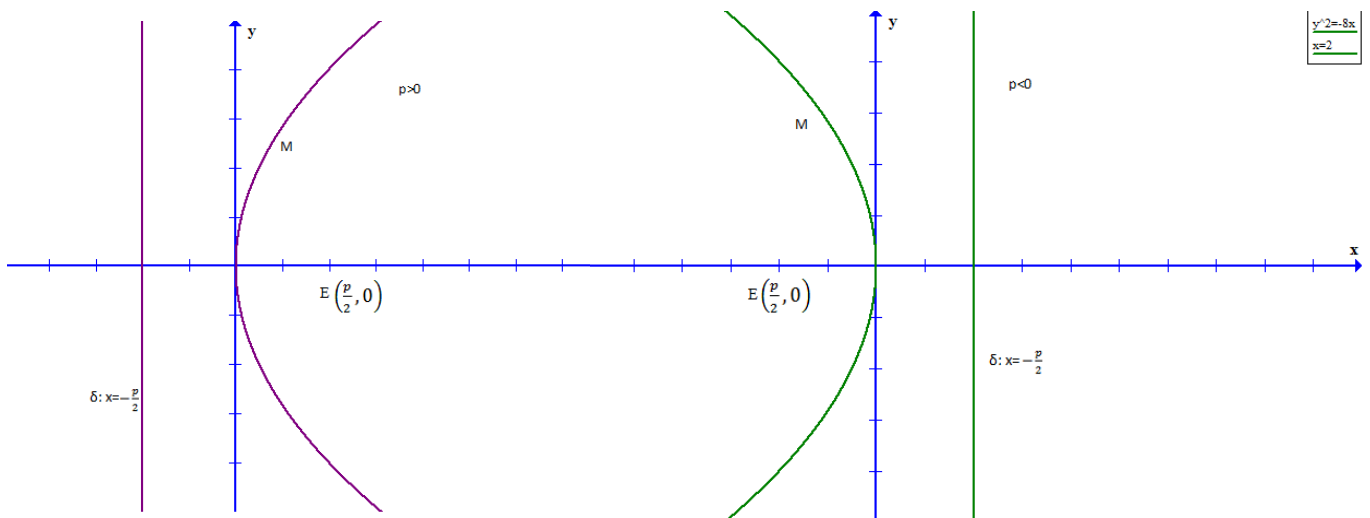
Έστω μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός της δ . Ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα την ευθεία δ ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την E και τη δ



3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα

$\delta: x = -\frac{p}{2}$ Είναι : $y^2 = 2px$

Απόδειξη:



Σύμφωνα με τον ορισμό της παραβολής, ένα σημείο $M(x,y)$ θα ανήκει στη C αν και μόνο αν ισχύει: $d(M, E) = d(M, \delta)$ (1)

Είναι όμως:

$$d(M, E) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \text{ και } d(M, \delta) = \frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

έτσι η σχέση (1) γράφεται διαδοχικά:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

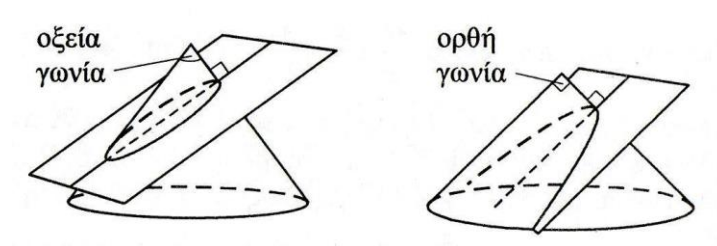
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

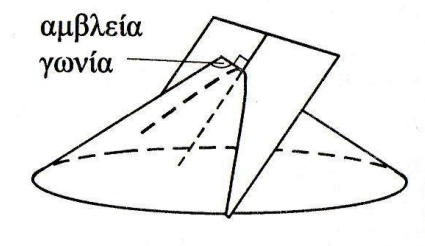
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

$$y^2 = 2px$$

Επομένως η εξίσωση της παραβολής C με εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ είναι

$$y^2 = 2px$$

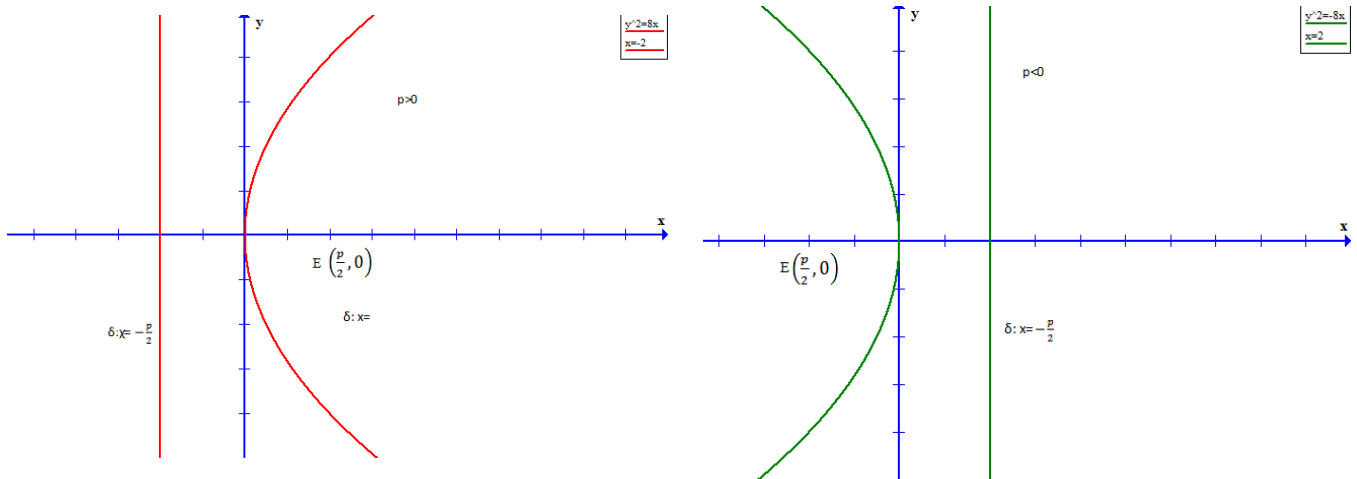




Γενικά ισχύει

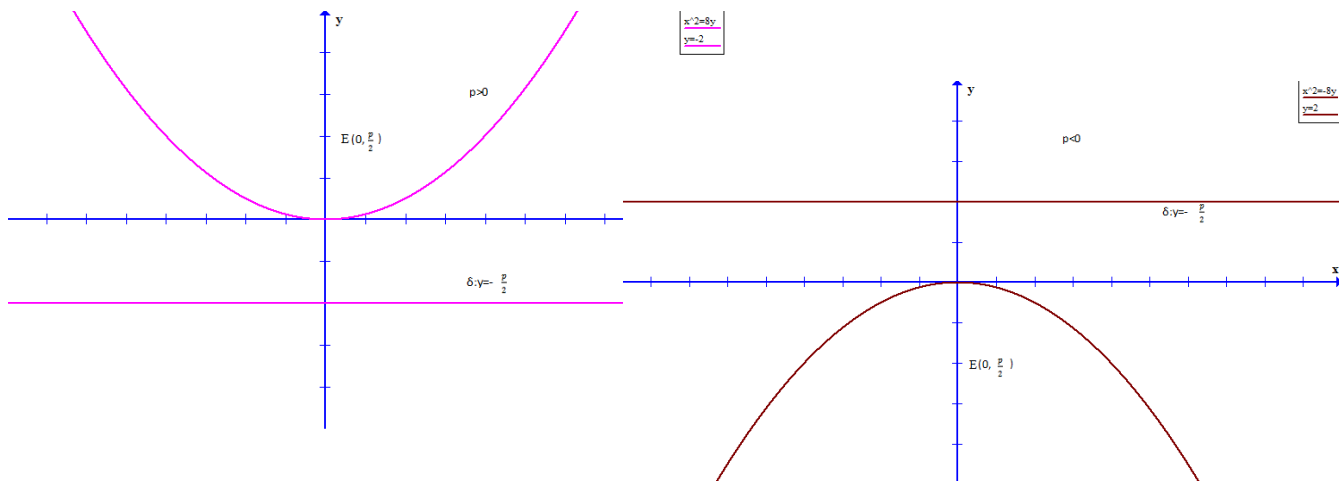
- Η εξίσωση της παραβολής που έχει την εστία της στον άξονα $x'x$ είναι:

$$y^2 = 2px$$



- Η εξίσωση της παραβολής που έχει την εστία της στον $y'y$ είναι :

$$x^2 = 2py$$



Ιδιότητες της παραβολής:

Έστω η παραβολή: $y^2 = 2px$ (1)

- Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι τα p και x είναι ομόσημα . Άρα κάθε φορά η παραβολή βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία E

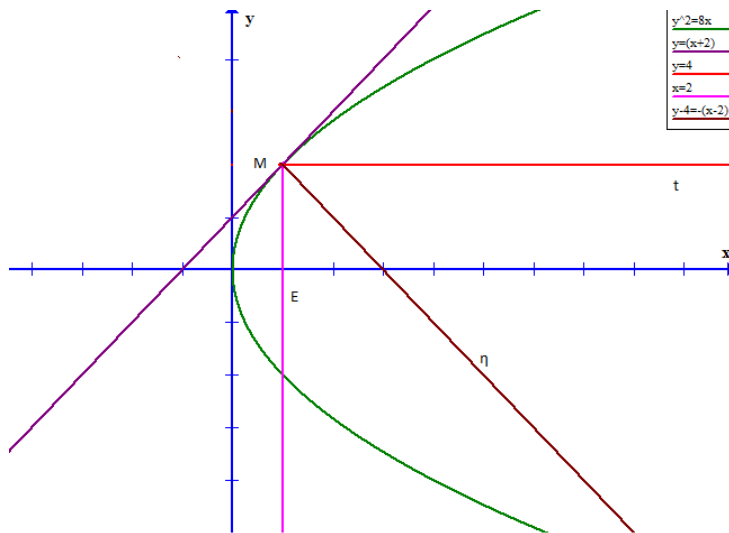
- Αν το σημείο $M_1(x_1, y_1)$ είναι σημείο της παραβολής τότε και το σημείο $M_2(x_2, y_2)$ είναι σημείο της παραβολής. Αυτό σημαίνει ότι ο άξονας $\chi'\chi$ είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής

4. Η εφαπτομένη της παραβολής: $y^2 = 2px$ είναι $yy_1 = p(x + x_1)$

Η εφαπτομένη της παραβολής: $x^2 = 2py$ είναι $xx_1 = p(y + y_1)$

5. Η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας παραβολής στο σημείο επαφής M_1 διχοτομεί την γωνία που σχηματίζουν η ημιευθεία M_1E και η ημιευθεία M_1t , που είναι ομόροπη της OE , όπου E είναι η εστία της παραβολής



Ασκήσεις στην παραβολή

1. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα x' σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :
 - i. Όταν έχει εστία το σημείο $E(5,0)$
 - ii. Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $x=1$
 - iii. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$

2. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y' σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :
 - i. Όταν έχει εστία το σημείο $E(0,3)$
 - ii. Όταν έχει διευθετούσα την ευθεία $2y-1=0$
 - iii. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(2,1)$

3. Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση:

$$i) y^2 = -4x \quad ii) y = \frac{1}{2} x^2 \quad iii) y^2 = -12x \quad iv) x^2 = -24y$$

4. Έστω C η παραβολή που έχει αρχή την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ άξονα συμμετρίας τον y' και διέρχεται από το σημείο $A(4,2)$. Να βρείτε :
 - i. Την εξίσωση της παραβολής C
 - ii. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής C
 - iii. Τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σημείο : $M(2\lambda+3, \lambda+1)$ να ανήκει στην παραβολή C

5. Να βρείτε την εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2x$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :
 - i. Όταν έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-2$
 - ii. Όταν διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$
 - iii. Όταν διέρχεται από το σημείο $B(0,1)$

6. Δίνεται η παραβολή $C: x = \frac{1}{4}y^2$, να βρείτε :
 - i. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $y=-3x+2013$
 - ii. Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που διέρχονται από το σημείο $M(-2,1)$

7. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$ με $p>0$. Η εστία E της C απέχει από τη διευθετούσα της δ απόσταση ίση με 4. Να βρείτε :
 - i. Την εστία E και τη διευθετούσα δ της παραβολής

- ii. Την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της με τεταγμένη -4
8. Δίνεται η παραβολή $C: x = \frac{1}{6}y^2$, να βρείτε :
- Την εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A\left(\frac{1}{6}, -1\right)$
 - Την εφαπτομένη της παραβολής που σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$
 - Τις εφαπτομένες της παραβολής που διέρχονται από το σημείο $M(10,8)$
9. Δίνεται η παραβολή C η οποία έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Να βρείτε :
- Την εξίσωση της παραβολής
 - Τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραβολής στο A , με τον $x'x$
 - Τις εφαπτομένες της παραβολής που σχηματίζουν με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ τρίγωνο με εμβαδόν 8 τ.μ
10. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες της παραβολής $C_1: y^2 = 5x$ και του κύκλου $C_2: x^2 + y^2 = 5$
11. Δίνεται η παραβολή $C_1: y^2 = 8x$ και ο κύκλος C_2 με κέντρο την εστία E της παραβολής, ο οποίος διέρχεται από το σημείο $B(4,2)$. Να βρείτε:
- Την εξίσωση του κύκλου C_2
 - Τις κοινές εφαπτομένες των C_1 και C_2
12. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 8x$
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ πάνω στην οποία βρίσκεται η χορδή της παραβολής C που έχει μέσο το σημείο $M(2,-3)$
 - Αν O είναι η αρχή των αξόνων και E είναι η εστία της παραβολής C , να υπολογίσετε το άθροισμα $d(O,\zeta)+d(E,\zeta)$
13. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$. Έστω E η εστία της και $M(x_1, y_1)$ ένα τυχαίο σημείο της διαφορετικό από την κορυφή της $O(0,0)$. Έστω επίσης ε η εφαπτομένη της C στο M και ζ η ευθεία που είναι κάθετη στην ε στο σημείο M . Αν οι ευθείες ε και ζ τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το E είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB
14. Δίνεται η παραβολή $C: y^2 = 2px$, η εστία της E και οι εφαπτομένες της ε_1 και ε_2 σε δύο σημεία της $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ αντίστοιχα. Αν οι ε_1 και ε_2 τέμνονται στο σημείο M και N είναι το μέσο του AB , τότε :
- Να γράψετε τις συντεταγμένες του σημείου M συναρτήσει των y_1, y_2 και p

- ii. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{MN} // \chi'\chi$
- iii. Το μέσο του τμήματος MN ανήκει στην παραβολή C
- iv. Να αποδείξετε ότι : $(EM)^2 = (EA) \cdot (EB)$

15. Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 4x$

- i. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της παραβολής C στο σημείο της A(1,λ), λ>0
- ii. Αν η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο M , να βρείτε την άλλη εφαπτομένη της παραβολής C που διέρχεται από το M

16. Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 2px$.

Αν το σημείο A(1,λ) , λ>0 είναι κοινό σημείο των C_1 και C_2 τότε :

- i. Να βρείτε τα λ και p
- ii. Να βρείτε το άλλο κοινό σημείο των C_1 και C_2
- iii. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C_2 στο A εφάπτεται στον κύκλο C_1 και μετά να βρείτε την άλλη κοινή εφαπτομένη στο άλλο κοινό τους σημείο .

17. Δίνεται η παραβολή C που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων , άξονα συμμετρίας τον $y'y$ και εστία $E\left(0, \frac{1}{2}\right)$

- i. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής
- ii. Θεωρούμε τα σημεία A και B της διευθετούσας της παραβολής C με τετμημένες 2 και 7 αντίστοιχα . Έστω επίσης ζ η ευθεία που διέρχεται από το B και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{AE}$. Να βρείτε:
 - a) Την εξίσωση της ευθείας ζ
 - b) Τα σημεία τομής Γ και Δ της ευθείας ζ με την παραβολή C
 - c) Τις εφαπτομένες ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία Γ και Δ
 - d) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι παραπάνω εφαπτομένες ε_1 και ε_2

3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

1. Να δοθεί ο ορισμός της έλλειψης

Απάντηση:

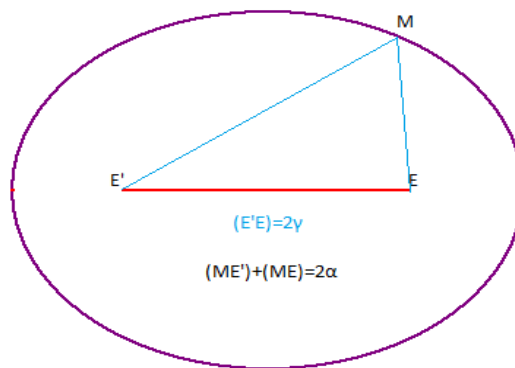
Έστω E και E' δυο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από τα E και E' είναι σταθερό και μεγαλύτερο του EE'

Το σταθερό αυτό άθροισμα το συμβολίζουμε με 2α και την απόσταση των εστιών E' και E με 2γ

Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται εστιακή απόσταση

Σύμφωνα με τον ορισμό έχουμε :

α) Ένα σημείο M του



Επιπέδου ανήκει στην έλλειψη, αν και μόνο αν $(ME')+(ME)=2\alpha$

β) Ισχύει $(E'E) < (ME') + (ME)$ δηλαδή $2\gamma < 2\alpha$ οπότε $\gamma < \alpha$

αν $\gamma=0$ τότε τα σημεία E' και E συμπίπτουν οπότε η έλλειψη γίνεται κύκλος

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

Απόδειξη:

- Έστω μια έλλειψη C με εστίες E' και E . Θα βρούμε την εξίσωση της έλλειψης ως προς σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των x την ευθεία $E'E$ και άξονα των y τη μεσοκάθετο του $E'E$.

Αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης C , τότε θα ισχύει

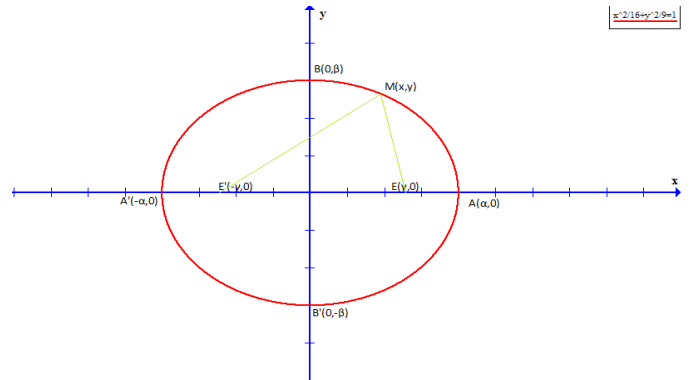
$$(ME') + (ME) = 2\alpha. \quad (1)$$

Επειδή $(E'E) = 2\gamma$, οι εστίες E' και E θα έχουν συντεταγμένες $(-\gamma, 0)$ και $(\gamma, 0)$ αντιστοίχως.

Επομένως,

$$(ME') = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} \quad \text{και}$$

$$(ME) = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}.$$



Έτσι, η σχέση (1) γράφεται

$$\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha,$$

από την οποία έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} = 2\alpha - \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$$

$$(x+\gamma)^2 + y^2 = 4\alpha^2 + (x-\gamma)^2 + y^2 - 4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$$

$$x^2 + \gamma^2 + 2\gamma x + y^2 = 4\alpha^2 + x^2 + \gamma^2 - 2\gamma x + y^2 - 4\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$$

$$\alpha\sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = \alpha^2 - \gamma x \quad (2)$$

$$\alpha^2(x^2 + \gamma^2 - 2\gamma x + y^2) = (\alpha^2 - \gamma x)^2$$

$$\alpha^2 x^2 + \alpha^2 \gamma^2 - 2\alpha^2 \gamma x + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 + \gamma^2 x^2 - 2\alpha^2 \gamma x$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1. \quad (3)$$

Επειδή $\alpha > \gamma$, είναι $\alpha^2 - \gamma^2 > 0$, οπότε αν θέσουμε, $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ η εξίσωση (3) παίρνει τη μορφή

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \quad (4)$$

Αποδεικνύεται και το *αντίστροφο*, δηλαδή ότι κάθε σημείο $M(x,y)$, του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν την εξίσωση (4), είναι σημείο της έλλειψης C .

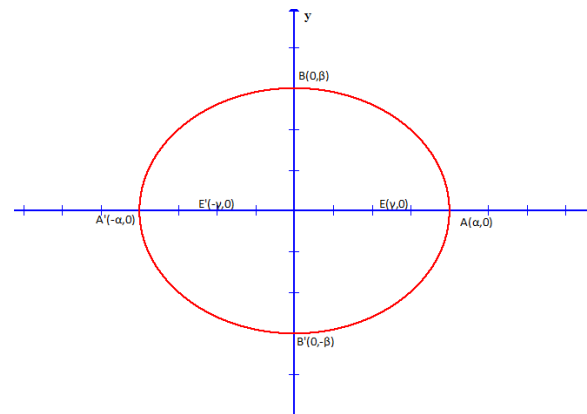
Επομένως, η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\boxed{\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}}$$

Παρατήρηση:

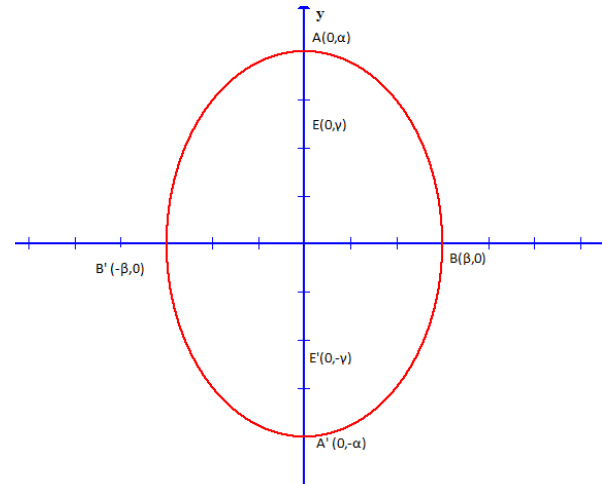
- η εξίσωση της έλλειψης C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερό άθροισμα 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$



- η εξίσωση της έλλειψης C εστίες τα σημεία $E'(0, -\gamma)$, $E(0, \gamma)$ είναι

$$\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

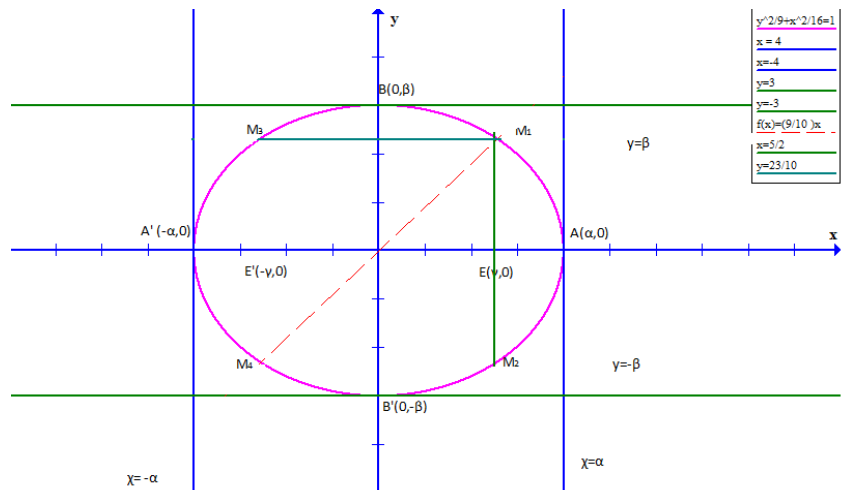


3. Να περιγραφούν οι ιδιότητες Έλλειψης

Έστω μια έλλειψη

$$C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$$

- Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης C , τότε τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ ανήκουν στην C
- η έλλειψη έχει τους $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας.
- η ευθεία που ενώνει τις εστίες E', E της έλλειψης και η μεσοκάθετος του $E'E$ είναι άξονες συμμετρίας της έλλειψης,
- Το σημείο O λέγεται **κέντρο** της έλλειψης.
- η έλλειψη C τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha, 0)$ και $A(\alpha, 0)$, ενώ τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B'(0, -\beta)$ και $B(0, \beta)$ τα οποία λέγονται **κορυφές** της έλλειψης
- $(A'A) = 2\alpha$ λέγεται **μεγάλος άξονας** και $(B'B) = 2\beta$, **μικρός άξονας**.



- Το ευθύγραμμο τμήμα που ορίζουν δύο οποιαδήποτε συμμετρικά ως προς O σημεία M_1 και M_4 της έλλειψης λέγεται **διάμετρος** της έλλειψης. Αποδεικνύεται ότι

$$2\beta \leq (M_1 M_4) \leq 2\alpha,$$

δηλαδή ότι κάθε διάμετρος της έλλειψης είναι μεγαλύτερη ή ίση από το μικρό άξονα και μικρότερη ή ίση από το μεγάλο άξονα της έλλειψης.

- Τέλος, από την εξίσωση της έλλειψης, έχουμε

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2} \leq 1$$

Οπότε $x^2 - \alpha^2 \leq 0$ και άρα $-\alpha \leq x \leq \alpha$.

Ομοίως $-\beta \leq y \leq \beta$.

Άρα, η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο που ορίζουν οι ευθείες $x = -\alpha$, $x = \alpha$ και $y = -\beta$, $y = \beta$.

4. Τι ονομάζουμε Εκκεντρότητα Έλλειψης και τι καθορίζει;

Μια παράμετρος που καθορίζει τη μορφή της έλλειψης είναι η εκκεντρότητα της έλλειψης.

Ορισμός: Ονομάζουμε **εκκεντρότητα** της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τη συμβολίζουμε με ε , το

λόγο $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1$.

Επειδή $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, είναι $\varepsilon = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}$, οπότε $\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ και άρα

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (1)$$

Παρατήρηση:

- Όσο μεγαλώνει η εκκεντρότητα τόσο μικραίνει ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ και κατά συνέπεια τόσο **πιο επιμήκης** γίνεται η έλλειψη
- Όταν το ε **τείνει στο μηδέν**, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ **τείνει στο 1** και επομένως η έλλειψη **τείνει να γίνει κύκλος**.

- Όταν, όμως, το ε τείνει στη μονάδα, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ τείνει στο 0 και επομένως η έλλειψη τείνει να εκφυλιστεί σε **ευθύγραμμο τμήμα**.
- Οι ελλείψεις που έχουν την ίδια εκκεντρότητα, άρα ίδιο λόγο $\frac{\beta}{\alpha}$, λέγονται **όμοιες**

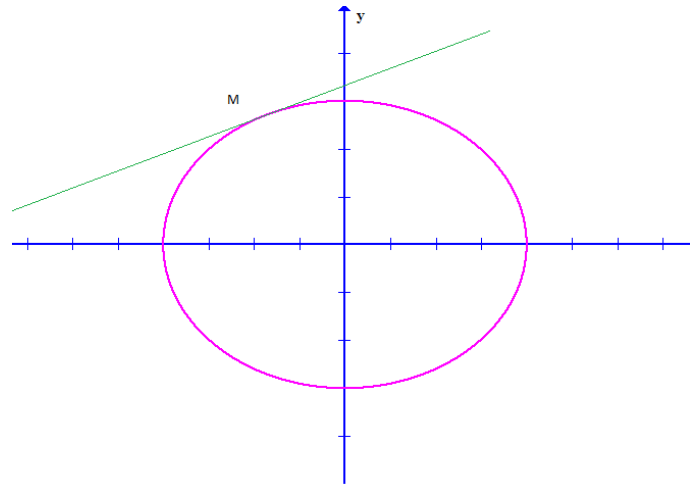
5. Να γραφεί η εξίσωση της Εφαπτομένης της Έλλειψης

- Έστω μια έλλειψη C με εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

και ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Η **εφαπτομένη** της έλλειψης C στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$$



- Αν μια έλλειψη έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1,$$

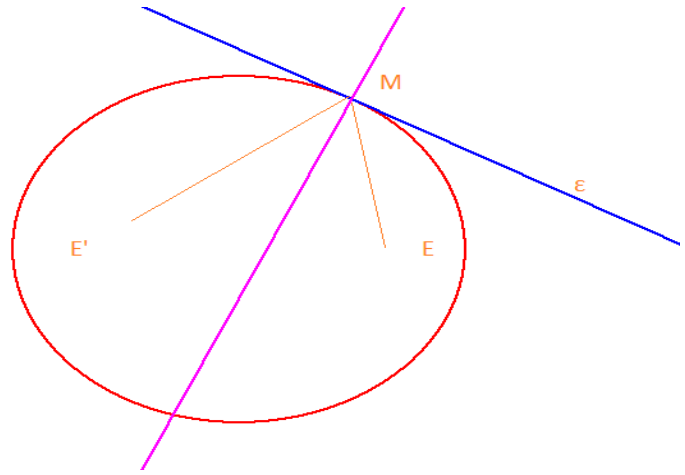
τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$\frac{yy_1}{\alpha^2} + \frac{xx_1}{\beta^2} = 1.$$

Η ανακλαστική ιδιότητα της έλλειψης

- Όπως η παραβολή έτσι και η έλλειψη έχει ανάλογη ανακλαστική ιδιότητα. Συγκεκριμένα:

Η κάθετη στην εφαπτομένη μιας έλλειψης στο σημείο επαφής M διχοτομεί τη γωνία $E' \hat{M} E$, όπου E', E οι εστίες της έλλειψης



Ασκήσεις στην έλλειψη

1. Για κάθε μία από τις παρακάτω ελλείψεις να βρείτε τις εστίες τα μήκη του μικρού και του μεγάλου άξονα , την εκκεντρότητα και τις κορυφές:

$$\text{i) } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{ii) } x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{iii) } 3x^2 + 2y^2 = 24 \quad \text{iv) } x^2 + 50y^2 = 50$$

$$\text{v) } 4x^2 + 12y^2 = 1$$

2. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ και μήκος μεγάλου άξονα 10
- ii. Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-4)$ και $E(0,4)$ και μήκος μικρού άξονα 6
- iii. Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-2)$ και $E(0,2)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{4}{5}$
- iv. Όταν έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων , εστίες στον άξονα $x'x$, μήκος μικρού άξονα 16 και μήκος μεγάλου άξονα 20

3. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. Έχει κέντρο την αρχή των αξόνων , εστίες $E'(0,-\sqrt{3})$ και $E(0, \sqrt{3})$ και διέρχεται από το σημείο $M(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$
- ii. Έχει κέντρο την αρχή των αξόνων , εστίες στον άξονα $x'x$ και κορυφές τα σημεία $A'(-4,0)$, $A(4,0)$, $B'(0,-3)$ και $B(0,3)$
- iii. Έχει κέντρο την αρχή των αξόνων , εστίες στον άξονα $x'x$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(4, -\sqrt{3})$ και $M_2(2\sqrt{2}, 3)$

4. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C που έχει κέντρο το σημείο O εστίες στον άξονα $y'y$, εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $A(\frac{1}{3}, 2\sqrt{2})$

5. Δίνεται η έλλειψη με εστίες $E'(0,-8)$ και $E(0,8)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ να βρείτε:

- i. Την εξίσωση της έλλειψης
- ii. Τις εφαπτομένες της έλλειψης στα σημεία με τετμημένη 2
- iii. Τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες εφαπτομένες της έλλειψης

6. Δίνεται η έλλειψη C με εστίες $E'(0, -2\sqrt{11})$ και $E(0, 2\sqrt{11})$ και μήκος μεγάλου άξονα $8\sqrt{3}$. Να βρείτε :

- i. Την εξίσωση της έλλειψης C
- ii. Τις εφαπτομένες της έλλειψης που είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 6x-3y+2013=0$
- iii. Τις εφαπτομένες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο $P(2,4)$

7. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $C: x^2 + 4y^2 = 10$ Που

ii. Έχουν συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{3}{2}$

iii. Διέρχονται από το σημείο $M(4,1)$

iv. Διέρχονται από το σημείο $N\left(\sqrt{10}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

8. Δίνεται η έλλειψη $C: 4x^2 + 9y^2 = 36$

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της C στο σημείο της $M(\sqrt{5}, \mu)$
 $\mu < 0$

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης που διέρχεται από το σημείο τομής της C

a) Με τον άξονα $x'x$

b) Με τον άξονα $y'y$

c) Με την ευθεία $y=x$

9. Έστω $M(x,y)$ ένα σημείο της έλλειψης $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Να αποδείξετε ότι :

i. $(ME')^2 - (ME)^2 = 4\gamma x$

ii. $(ME') - (ME) = 2\epsilon x$

iii. $(ME') = \alpha + \epsilon x$ και $(ME) = \alpha - \epsilon x$

10. Έστω τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M ώστε

$$|ME'| + |ME| = 10$$

11. Να δείξετε ότι το σημείο $M(2\sin t, 3\eta\mu t)$, $t \in \mathbb{R}$ ανήκει σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εκκεντρότητα

12. Έστω η έλλειψη C με εστίες $E'(0,-3)$ και $E(0,3)$ που είναι όμοια με την έλλειψη $C: 16x^2 + 25y^2 = 400$

i. Να βρείτε την εξίσωση της C

ii. Την εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(1,\lambda)$, $\lambda < 0$

iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$ όπου M το σημείο του ερωτήματος (ii)

13. Δίνεται η έλλειψη C με εστίες στον άξονα $x'x$ και συμμετρικές ως προς το O . Η εφαπτομένη της C στο σημείο της $M(2,1)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x-y+1=0$

i. Να βρείτε την εξίσωση της C

- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C που διέρχεται από το σημείο M(3,0)
- iii. Αν το M_1M_2 είναι διάμετρος της έλλειψης, να δείξετε ότι :

$$2\sqrt{3} \leq (M_1M_2) \leq 2\sqrt{6}$$

14. Έστω τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και C ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M για

$$\text{τα οποία ισχύει : } \frac{1}{(ME')} + \frac{1}{(ME)} = \frac{26}{(ME') \cdot (ME)}$$

- i. Να βρείτε την εξίσωση της C
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το σημείο M(-2,1)
- iii. Να βρείτε την μεγαλύτερη δυνατή απόσταση που μπορούν να απέχουν μεταξύ τους δύο σημεία του C. Ποιά είναι τα σημεία αυτά ;

15. Δίνεται η έλλειψη C_1 με εστίες $E_1'(-1,0)$ και $E_1(1,0)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{1}{2}$

- i. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης
- ii. Να βρείτε τις εφαπτομένες της έλλειψης που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: 2x - y + 2013$
- iii. Αν το σημείο $N(\alpha, \beta)$ κινείται στην έλλειψη C_1 να αποδείξετε ότι το σημείο M για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{ON}$ κινείται σε έλλειψη C_2 , της οποίας να βρείτε το τις εστίες και την εκκεντρότητα

16. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου : $M(4\cos\phi, 5\sin\phi)$, με $\phi \in [0, 2\pi)$

- i. Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη της οποίας να βρείτε την εξίσωση
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο : $M(4\cos\phi, 5\sin\phi)$, με $\phi \in (0, 2\pi)$
- iii. Έστω $E(\phi)$, $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο : $M(4\cos\phi, 5\sin\phi)$ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Να αποδείξετε ότι $E(\phi) \geq 20$

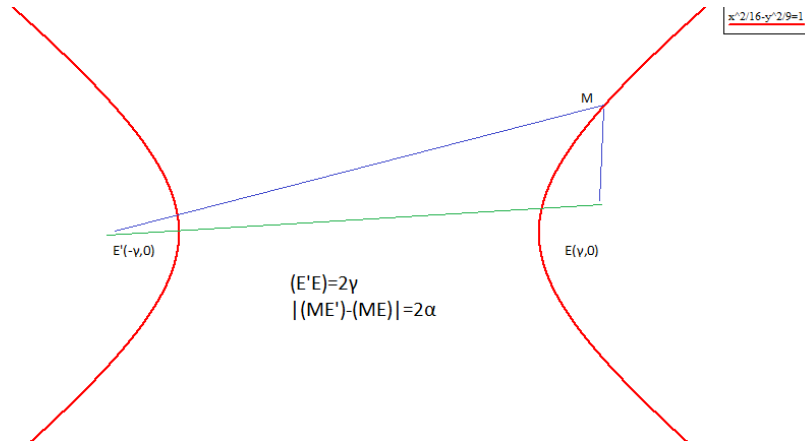
3.4 Υπερβολή

1. Να δοθεί ο ορισμός της υπερβολής

Απάντηση:

Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Ονομάζεται **υπερβολή** με εστίες τα σημεία E' και E ο γεωμετρικός τόπος C των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από τα E' και E είναι σταθερή και μικρότερη του $(E'E)$.

- Την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων κάθε σημείου της υπερβολής από τις εστίες την παριστάνουμε συνήθως με 2α ,
- ενώ την απόσταση των εστιών με 2γ .
- Η απόσταση $E'E$ ονομάζεται **εστιακή απόσταση** της υπερβολής.



Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό:

α) Ένα σημείο M είναι σημείο της υπερβολής, αν και μόνο αν $|(ME') - (ME)| = 2\alpha$.

β) Ισχύει $|(ME') - (ME)| < (E'E)$ δηλαδή $2\alpha < 2\gamma$, οπότε $\alpha < \gamma$

2. Να αποδείξετε ότι η Εξίσωση της Υπερβολής που έχει εστίες στον $\chi'\chi$ είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$$

Απόδειξη:

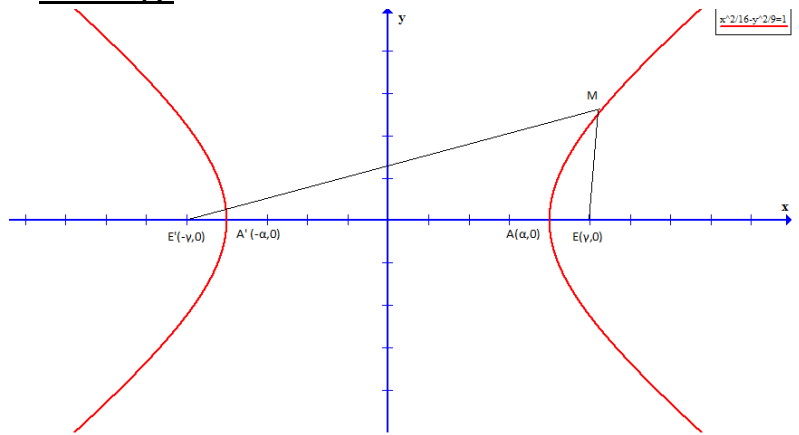
- Έστω C μια υπερβολή με εστίες E' και E .

Αν $M(x,y)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής C , τότε θα ισχύει

$$|(ME') - (ME)| = 2\alpha,$$

(1)

Επειδή $(E'E) = 2\gamma$, οι εστίες E' και E θα έχουν συντεταγμένες $(-\gamma, 0)$ και $(\gamma, 0)$ αντιστοίχως. Επομένως,



$$(ME') = \sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} \quad \text{και} \quad (ME) = \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}$$

Έτσι η σχέση (1) γράφεται

$$|\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} - \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}| = 2\alpha$$

από την οποία έχουμε διαδοχικά:

$$(x+\gamma)^2 + y^2 + (x-\gamma)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = 4\alpha^2$$

$$\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2} = x^2 + y^2 + \gamma^2 - 2\alpha^2$$

$$[(x^2 + y^2 + \gamma^2) + 2\gamma x] \cdot [(x^2 + y^2 + \gamma^2) - 2\gamma x] = [(x^2 + y^2 + \gamma^2) - 2\alpha^2]^2$$

$$(x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 - 4\gamma^2 x^2 = (x^2 + y^2 + \gamma^2)^2 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2(x^2 + y^2 + \gamma^2)$$

$$\alpha^2 x^2 - \gamma^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^4 - \alpha^2 \gamma^2$$

$$(\alpha^2 - \gamma^2)x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2(\alpha^2 - \gamma^2)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\gamma^2 - \alpha^2} = 1. \quad (1)$$

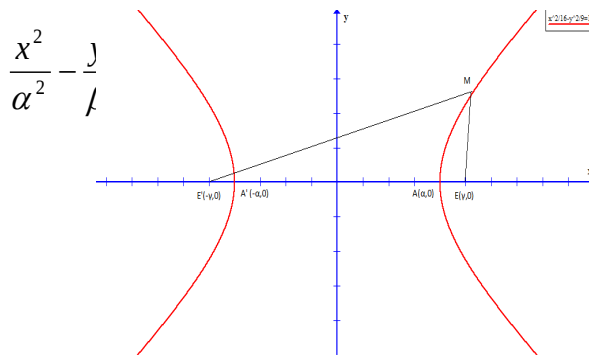
Επειδή $\gamma > \alpha$, είναι $\gamma^2 - \alpha^2 > 0$, οπότε, αν θέσουμε $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$, η εξίσωση (1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1. \quad (2)$$

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο

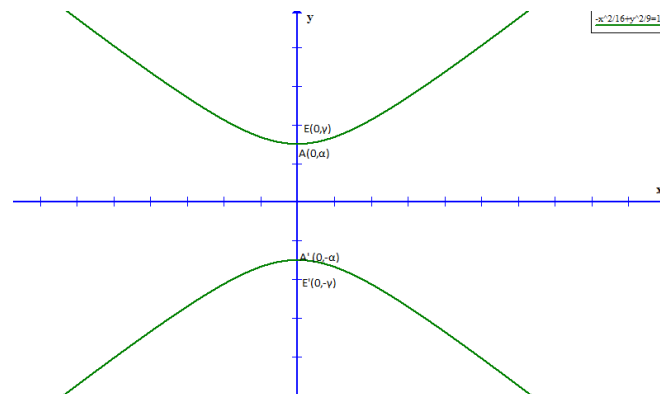
Παρατήρηση:

- Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$, και σταθερή διαφορά 2α είναι



- Η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες στον $y'y$ είναι:

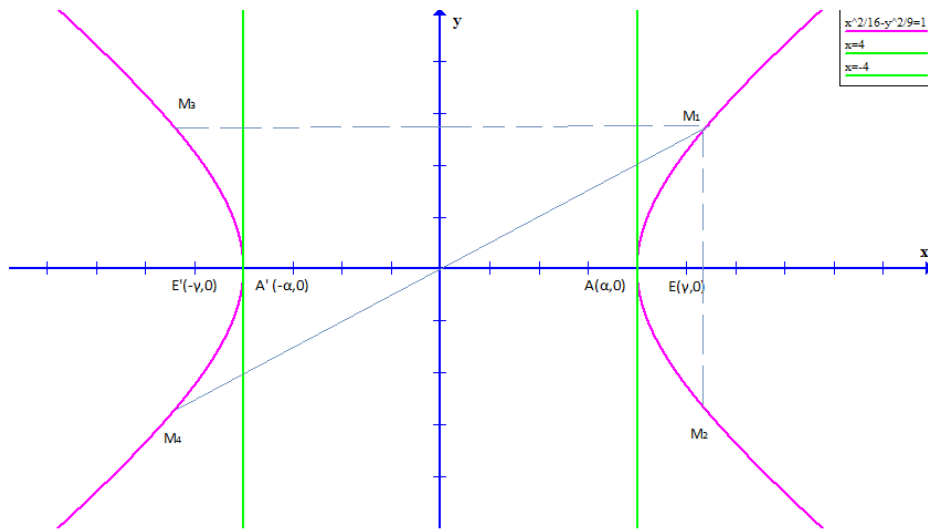
$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \quad \text{όπου} \quad \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}.$$



- Τέλος, αν είναι $\alpha = \beta$, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και η εξίσωσή της γράφεται: $x^2 - y^2 = \alpha^2$.

3. Ποιές είναι οι της Ιδιότητες Υπερβολής ;

Έστω μια υπερβολή C , η οποία έχει εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$.



- Αν $M_1(x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο της υπερβολής C , τότε και τα σημεία $M_2(x_1, -y_1)$, $M_3(-x_1, y_1)$ και $M_4(-x_1, -y_1)$ ανήκουν στην C .

Η υπερβολή C έχει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ άξονες συμμετρίας και την αρχή των αξόνων κέντρο συμμετρίας.

το μέσο O του $E'E$ είναι κέντρο συμμετρίας της και λέγεται **κέντρο** της υπερβολής.

- Από την εξίσωση της υπερβολής για $y=0$ βρίσκουμε $x = \pm \alpha$.

Η υπερβολή τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-\alpha, 0)$, και $A(\alpha, 0)$. Τα οποία λέγονται **κορυφές** της υπερβολής. Από την ίδια εξίσωση για $x=0$ προκύπτει η εξίσωση $y^2 = -\beta^2$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbf{R}$. Επομένως, **η υπερβολή C δεν τέμνει τον άξονα $y'y$.**

- Τέλος, από την εξίσωση της υπερβολής, έχουμε $\frac{x^2}{\alpha^2} = 1 + \frac{y^2}{\beta^2} \geq 1$,

Οπότε $x^2 - \alpha^2 \geq 0$

και άρα $x \leq -\alpha$ ή $x \geq \alpha$.

Επομένως, τα σημεία της υπερβολής C βρίσκονται έξω από την ταινία των ευθειών $X = -\alpha$ και $X = \alpha$, πράγμα που σημαίνει ότι η υπερβολή αποτελείται από δύο χωριστούς κλάδους.

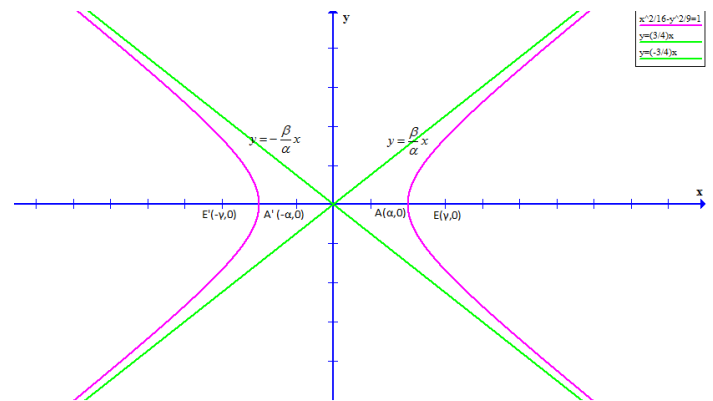
4. Να γραφούν οι εξισώσεις των Ασύμπτωτων της Υπερβολής

- Έστω μια υπερβολή C με εξίσωση

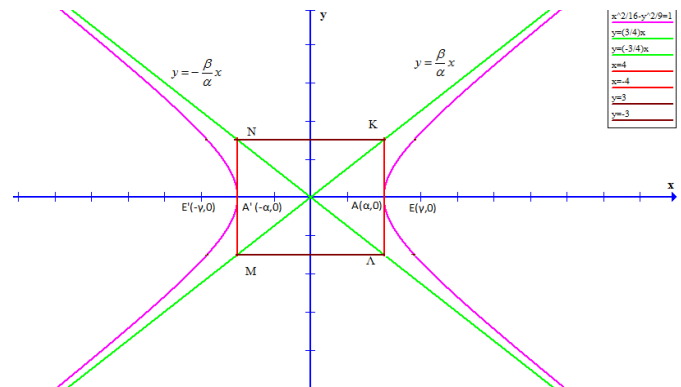
$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \quad (1)$$

Οι ασύμπτωτες είναι: $y = \frac{\beta}{\alpha}x$ και

$$y = -\frac{\beta}{\alpha}x,$$



Οι ασύμπτωτες της υπερβολής είναι οι διαγωνίους του ορθογώνιου $KLMN$ με κορυφές τα σημεία $K(\alpha, \beta)$, $L(\alpha, -\beta)$, $M(-\alpha, -\beta)$ και $N(-\alpha, \beta)$. Το ορθογώνιο αυτό λέγεται **ορθογώνιο βάσης** της υπερβολής.



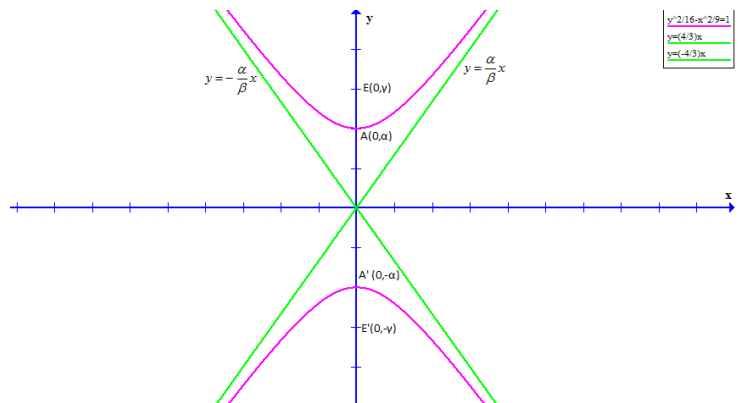
- Αν η υπερβολή C έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \text{ τότε οι ασύμπτωτες της}$$

είναι ευθείες:

$$y = \frac{\alpha}{\beta}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{\alpha}{\beta}x.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ



Ένας μνημονικός κανόνας για να βρίσκουμε κάθε φορά τις ασύμπτωτες μιας υπερβολής είναι ο εξής:

Παραγοντοποιούμε το πρώτο μέλος της εξίσωσης της υπερβολής και εξισώνουμε κάθε παράγοντα με μηδέν.

5. Τι ονομάζουμε Εκκεντρότητα της Υπερβολής;

Απάντηση:

Όπως στην έλλειψη έτσι και στην υπερβολή μία παράμετρος που καθορίζει το σχήμα της είναι η εκκεντρότητα. Ονομάζουμε

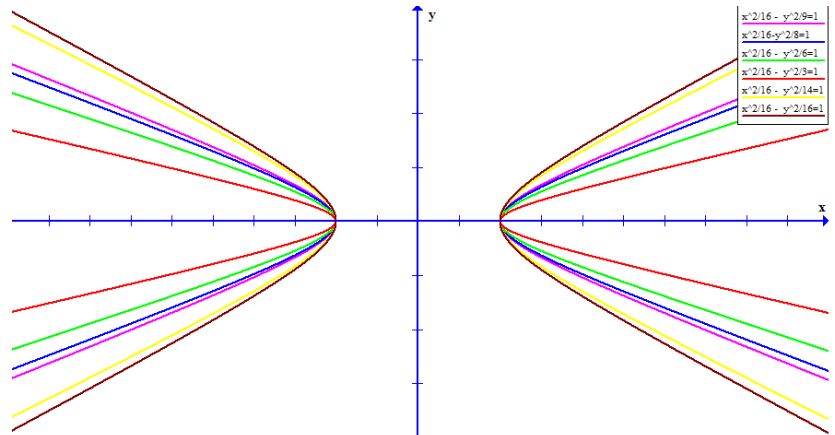
εκκεντρότητα της υπερβολής

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, και τη συμβολίζουμε με

ε , το λόγο $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$. Επειδή

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \text{είναι} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

$$\text{οπότε } \varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ και άρα, } \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \quad (1)$$



- η εκκεντρότητα ε προσδιορίζει το συντελεστή διεύθυνσης της ασυμπτώτου.
- Όσο η εκκεντρότητα μικραίνει και $\rightarrow 1$, ο λόγος $\frac{b}{a}$, άρα και το b , μικραίνει και $\rightarrow 0$.
- όσο πιο μικρή είναι η εκκεντρότητα της υπερβολής τόσο πιο επίμηκες είναι το ορθογώνιο βάσης και κατά συνέπεια τόσο πιο κλειστή είναι η υπερβολή.

Στην περίπτωση της ισοσκελούς υπερβολής είναι $a = b$, οπότε $\varepsilon = \sqrt{2}$.

6. Να γραφεί η εξίσωση της Εφαπτομένης της Υπερβολής στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$

Απάντηση:

- Έστω μια υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

και ένα σημείο $M_1(x_1, y_1)$ αυτής.

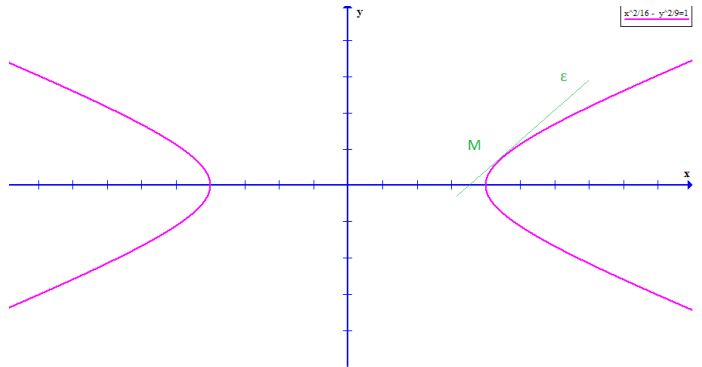
Η **εφαπτομένη** της υπερβολής στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ αποδεικνύεται ότι έχει εξίσωση

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

• Αν μια υπερβολή έχει εξίσωση

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

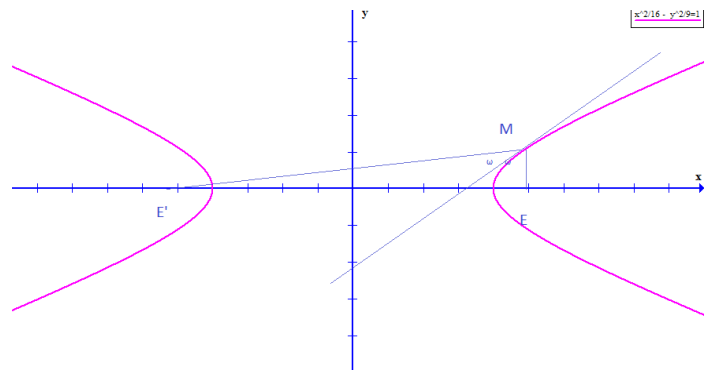
τότε η εφαπτομένη της στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$ θα έχει εξίσωση $\frac{yy_1}{a^2} - \frac{xx_1}{b^2} = 1$.



7. Να περιγράψετε την ανακλαστική ιδιότητα της υπερβολής

Απάντηση :

Η εφαπτομένη μιας υπερβολής σε ένα σημείο της M διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{M}E$, όπου E', E οι εστίες της υπερβολής.



Ασκήσεις στην Υπερβολή

1. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις
 - i. Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-5,0)$ και $E(5,0)$ και κορυφές τα σημεία $A'(-4,0)$ και $A(4,0)$.
 - ii. Έχει κορυφές τα σημεία $A'(0,-5)$ και $A(0,5)$ και εκκεντρότητα $\frac{13}{5}$
 - iii. Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$, $E(\sqrt{5}, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $M(2\sqrt{2}, 1)$

2. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C που έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = \frac{1}{2}x$ και $y = -\frac{1}{2}x$ και διέρχεται από το σημείο $M(\sqrt{5}, \frac{1}{2})$
3. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C' που έχει εστίες τα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης C: $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$ και κορυφές τις εστίες της C'.
4. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή C της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x'x συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Αν η υπερβολή C διέρχεται από το σημείο $M(4, 2\sqrt{2})$, να βρείτε :
- Την εξίσωση της υπερβολής C
 - Τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής
5. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-\sqrt{20}, 0)$ και $E(\sqrt{20}, 0)$ και εκκεντρότητα $e = \sqrt{5}$. Να βρείτε :
- Την εξίσωση της υπερβολής C
 - Τις κορυφές και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C
 - Το εμβαδό του ορθογωνίου βάσης της υπερβολής C
6. Δίνεται υπερβολή με εστίες $E'(0, -\sqrt{5})$ και $E(0, \sqrt{5})$ η οποία διέρχεται από το σημείο $M(2, 3)$. Να βρείτε :
- Την εξίσωση της υπερβολής C
 - Την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες της υπερβολής C
7. Δίνεται η υπερβολή C_1 , της οποίας οι εστίες είναι σημεία του άξονα x'x συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Επίσης η υπερβολή C_1 έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $y = -2x$ και $y = 2x$ και η απόσταση των κορυφών της είναι ίση με 4
- Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_1
 - Θεωρούμε την υπερβολή C_2 που έχει τις ίδιες εστίες με τη C_1 και επιπλέον διέρχεται από το σημείο $M(6, 4)$. Να βρείτε :
 - Την εξίσωση της υπερβολής C_2
 - Την εκκεντρότητα και τις κορυφές της υπερβολής C_2
8. Δίνεται η υπερβολή : C: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\alpha^2 + 5} = 1$ η οποία έχει εκκεντρότητα $e = \sqrt{\frac{5}{2}}$
- Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = 10$

ii) Έστω E' και E οι εστίες της υπερβολής C . Να βρείτε σημείο M της C τέτοιο ώστε : $\widehat{E'ME} = 90^\circ$

9. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ στην οποία η απόσταση των κορυφών είναι ίση με 4. Να βρείτε :

- i) Την εξίσωση της υπερβολής C
- ii) Την εξίσωση της χορδής της C που έχει ως μέσο το σημείο $M(8,5)$

10. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{12} = 1$. Να βρείτε :

- i) Τις εφαπτομένες της υπερβολής στα σημεία με τετμημένη 6
- ii) Το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων .

11. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ και εκκεντρότητα $e = \frac{\sqrt{18}}{2}$ να βρείτε :

- i) Την εξίσωση της υπερβολής C
- ii) Τις εφαπτομένες της υπερβολής C στα σημεία με τεταγμένη 7
- iii) Το σημείο τομής των παραπάνω εφαπτομένων

12. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C οι οποίες :

- i) Είναι παράλληλες στην ευθεία $\zeta: 5x+10y-2012=0$
- ii) Διέρχονται από το σημείο $P(4,1)$

13. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{4} = 1$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της υπερβολής C , οι οποίες :

- i) Διέρχονται από το σημείο $P(-1,-1)$
- ii) Σχηματίζουν με τον $x'x$ γωνία 45°

14. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-2,0)$ και $E(2,0)$ και εκκεντρότητα $e = 2$

- i) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής
- ii) Τις εφαπτομένες της υπερβολής που είναι κάθετες στην ευθεία $\zeta: 3x-6y+2013=0$
- iii) Τις εφαπτομένες της υπερβολής που διέρχονται από το σημείο $P(3,5)$

15. Δίνεται το σημείο $E(8,0)$ και η ευθεία $\zeta: x=2$

- i) Να αποδείξετε ότι : ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει $\frac{(ME)}{d(M,\zeta)} = 2$ είναι υπερβολή

ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο $K\left(\frac{4}{\sin\theta}, 4\sqrt{3} \cdot \varepsilon\varphi\theta\right)$, με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ανήκει στην υπερβολή

16. Δίνονται τα σημεία $M(x, y)$, $E'(-5, 0)$ και $E(5, 0)$ για τα οποία ισχύουν

$$|OM|^2 - |ME'| \cdot |ME| = 7$$

Όπου O η αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι :

- i) Το σημείο M κινείται σε υπερβολή C της οποίας να βρείτε την εξίσωση
- ii) Το σημείο $K\left(2t + \frac{2}{t}, \frac{3t}{2} - \frac{3}{2t}\right)$, με $t \in \mathbb{R}^*$, ανήκει στην παραπάνω υπερβολή

17. Να αποδείξετε ότι καθώς το θ μεταβάλλεται, με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, το σημείο $M\left(\frac{5}{\sin\theta}, 7\varepsilon\varphi\theta\right)$ ανήκει σε υπερβολή της οποίας να βρείτε την εξίσωση

18. Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της $M(x_1, y_1)$ διαφορετικό από τις κορυφές της. Η εφαπτομένη ε της C στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο K .

- i. Αν Λ είναι η προβολή του M στον άξονα $x'x$ να αποδείξετε ότι $(OK) \cdot (OL) = \alpha^2$.
- ii. Αν η κάθετη της ε στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο N , να αποδείξετε ότι :

$$(OK) \cdot (ON) = \gamma^2$$

19. Θεωρούμε την ισοσκελή υπερβολή $C: x^2 - y^2 = a^2$ και τα σημεία της $K(x_1, y_1)$ και $\Lambda(x_1, -y_1)$. Έστω επίσης ε η εφαπτομένη της C στο K

- i. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε και OL είναι κάθετες, όπου O η αρχή των αξόνων
- ii. Αν οι ευθείες ε και OL τέμνονται στο M , να αποδείξετε ότι $(OL)(OM) = a^2$

20. Δίνεται η υπερβολή C με εστίες $E'(-2\sqrt{5}, 0)$, $E(2\sqrt{5}, 0)$ και κορυφές $A'(-2, 0)$ $A(2, 0)$

- i. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C
- ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της υπερβολής C
- iii. Έστω το σημείο $M(\lambda, -2\lambda+8)$ ανήκει στην υπερβολή C να βρείτε
 - a. τον αριθμό λ
 - b. το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες της C και η εφαπτομένη της C στο σημείο M

21. Δίνεται η υπερβολή $C_1: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ και η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
- ii. Έστω C_2 ο κύκλος που παριστάνει η εξίσωση (1). Να βρείτε :
 - a. Τις εφαπτομένες της υπερβολής C_1 που διέρχονται από το κέντρο του κύκλου C_2
 - b. Τις κοινές εφαπτομένες των κωνικών τομών C_1 και C_2

Γενικές ασκήσεις στις κωνικές τομές

1. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$
 - a) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του
 - b) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στην εφαπτομένη του στο σημείο $(2, -3)$

2. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$
 - a) Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής
 - b) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου
 - c) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο $A(1, 2)$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται επίσης και στον κύκλο

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ (1)
 - a) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 - b) Να δείξετε ότι ο κύκλος εφάπτεται στον άξονα $x'x$
 - c) Έστω $K(1, 2)$ το κέντρο του κύκλου
 - i) Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο Λ του κέντρου του κύκλου ως προς το σημείο $M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 - ii) Αν $\Lambda(2, 1)$ να δείξετε ότι το Λ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου
 - iii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $\Lambda(2, 1)$ και τέμνει τον κύκλο στα A και B ώστε το Λ να είναι το μέσο της χορδής AB

4. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2\lambda y - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1) και οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 3y^2 = 2$, $C_2: 3x^2 + y^2 = 2$
 - a) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των παραπάνω κύκλων συναρτήσει του λ
 - b) Να βρείτε τις εστίες και τις κορυφές των παραπάνω ελλείψεων
 - c) Να βρείτε τα κοινά σημεία των ελλείψεων C_1 και C_2 και να αποδείξετε ότι ανήκουν σε κύκλο C . Για ποια τιμή του λ ο κύκλος που περιγράφει η εξίσωση (1) συμπίπτει με τον κύκλο C ;
 - d) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου C στα κοινά σημεία των ελλείψεων C_1 και C_2 σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιους τους μεγάλους άξονες των ελλείψεων C_1 και C_2

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$ (1)
 - a) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

- b) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του παραπάνω κύκλου στο σημείο του $A(2,0)$
- c) Να εξετάσετε τη σχετική θέση της ευθείας $\varepsilon: y = x - 2$ ως προς τον κύκλο C
6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 1 = 0$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$
- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 - Αν για $\lambda=1$ προκύπτει από την (1) ο κύκλος C_1 και για $\lambda=2$ προκύπτει ο κύκλος C_2 , να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο κύκλων
 - Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι C_λ που ορίζονται από την (1) για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
 - Να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής όλων των κύκλων C_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$
7. Έστω η παραβολή $y^2 = 4x$. Αν το σημείο $A(3, 2\sqrt{3})$ ανήκει στην παραβολή τότε :
- Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο A
 - Αν η εφαπτομένη τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο σημείο B να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το AB
 - Να αποδείξετε ότι ο παραπάνω κύκλος εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην εστία της παραβολής
8. Δίνονται τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$
- Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος C_1 των σημείων $M(x,y)$ του επιπέδου για τα οποία η περίμετρος του τριγώνου MEE' είναι ίση με 18, είναι έλλειψη με μεγάλο άξονα $2a=10$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωσή της
 - Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής C_2 που έχει της ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη και εκκεντρότητα $e=2$
9. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ (1) και η ευθεία $x + \lambda y + 4 - \lambda = 0$ (2)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο $(-2,3)$ και ακτίνα 4
 - Αν η (2) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου να αποδείξετε $\lambda=-1$
 - Για $\lambda=-1$
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες
 - Να βρείτε την απόσταση του σημείου $M(4,-3)$ από την ευθεία (2)
10. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 + \lambda x + (\lambda - 2)y - 4 - 3\lambda = 0$ (1)
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 - Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που παριστάνει η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ κινούνται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση
 - Αν το κέντρο K του κύκλου που ορίζει η (1) ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 3x + y - 9 = 0$, να βρείτε τον αριθμό λ

- d) Για $\lambda=-4$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(1,5)$
11. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$
- a) Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα
 - b) Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου αυτού με τον $x'x$
 - c) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο $A(2,2)$
12. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 16$ και τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M του επιπέδου που ισχύει $(ME')+(ME)=10$
13. Δίνονται τα σημεία $A(-4,0)$ και $B(4,0)$
- i) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Γ ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να έχει περίμετρο 18
 - ii) Να βρεθεί το $(M_1M_2)_{min}$

Διαγώνισμα στις κωνικές τομές

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

A.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

A.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ϵ του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση:

A. $x + 3y = 10$, B. $5x - y = 8$, Γ. $x - 3y = 10$,

Δ. $3x + 2y = 3$, E. $\frac{1}{2}x + y = 5$

B.2. Στη στήλη A δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη Στήλη B τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης A και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη A	Στήλη B
α. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. $K(0, -1), \rho = 2$
β. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$	2. $K(3, -2), \rho = 1$
	3. $K(3, -2), \rho = 4$

B.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο $(1, -1)$ ανήκει στο κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η παραβολή $C: y^2 = x$ και η ευθεία $\epsilon: x + y = 2$

A. Να δείξετε ότι τέμνονται.

B. Αν A, B τα σημεία τομής τους, να δείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής στα A,B τέμνονται στο σημείο M το οποίο βρίσκεται στην παραβολή C_1 : $y^2 = -\frac{1}{8}x$

ΘΕΜΑ 3ο

A. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

B. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda=0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x+y+2=0$, να ισχύει $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$.

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα β να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου AOB.

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 2003 μέλισσες. Κάθε μέλισσα χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n=1,2,3,\dots,2003$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x-1)^2+y^2=2n(x+y-1)$$

Να δείξετε ότι:

A. η τροχιά κάθε μέλισσας είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

B. Κατά την κίνηση τους όλες οι μέλισσες διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A;

Γ. Οι τροχιές όλων των μελισσών εφάπτονται της ευθείας $x+y-1=0$ στο σημείο A.

Επαναληπτικά θέματα στα διανύσματα

ΘΕΜΑ 1^ο (2^ο λύκειο 2009)

Δίνονται τα διαστήματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = (-7, 13)$

A. Αν $3\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{\alpha}$ και $5\vec{x} + 6\vec{y} = \vec{\beta}$ να βρεθούν :

- i. Τα διανύσματα $\vec{x}$ και $\vec{y}$
- ii. Το είδος της γωνίας $(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$

B. Αν $\vec{x} = (1, -1)$ και $\vec{y} = (-2, 3)$ να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \lambda\vec{x} + 2\vec{y}$ και

$\vec{v} = 2\vec{x} + \lambda\vec{y}$ να είναι αντίρροπα.

ΘΕΜΑ 2^ο (4^ο λύκειο 2006)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$

A. Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

B. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Γ. Να αποδείξετε ότι : $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 4$

ΘΕΜΑ 3^ο (ΟΕΦΕ 2012)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$

A. Να αποδείξετε ότι : $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$

B. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Γ. Να αποδείξετε ότι : $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}|$

Δ. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

ΘΕΜΑ 4^ο (3^ο λύκειο 2012)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$

A. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

B. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$

Γ. Να αποδείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\vec{\alpha}$

Δ. Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{u} = (\lambda^2 - 4, -\lambda)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$

ΘΕΜΑ 5^ο (3^ο λύκειο 2009)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(-\frac{1}{2}|\vec{\alpha}|, \sqrt{3}\right)$ και $\vec{\beta} = (1, \sqrt{3})$

- i. Να βρείτε το $|\vec{\alpha}|$
- ii. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- iii. Να δείξετε ότι $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = \frac{1}{2}\vec{\beta}$
- iv. Αν $\vec{\gamma} = (\kappa^5 + \kappa, \kappa^2 - 1)$ και $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$ να βρεθεί ο κ

ΘΕΜΑ 6^ο (1^ο λύκειο 2009)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$, $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $|\vec{\gamma}| = 2$.
Να αποδείξετε ότι :

- i. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} = -2$
- ii. $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$
- iii. $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{0}$

ΘΕΜΑ 7^ο (2^ο λύκειο 2011)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$ και $|\vec{\beta}| = 3$ και $(3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = -9$

- i. Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3$
- ii. Να βρεθεί η γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$
- iii. Αν $\vec{v} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε :
 - a. Το $|\vec{v}|$
 - b. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{v} \perp \vec{u}$

ΘΕΜΑ 8^ο (3^ο λύκειο)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (0, -2)$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ να αποδείξετε ότι :

1. $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$
2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2\sqrt{2}$
3. $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 45^\circ$

ΘΕΜΑ 9^ο (3^ο λύκειο)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (8,6)$ και $\vec{\beta} = (-1,1)$

1. Να υπολογίσετε τα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$, $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
2. Αν $\vec{\gamma} = (2\lambda - 3, 5)$ να υπολογίσετε το λ ώστε το $\vec{\gamma} \perp \vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 10^ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$

- i. Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$
- ii. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός κ , ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.
- iii. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$

ΘΕΜΑ 11^ο (2001)

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$,

$\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε :

- i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- ii. Τα μέτρα $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$
- iii. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- iv. Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

ΘΕΜΑ 12^ο (ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ 2001)

Αν $\vec{PA} + \vec{PB} - 2\vec{PT} = \vec{0}$ και $|\vec{PA}| = 6$, $|\vec{PB}| = |\vec{PT}| = 2\sqrt{3}$ να δείξετε ότι :

- a) Τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά .
- b) Το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία A,B
- c) Η γωνία $\widehat{APB} = 90^\circ$
- d) Το διάνυσμα $\vec{v} = \vec{PB} + \vec{PT}$ είναι κάθετο στο $\vec{AT}$

ΘΕΜΑ 13^ο

Αν $\vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{OT} = \vec{0}$ και $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = 1$, $|\vec{OT}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$ να δείξετε ότι :

- a) Τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά .

b)Τη σχετική θέση των A,B,Γ

c)Τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ είναι ορθογώνια .

d)Να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OG}$ είναι οξεία

Επαναληπτικά Θέματα στην ευθεία

ΘΕΜΑ 1^ο (2^ο λύκειο 2009)

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ $\Gamma(-1,-2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x + y - 5 = 0$

- i. Ναδειχθεί ότι το A είναι σημείο της ε
- ii. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας δ που είναι κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο Γ
- iii. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το Γ τέμνει την ε στα σημεία A και B και ισχύει $\widehat{A\Gamma B} = \frac{\pi}{2}$

ΘΕΜΑ 2^ο (4^ο λύκειο 2009)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 5x - 3y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x - 2y - 1 = 0$, να βρεθούν :

- i. Το κοινό σημείο K των ε_1 και ε_2
- ii. Οι συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου $A(4,6)$ της ευθείας ε_1 , ως προς την ευθεία ε_2
- iii. Η εξίσωση της ευθείας ε που είναι συμμετρική της ε_1 ως προς την ε_2

ΘΕΜΑ 3^ο (1999)

Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$ και $B(0,4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

- a. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .
- b. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OD
- c. Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας ε . Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$

ΘΕΜΑ 4^ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy η εξίσωση της ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$

Όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ .

- a. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ
- b. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2)$, $\Lambda(-1,5)$ και $M(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K, Λ, M
- c. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M

- d. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Κ και Λ.

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται το σημείο A(2,1) του καρτεσιανού επιπέδου Oxy

- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OA
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία OA.
- Η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο B . Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του τριγώνου OAB που διέρχεται από την κορυφή A
- Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$

- Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2
- Να δείξετε ότι οι ευθείες αυτές είναι κάθετες
- Να βρείτε ένα σημείο M(κ,λ) με κ>0 και λ>0 τέτοιο , ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία
- Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O , άξονα συμμετρίας τον άξονα x'x και διέρχεται από το σημείο M

ΘΕΜΑ 7^ο

Ενός παραλληλογράμμου ABΓΔ , η πλευρά AB ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x - 7y + 27 = 0$ και η πλευρά AD στην ευθεία με εξίσωση $4x + y + 5 = 0$. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(2, \frac{5}{2})$

- Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (6,2)
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ

ΘΕΜΑ 8^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x + 2\lambda y - \lambda^2 - 2\lambda - \gamma = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ και γ πραγματική σταθερά

- Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή

- b. Εάν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο
- c. Εάν $\gamma \neq -1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μια ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση

ΘΕΜΑ 9^ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, με $\lambda \neq 2$

- a. Να αποδείξετε ότι το σημείο A κινείται σε ευθεία , καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$
- b. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε :
 - i. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
 - ii. Την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο την κορυφή $\Sigma(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία BΓ

ΘΕΜΑ 10^ο

Δίνεται η εξίσωση :

$$(2x + y - 2) + \lambda(x - y + 5) = 0 , \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- i. Να αποδείξετε ότι :
 - a. Για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή
 - b. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο
- ii. Να βρείτε την ευθεία ε που ορίζεται από την (1) και είναι κάθετη στην ευθεία η : $x+2y-1=0$ και μετά το σημείο της ε που βρίσκεται πλησιέστερα στο O

ΘΕΜΑ 11^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda + 1)x + (2\lambda^2 + \lambda)y + 2\lambda + 4 = 0$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι:
 - a. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή
 - b. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο
- ii. Ποια από τις παραπάνω ευθείες σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο

ΘΕΜΑ 12^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 - \lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες για κάθε τιμή του λ

- ii. Να βρείτε τα ζεύγη των ευθειών που ορίζονται από την (1) και η απόστασή τους είναι ίση με $2\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 13^ο (4^ο 2010)

Δίνονται τα σημεία $A(0,-3)$, $B(4,0)$. Αν $(MAB)=8$.Να βρεθούν :

- i. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M
- ii. Η σχετική θέση των δύο ευθειών
- iii. Το πλησιέστερο σημείο της ε_1 στο O

ΘΕΜΑ 14^ο (3^ο 2012)

Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,2)$ και η ευθεία $\varepsilon: 3x+y+\alpha=0$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

- i. Αν η απόσταση του A από το B είναι ίση με την απόσταση του A από την ε , να βρείτε την τιμή του α .
- ii. Για $\alpha=4$ να βρείτε :
 - a. Το εμβαδό του τριγώνου ABΓ , όπου Γ το σημείο τομής της ε με τον άξονα γ'γ
 - b. Ποιο σημείο της ευθείας ε έχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή O των αξόνων;

ΘΕΜΑ 15^ο (ΚΑΡΑΤΟΥΛΑ 2012)

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: (\kappa-1)x+3\psi=6$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και $\delta: 3x+\psi=2012$

- i. Να βρείτε την τιμή του κ ώστε $\varepsilon \parallel \delta$
- ii. Αν $\kappa=10$ τότε :
 - a. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$, $\psi'\psi$ στα σημεία $A\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ και $B(0,2)$
 - b. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB όπου O η αρχή των αξόνων
 - c. Να βρεθεί η απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία ε

ΘΕΜΑ 16^ο (3^ο 2009)

- i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία $A(4,0)$ και $B(0,-2)$
- ii. Να δείξετε ότι η ευθεία (ζ) $2x+y=0$ είναι κάθετη στην AB και διέρχεται από το $O(0,0)$
- iii. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο της ε προς το O
- iv. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB

ΘΕΜΑ 17^ο (1^ο λύκειο 2009)

Δίνονται τα σημεία A(6,4) και B(-1,-3) .Να βρεθούν :

- i. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$
- ii. Η ευθεία AB
- iii. Το εμβαδόν του τριγώνου (ΟΜΚ) όπου Μ,Κ σημεία τομής της AB με τους άξονες.
- iv. Να βρεθεί το σημείο της AB που βρίσκεται πλησιέστερα στο Γ(5,-1)

ΘΕΜΑ 18^ο

Δίνεται η ευθεία $\epsilon_1: x-y+2=0$ και τα σημεία A(-3,5) και B(1,1)

- i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_2 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο και είναι κάθετη στην ευθεία ϵ_1
- ii. Να βρεθεί το σημείο τομής των ϵ_1 και ϵ_2
- iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το μέσον Μ του τμήματος AB και απέχει από την αρχή των αξόνων Ο απόσταση ίση με 1

ΘΕΜΑ 19^ο (3^ο λύκειο)

Δίνονται τα σημεία A(4,0) και B(0,-2) των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα .

- i. Να δείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A, B έχει εξίσωση (ϵ): $x-2y-4=0$
- ii. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζει η ϵ με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- iii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που είναι κάθετη στην (ϵ) και διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) έχει εξίσωση την (ζ): $2x-y=0$
- iv. Να βρείτε το σημείο της (ϵ) που απέχει ελάχιστη απόσταση από το Ο(0,0)

ΘΕΜΑ 20^ο

Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a}$ για το οποίο ισχύει ότι $2\vec{a} = (|\vec{a}|, \sqrt{3})$

A. 1) Να αποδείξετε ότι : $|\vec{a}| = 1$

2) Να αποδείξετε ότι : $\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3) Να βρεθεί η γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα $x'x$

B. Αν η γωνία $\hat{\omega} = 60^\circ$ και η ευθεία (ϵ): $y = (\lambda + 1 + \sqrt{3})x + \lambda + 2$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$ τότε

1) Να βρεθεί ο αριθμός λ και η εξίσωση της ευθείας (ϵ)

2) Αν $\lambda = -1$ να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες $x'x$, $y'y$ και το σημείο $O(0,0)$

ΘΕΜΑ 21^ο

Δίνονται τα σημεία $A(3,2)$ και $B(1,-2)$ και η ευθεία $\varepsilon_1: y = \frac{1}{2}x - 4$

- Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB και να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του AB
- Να βρείτε το σημείο της ευθείας ε_2 που απέχει από την αρχή των αξόνων την μικρότερη απόσταση.

ΘΕΜΑ 22^ο

Δίνονται τα σημεία $A(4,2)$, $B(-3,9)$, $\Gamma(1,5)$ και οι ευθείες $\varepsilon_1: 3x - y + 4 = 0$, $\varepsilon_2: x + 2y - 1 = 0$

- Να δείξετε ότι τα σημεία A , B , Γ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία
- Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AB και τη γωνία που αυτή σχηματίζει με τον $x'x$
- Αν Δ είναι το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΔM του τριγώνου $\Delta B\Gamma$
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta' MA$, όπου Δ' το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία $B\Gamma$

ΘΕΜΑ 23^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4xy - 10x + 8y + 13 = 0$ (1)

- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες (ε_1), (ε_2)
- Ποια είναι η σχετική θέση των (ε_1), (ε_2)
- Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι (ε_1), (ε_2)
- Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες (ε_1), (ε_2)

ΘΕΜΑ 24^ο

Δίνονται οι εξισώσεις: $\lambda x + (\lambda - 2)y - \lambda - 1 = 0$ και $(\lambda + 1)x - (\lambda - 2)y - \lambda = 0$

A. Να αποδείξετε ότι :

- Οι εξισώσεις αυτές παριστάνουν παριστάνουν ευθείες για κάθε $\lambda \in \mathcal{R}$
- Οι ευθείες αυτές τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathcal{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$
- Διέρχονται από σταθερό σημείο

Β. Για ποιες τιμές του λ οι ευθείες είναι παράλληλες ;

Γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων τομής των παραπάνω ευθειών

ΘΕΜΑ 25^ο

Δίνεται το σημείο $A(2,-1)$ και η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $y=x+4$ να βρείτε :

- i) Την εξίσωση της ευθείας δ που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ϵ)
- ii) Τις συντεταγμένες του σημείου τομής της (ϵ) με την (δ)
- iii) Τις συντεταγμένες του συμμετρικού του A ως προς την ευθεία (ϵ)

ΘΕΜΑ 26^ο

Α. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών

$$\epsilon_1: tx - y + 2012 = 0 \quad \epsilon_2: (1+t)x + (t-1)y - 2013 = 0$$

Β. Δίνεται η εξίσωση $\alpha(x+y-4)+x-2=0$ (1)

Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε αριθμό α και στη συνέχεια ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από κοινό σημείο το οποίο και να βρείτε

Γ. Ποια από τις παραπάνω ευθείες του παραπάνω ερωτήματος είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x$

ΘΕΜΑ 27^ο

$$\text{Δίνεται η εξίσωση } x^2 - y^2 - 4\mu y - 2\mu x - 3\mu^2 = 0$$

- i) Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δυο ευθείες κάθετες μεταξύ τους
- ii) Να βρεθεί το σημείο τομής των παραπάνω ευθειών
- iii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των παραπάνω σημείων τομής για τις διάφορες τιμές του μ

ΘΕΜΑ 28^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(2,3)$, $B(-1,1)$ και $\Gamma(4,-3)$

- iv) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του AB και $A\Gamma$
- v) Να βρείτε τις εξισώσεις της διαμέσου του AM και του ύψους του BD
- vi) Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου

ΘΕΜΑ 29^ο

Δίνονται οι εξισώσεις :

$$(\lambda^2 + \lambda - 2)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y + \lambda^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Και $\lambda x + (2 - \lambda)y + \lambda + 4 = 0 \quad (2)$

A. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1)

- v) Παριστάνει ευθεία
- vi) Παριστάνει ευθεία παράλληλα στον $x'x$
- vii) Παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$
- viii) Παριστάνει ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

B. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθείες οι οποίες διέρχονται από σταθερό σημείο

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες ε_1 , ε_2 με εξισώσεις τις (1) και (2) αντίστοιχα, είναι παράλληλες

ΘΕΜΑ 30^ο

Δίνεται η εξίσωση $6x^2 - y^2 = xy \quad (1)$

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο ευθείες τις οποίες και να βρείτε

B. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ε_1 και ε_2

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $M(0,1)$ και τέμνει τις ευθείες ε_1 και ε_2 στα σημεία A και B αντίστοιχως ώστε το σημείο M να είναι μέσο του AB

Επαναληπτικά θέματα στις κωνικές τομές

ΘΕΜΑ 1^ο (4^ο λύκειο 2010)

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 8x + 6y + \kappa = 0$

- i. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του κ ώστε ο C να είναι κύκλος
- ii. Να βρεθεί το κ ώστε η ακτίνα του κύκλου να είναι : $\rho=2$
- iii. Να δείξετε ότι το $M(5,0)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου
- iv. Να βρείτε τα σημεία του κύκλου που απέχουν τη μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση από το $O(0,0)$

ΘΕΜΑ 2^ο (Επαναλ.2001)

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 25$ και $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο $M(0,-10)$. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον κύκλο, να βρείτε :

- i. Τις εξισώσεις των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$
- ii. Τις συντεταγμένες των σημείων επαφής A και B
- iii. Την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία A και B .

ΘΕΜΑ 3^ο (2002)

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε :

- i. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.
- ii. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- iii. Την εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-1$

ΘΕΜΑ 4^ο (2002)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\chi\sigma\upsilon\nu\theta - 2\gamma\eta\mu\theta - 1 = 0, 0 \leq \theta < 2\pi$

- i. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα
- ii. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$
- iii. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$

ΘΕΜΑ 5^ο (2003)

Δίνονται δύο κωνικές τομές : η παραβολή $y^2 = 2px$ και η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$

- i. Να αποδείξετε ότι οι εστίες E και E' της έλλειψη είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$ και $E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)$
- ii. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής K και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$
- iii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ είναι κάθετες

ΘΕΜΑ 6^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο $M(2,1)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2,-1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$
- ii. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο $M(2,1)$
- iii. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτόμενων με τον κύκλο, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

ΘΕΜΑ 7^ο (2^ο λύκειο 2009)

Δίνεται ο κύκλος $C_1: (x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha^2$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 4\alpha x$, όπου $\alpha > 0$

- i. Ναδειχθεί ότι ο κύκλος C_1 έχει κέντρο την εστία της παραβολής C_2 και εφάπτεται στη διευθετούσα της
- ii. Να υπολογιστούν τα σημεία τομής A, B του κύκλου και της παραβολής.
- iii. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής C_2 στα A, B είναι κάθετες και τέμνονται πάνω στη διευθετούσα της

ΘΕΜΑ 8^ο (4^ο λύκειο)

Δίνεται η παραβολή (C_1) με κορυφή την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ άξονα συμμετρίας τον x' και εστία το σημείο $E(4,0)$

- i. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής
- ii. Να βρείτε την εξίσωση C_2 του κύκλου που έχει κέντρο την εστία της παραβολής και εφάπτεται στη διευθετούσα της παραβολής
- iii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, αν η ευθεία $y = \lambda x + 8$ εφάπτεται στον κύκλο με εξίσωση :

$$(x - 4)^2 + y^2 = 64$$

ΘΕΜΑ 9^ο (4^ο λύκειο 2010)

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (-6, 8)$ και $\vec{v} = (9, -12)$

- Να δείξετε ότι τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι αντίρροπα
- Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει ημιάξονες τα μέτρα των $\vec{u}, \vec{v}$ και μεγάλο άξονα στον $y'y$
- Να βρεθεί η εφαπτόμενη της έλλειψης που περνά από το $K(20, 0)$ και σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον $x'x'$

ΘΕΜΑ 10^ο (4^ο λύκειο 2010)

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 8x + 6y + \kappa = 0$

- Να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε ο C να παριστάνει κύκλο
- Να βρεθούν οι τιμές του κ ώστε ο κύκλος να έχει ακτίνα $\rho=2$
- Να δείξετε ότι το $M(5, 0)$ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου
- Να βρεθούν τα σημεία του C που απέχουν την μέγιστη και την ελάχιστη απόσταση από το $O(0, 0)$

ΘΕΜΑ 11^ο (3^ο λύκειο 2012)

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2(\lambda + 2)y + 4\lambda + 4, \lambda \in \mathbb{R}^* (1)$

- Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο στον οποίο να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του
- Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων
- Για $\lambda=-2$
 - Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία που ο κύκλος C τέμνει τον άξονα $y'y$ και ο μικρός άξονας έχει μήκος ίσο με το τετράγωνο της ακτίνας του κύκλου
 - Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $A\left(-\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι εφάπτεται και στον κύκλο.

ΘΕΜΑ 12^ο (λύκειο Καράτουλα)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + y^2 = 0$

- Να αποδείξετε ότι παριστάνει κύκλο με κέντρο το $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho=2$
- Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(2, 2)$ ανήκει στον κύκλο και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο M
- Να αποδείξετε ότι ο άξονας $y'y$ εφάπτεται στον παραπάνω κύκλο

ΘΕΜΑ 13^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ με $\vec{u} = (3,4)$, $|\vec{v}| = 2$ και $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.

- a. Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ είναι $\varphi = 60^\circ$, να βρεθούν :
 - i. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$
 - ii. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{w}$
- b.
 - i. Αν $\vec{v} = (\lambda, \kappa)$ και $\vec{u} \perp \vec{v}$ να αποδείξετε ότι $\lambda = \pm \frac{8}{5}$ και $\kappa = \pm \frac{6}{5}$
 - ii. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης με εστίες στον $\chi\chi$ εστιακή απόσταση 2 και $2 \cdot \alpha = 5 \cdot |\lambda|$

ΘΕΜΑ 14^ο

Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

A) Εάν οι εφαπτόμενες της υπερβολής στις κορυφές της A και A' τέμνουν την ασύμπτωτη με θετικό συντελεστή διεύθυνσης στα σημεία Γ και Γ' :

A.1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Γ'.

A.2. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο ΓΓ'.

A.3. Δείξτε ότι ο παραπάνω κύκλος διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

B) Δίνονται οι κύκλοι με εξισώσεις $C_1 : (x-2\alpha)^2 + (y+3\alpha)^2 = 16$ και $C_2 : (x+3)^2 + (y+3)^2 = \alpha^2$, και η ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y + 2\alpha = 0$, $\alpha > 0$.

B.1. Να βρείτε τις αποστάσεις των κέντρων των κύκλων από την ευθεία ε ως συνάρτηση του α .

B.2. Να βρείτε το α εάν η ευθεία εφάπτεται του κύκλου C_1 .

B.3. Για την τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα B.2. εξετάστε αν η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου C_2 και βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων

Επαναληπτικό διαγώνισμα στα μαθηματικά κατεύθυνσης
(1^ο γενικό λύκειο πύργου 2013)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου, να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

A2. Αν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις σαν σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ)

- c) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ είναι παράλληλο στην ευθεία $AX+BY+\Gamma=0$
- d) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = (\alpha^2 + 1, 0)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 0
- e) Η εξίσωση $(\alpha - 1)x - (\alpha^2 - 1)y + 5 = 0$ παριστάνει ευθεία, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
- f) Η παραβολή $y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$
- g) Για κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ ισχύει : $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$

ΘΕΜΑ Β

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων χογ δίνονται τα σημεία : A(2,4), B(-2,0) και Γ(2,0)

B1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB, και να υπολογίσετε την γωνία που σχηματίζει η συγκεκριμένη ευθεία με τον άξονα $x'x$

B2. Δείξτε ότι το σημείο Γ δεν ανήκει στην ευθεία AB να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

B3. Να υπολογιστούν τα μήκη : α) της διαμέσου ΓΜ και

β) του ύψους ΑΗ του τριγώνου ABΓ

ΘΕΜΑ Γ

Σε ορθοκανονικό σύστημα χογ δίνεται σημείο A(4,0) και η ευθεία (ε): $y=x$

Γ1. Δείξτε ότι ο κύκλος C διαμέτρου OA εφάπτεται στον άξονα $y'y$

Γ2. Βρείτε σημείο Μ της ευθείας (ε), τέτοιο ώστε η γωνία $\widehat{OMA} = 90^\circ$ και στη συνέχεια δείξτε ότι το σημείο Μ είναι σημείο του κύκλου C

Γ3. Δείξτε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση : $\lambda x - y + 2 - 2\lambda = 0$ διέρχονται από το ίδιο σημείο

Γ4. Δείξτε ότι η παραβολή που έχει εστία το σημείο $E\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και κορυφή το $O(0,0)$ διέρχεται από το σημείο M του ερωτήματος Γ1.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 25$

Δ1. Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C , που διέρχονται από το σημείο $P(5,10)$

Δ2. Αν η ευθεία (ε_1) με εξίσωση $: 3x - 4y + 25 = 0$ είναι μια από τις εφαπτομένες του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι : $|3x - 4y + 25| \leq 50$, για κάθε σημείο $M(x,y)$ του κύκλου C .

Δ3. Δίνονται τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$. Βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκονται τα σημεία $N(x,y)$, αν ισχύει : $(NE') + (NE) = 10$. Βρείτε ποια από τα παραπάνω σημεία ανήκουν στον κύκλο C

Θέματα τράπεζας θεμάτων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο :

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

§1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

§1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

§1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-18603 §1.1 - §1.2 - §1.3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημεία Δ και E του επιπέδου τέτοια, ώστε $\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{A\Gamma}$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{DE}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι παράλληλα.

(Μονάδες 12)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-18604 §1.1 - §1.2 - §1.3

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E, Z σημεία τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$

α) Να γράψετε τα διανύσματα $\overrightarrow{EZ}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Delta}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία B, Z και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-20054 §1.1 - §1.2 - §1.3

Θεωρούμε τα σημεία P, Λ, K και M του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση $5\overrightarrow{P\Lambda} = 2\overrightarrow{PK} + 3\overrightarrow{PM}$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ και M είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

β) Για τα παραπάνω σημεία K, Λ και M να δείξετε ότι ισχύει $2\overrightarrow{A\Lambda} + 3\overrightarrow{B\Lambda} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BK}$, όπου A και B είναι σημεία του επιπέδου.

(Μονάδες 15)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-22518 §1.1 - §1.2 - §1.3

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ και τυχαίο σημείο O . Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{OG} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta} + 6\vec{\gamma}$, τότε:

α) να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο**5) ΑΣΚΗΣΗ 4-22561** §1.1 - §1.2 - §1.3

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AD} = \vec{\beta}$. Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ στην ΑΔ και τη διαγώνιο ΑΓ αντίστοιχα, ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ και $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AG}$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{AZ} = \frac{1}{4}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ (Μονάδες 8)

β) $\overrightarrow{EZ} = \frac{1}{4}\left(\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}\right)$ και να υπολογίσετε με τη βοήθεια των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ το $\overrightarrow{EB}$.

(Μονάδες 12)

γ) τα σημεία Ε, Ζ, Β είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 5)

§1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ**ΘΕΜΑ 2ο****6) ΑΣΚΗΣΗ 2-18605** §1.4

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + \vec{j}$ και $\overrightarrow{OG} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 12)

β) Να εξετάσετε αν τα σημεία Α, Β και Γ μπορεί να είναι κορυφές τριγώνου.

(Μονάδες 13)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-20055 §1.4

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha + 1, 3)$, $B(\alpha, 4)$ και $\Gamma(-4, 5\alpha + 4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha = 1$, να βρείτε αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{AB}$. (Μονάδες 7)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-20061 §1.4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με τρεις κορυφές τα σημεία Α(1,1), Γ(4,3) και Δ(2,3)

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ, καθώς και τις συντεταγμένες της κορυφής Β. (Μονάδες 16)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-20071 §1.4

Θεωρούμε τα σημεία $A(1 + 2\alpha, 4\alpha - 2)$ και $B(5\alpha + 1, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να γράψετε το $\overrightarrow{AB}$ συναρτήσει του α και να βρείτε το α ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 10$.

(Μονάδες 12)

- β) Έστω $\alpha = 2$. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ΜΑΒ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. (Μονάδες 13)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-20148 §1.4

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (7, 3)$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι μη συγγραμμικά ανά δύο. (Μονάδες 10)
- β) Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

§1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 2ο

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-18556 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$ και $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (Μονάδες 8)
- β) Αν τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα να βρείτε την τιμή του k . (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (Μονάδες 7)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-18558 §1.5

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\overrightarrow{AB} = (-4, -6)$ και $\overrightarrow{AG} = (2, -8)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AM}$, όπου ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι η γωνία Α είναι οξεία. (Μονάδες 10)
- γ) Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ επιπλέον ισχύει $A(3, 1)$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ. (Μονάδες 8)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-18581 §1.5

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία: $2|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$ (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (Μονάδες 15)

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-18598 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB} = (k^2 - 6k + 9, k - 3)$ και $\overrightarrow{AG} = (1, 6)$, όπου $k \in \mathbb{R}$

- α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$ (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AG}$ να είναι κάθετα. (Μονάδες 9)
- γ) Για $\kappa = 1$ να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{BG}$. (Μονάδες 8)

15) ΑΣΚΗΣΗ 2-20050 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 7)$ και $\vec{\beta} = (2, 4)$.

- α) Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
- β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, από τις οποίες, η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-20052 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}) \cdot \vec{\beta} = 7$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$

- α) Να υπολογίσετε τα $\vec{\alpha}^2$ και $|\vec{\beta}|$ (Μονάδες 6)
- β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$ (Μονάδες 5)

17) ΑΣΚΗΣΗ 2-20053 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 4$ και $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -8$

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha} = \vec{0}$. (Μονάδες 15)

18) ΑΣΚΗΣΗ 2-20056 §1.5

Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{5\pi}{6}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

- α) Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$. (Μονάδες 16)
- β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$. (Μονάδες 9)

19) ΑΣΚΗΣΗ 2-20057 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$. Να υπολογίσετε τα εξής:

- α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και κατόπιν την τιμή της παράστασης $\vec{\alpha}^2 + \vec{\alpha} \cdot (2\vec{\beta})$ (Μονάδες 10)
- β) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και $\vec{\beta} + 2\vec{\alpha}$. (Μονάδες 15)

20) ΑΣΚΗΣΗ 2-20058 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, \sqrt{3})$ και $\vec{\beta} = (\sqrt{3}, 3)$. Να υπολογίσετε:

α) τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ (Μονάδες 10)

β) το διάνυσμα $\vec{u} = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 \cdot \vec{\alpha}$ (Μονάδες 15)

21) ΑΣΚΗΣΗ 2-20059 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 3)$ και $\vec{\beta} = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x για τον οποίο τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = (x^2, x-1)$ είναι κάθετα. (Μονάδες 15)

22) ΑΣΚΗΣΗ 2-20069 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

α) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\alpha}$ πάνω στο $\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)

β) Να αναλύσετε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με το $\vec{\beta}$. (Μονάδες 15)

23) ΑΣΚΗΣΗ 2-20070 §1.5

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα του επιπέδου για τα οποία ισχύουν $3|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| = 9$, $2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$

α) Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. $\vec{\alpha}$ (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. (Μονάδες 13)

24) ΑΣΚΗΣΗ 2-22505 §1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{u} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$, $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{u} \perp \vec{v}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u} - 3\vec{v}$ και $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u} - 3\vec{v}| = 14$ (Μονάδες 13)

25) ΑΣΚΗΣΗ 2-22519 §1.5

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{\beta} = \left(\frac{1}{7}, 1\right) \text{ και } \vec{\alpha} + 7\vec{\beta} = (\mu + 2, 7 - 2\mu), \mu \in \mathbb{R}$$

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του μ . (Μονάδες 10)

β) Αν $\mu = 2$, τότε:

- i. να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} = (3, -4)$ και ότι το $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο $\vec{\alpha} + 7\vec{\beta}$. (Μονάδες 10)
 ii. να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ (Μονάδες 5)

26) ΑΣΚΗΣΗ 2-22524§1.5

Έστω $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (-5, 1)$ δύο διανύσματα.

- α) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ και να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|}{\sqrt{-\vec{\alpha}\vec{\beta}}}$ (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$ (Μονάδες 12)

27) ΑΣΚΗΣΗ 2-22527§1.5

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|^2 + |\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = 2|\vec{\alpha}|^2 + 2|\vec{\beta}|^2 \quad (\text{Μονάδες 12})$$

- β) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά ίση με τη μονάδα και $\overline{AB} = \vec{\alpha}, \overline{AD} = \vec{\beta}$. Αν η διαγώνιος του ΑΓ έχει μήκος $\sqrt{3}$, να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ. (Μονάδες 13)

28) ΑΣΚΗΣΗ 2-22530§1.5

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ ώστε $\overline{AB} = (-1, 4)$ και $\overline{AG} = (3, 6)$.

- α) Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο και να βρείτε αν η γωνία Α του τριγώνου είναι οξεία, ορθή ή αμβλεία. (Μονάδες 15)
 β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

29) ΑΣΚΗΣΗ 4-18606§1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\overline{OA} = (4, -2)$ και $\overline{OB} = (1, 2)$, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων.

- α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overline{OA}$ και $\overline{OB}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 4)
 β) Αν $\Gamma(\alpha, \beta)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β, τότε:
 i) να αποδείξετε ότι: $\overline{AB} = (-3, 4)$ και $\overline{AG} = (\alpha - 4, \beta + 2)$ (Μονάδες 5)
 ii) να αποδείξετε ότι: $4\alpha + 3\beta = 10$ (Μονάδες 6)
 iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overline{OG}$ και $\overline{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 10)

30) ΑΣΚΗΣΗ 4-18616§1.5

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 1, (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 60^\circ$ και

$$\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

- α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ (Μονάδες 3)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

- i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$ (Μονάδες 6)
- ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)
- iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα. (Μονάδες 8)

31) ΑΣΚΗΣΗ 4-18618§1.5

α) Να εξετάσετε πότε ισχύει καθεμιά από τις ισότητες: $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$ και $|\vec{u} + \vec{v}| = ||\vec{u}| - |\vec{v}||$
(Μονάδες 10)

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{3} = \frac{|\vec{\beta}|}{4} = \frac{|\vec{\gamma}|}{7}$.

- i) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$ και $\vec{\beta} \uparrow \downarrow \vec{\gamma}$ (Μονάδες 8)
- ii) Να αποδείξετε ότι: $7\vec{\alpha} + 3\vec{\gamma} = \vec{0}$ (Μονάδες 7)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο :

Η ΕΥΘΕΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

§2.1 ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

§2.2 ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-18575 §2.1 - §2.2

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $y = -x + 7$ (Μονάδες 15)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-18584 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y - 8 = 0$, $\varepsilon_2 : 2x - 4y + 10 = 0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A. (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 (Μονάδες 10)
- γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2 , τότε να βρείτε τις συντεταγμένες του B. (Μονάδες 10)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-18587 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 8y + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 2x + y + 15 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα γ'γ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B (Μονάδες 10)
- β) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{MK}$ (Μονάδες 15)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-18589 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 8x - y - 28 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y + 1 = 0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα x'x (Μονάδες 10)

- β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το Μ και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda x - y - 3\lambda + 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 15)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-18592 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : x - 3y + 5 = 0$ και $\varepsilon_2 : 3x + y - 5 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α και την αρχή Ο των αξόνων. (Μονάδες 7)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-18595 §2.1 - §2.2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 8)
- β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα γ'γ στο σημείο Β και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα χ'χ στο σημείο Γ, τότε:
- να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (Μονάδες 8)
 - να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ έχει εξίσωση την $3x - 4y - 12 = 0$ (Μονάδες 9)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-18600 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες χ'χ και γ'γ στα σημεία Α(3,0) και Β(0,6) αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 (Μονάδες 8)
- β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1 , τότε να βρείτε:
- την εξίσωση της ευθείας ε_2 (Μονάδες 9)
 - τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 8)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-18601 §2.1 - §2.2

Έστω Μ(3,5) το μέσο ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με Α(1,1).

- α) Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες του σημείου Β. (Μονάδες 6)
 - την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Β. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Κ του άξονα χ'χ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA) = (KB)$. (Μονάδες 12)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-18602 §2.1 - §2.2

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon) : y + x = 1$ και το σημείο Α(2,-4).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην (ε). (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την προβολή του σημείου Α πάνω στην ευθεία (ε). (Μονάδες 15)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-20060 §2.1 - §2.2

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, 0)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 4\vec{\alpha} - \frac{1}{3}\vec{\beta}$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{-2}{5}\vec{u}$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 2)$ (Μονάδες 15)

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-20063 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μέσο Μ και $A(1, -2)$, $M(-2, 5)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Β. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, καθώς και τα κοινά σημεία αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ (Μονάδες 15)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-20065 §2.1 - §2.2

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: x + y + 2 = 0$ και το σημείο $A(5, 1)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_1 , η οποία διέρχεται από το Α και είναι κάθετη προς την ευθεία ε. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η_2 , η οποία διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών η_1 και η_2 και την απόστασή του από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-20066 §2.1 - §2.2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(3, 1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(2, 4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΓ. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις του ύψους ΒΔ και της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 18)

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-20068 §2.1 - §2.2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-5, 4)$, $B(-1, 6)$, $\Gamma(4, 1)$ και σημείο Μ της πλευράς ΑΒ για το οποίο ισχύει $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AB}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overline{AB}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ. (Μονάδες 9)

γ) Αν το σημείο Μ έχει συντεταγμένες $\left(-4, \frac{9}{2}\right)$, να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Γ, Μ. (Μονάδες 10)

15) ΑΣΚΗΣΗ 2-20072 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε μια ευθεία (ϵ) και ένα σημείο $A(6, -1)$ εκτός της (ϵ).

Έστω $M(2, 1)$ η προβολή του A στην (ϵ). Να βρείτε:

- α)** Την εξίσωση της ευθείας (ϵ). (Μονάδες 13)
β) Το συμμετρικό του A ως προς την (ϵ). (Μονάδες 12)

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-20073 §2.1 - §2.2

Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(-2, -4)$.

- α)** Να αποδείξετε ότι σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε το συμμετρικό Δ του B ως προς το μέσο M της $ΑΓ$. (Μονάδες 10)
γ) Τι σχήμα είναι το $ΑΒΓΔ$; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 7)

17) ΑΣΚΗΣΗ 2-22517 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε τα σημεία $A(6, \mu)$ και $B(\mu+2, \mu+1)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$, τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B . (Μονάδες 15)
β) Να βρείτε για ποια τιμή του μ , το σημείο $\Gamma(4, 2)$ περιέχεται στην ευθεία $ΑΒ$. (Μονάδες 10)

18) ΑΣΚΗΣΗ 2-22520 §2.1 - §2.2

Έστω $A(-1, 1)$, $B(2, 0)$ και $\Gamma(-1, 3)$ τρία σημεία του επιπέδου.

- α)** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ ώστε:
 $3\overline{AM}^2 - 5\overline{BM}^2 + 2\overline{GM}^2 = 0$ είναι η ευθεία $\epsilon: 5x - 3y + 1 = 0$. (Μονάδες 15)
β) Να βρείτε ευθεία κάθετη στην (ϵ) που διέρχεται από το μέσο K του τμήματος $ΑΓ$. (Μονάδες 10)

19) ΑΣΚΗΣΗ 2-22525 §2.1 - §2.2

Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ οι πλευρές του $ΑΒ$ και $ΑΔ$ βρίσκονται πάνω στις ευθείες με εξισώσεις $\epsilon_1: 2x + y + 2 = 0$ και $\epsilon_2: x - 2y + 6 = 0$ αντίστοιχα. Αν το κέντρο του είναι το σημείο $K(-1, -2)$, τότε:

- α)** να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και να αποδείξετε ότι $\Gamma(0, -6)$. (Μονάδες 12)
β) να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $ΓΔ$ και τις συντεταγμένες της κορυφής Δ . (Μονάδες 13)

20) ΑΣΚΗΣΗ 2-22531 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε την εξίσωση $(2\lambda - 1)x + (18 - 11\lambda)y + 9\lambda - 17 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, (1)

- α)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, παριστάνει ευθεία. (Μονάδες 10)
β) Αν (ϵ_1) , (ϵ_2) είναι οι ευθείες που προκύπτουν από την (1) για $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ αντίστοιχα, να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

21) ΑΣΚΗΣΗ 4-18612 §2.1 - §2.2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 7)
- β) Αν $\varepsilon_1 : x + y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + y - 4 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 και ε_2 (Μονάδες 8)
- γ) Αν Α είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και Β σημείο της ευθείας ε_2 με τεταγμένη το 1, τότε:
- να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β (Μονάδες 2)
 - να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο ΑΓΒΔ να είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)

22) ΑΣΚΗΣΗ 4-20147 §2.1 - §2.2

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda+1, \lambda-1)$, $B(2,2)$ και $\Gamma(4,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. (Μονάδες 7)
- β) Αν το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ, να βρείτε την τιμή του λ (Μονάδες 8)
- γ) Για $\lambda = 4$, να βρείτε σημείο Δ ώστε το τετράπλευρο ΑΒΔΓ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

23) ΑΣΚΗΣΗ 4-22562 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε τα σημεία $A(-2t+6, 0)$, $B(0, 4t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. (Μονάδες 5)
- β) Να δείξετε ότι το Μ κινείται σε ευθεία την οποία να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)
- γ) Αν $(AB) = d$, να αποδείξετε ότι $d^2 \geq 20$ και κατόπιν να βρείτε τα Α, Β ώστε η απόσταση (ΑΒ) να είναι ελάχιστη. (Μονάδες 10)

24) ΑΣΚΗΣΗ 4-22563 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε το σημείο $M(-3,-2)$ και ευθεία που διέρχεται από το Μ και τέμνει τους αρνητικούς ημιάξονες στα σημεία Α, Β.

- α) Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας είναι αρνητικός. (Μονάδες 10)
- β) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.
- Να αποδείξετε ότι $E(\lambda) \geq 12$ για κάθε $\lambda < 0$ (Μονάδες 10)
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν. (Μονάδες 5)

25) ΑΣΚΗΣΗ 4-22564 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε τις εξισώσεις $\varepsilon_\lambda : (\lambda-1)x + (\lambda-2)y - \lambda + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις (ε_λ) παριστάνει ευθεία και κατόπιν ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο. (Μονάδες 10)
- β) Έστω $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 2$. Αν η (ε_λ) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$ αντίστοιχα, τότε:
- να εκφράσετε τα α, β συναρτήσει του λ . (Μονάδες 5)

ii. να βρείτε την ευθεία της παραπάνω μορφής ώστε να ισχύει $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 2$.

(Μονάδες 10)

26) ΑΣΚΗΣΗ 4-22565 §2.1 - §2.2

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2(xy - 2x - 2y) + 3 = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι παριστάνει δυο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 8)

Έστω $\varepsilon_1: x + y = 1$ και $\varepsilon_2: x + y = 3$ οι δυο ευθείες.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραapeζίου που σχηματίζεται από τους άξονες και τις ευθείες. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή Ο και τέμνει τις ε_1 και ε_2 στα σημεία Α, Β ώστε $(AB) = 2$. (Μονάδες 10)

27) ΑΣΚΗΣΗ 4-22574 §2.1 - §2.2

Θεωρούμε σημεία $M(\alpha, \alpha+1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι κινούνται στην ευθεία $y = x + 1$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το συμμετρικό $M'(\alpha', \beta')$ του Μ ως προς την ευθεία $x - 2y = 2$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι το M' κινείται, για τις διάφορες τιμές του α , στην ευθεία $x - 7y - 17 = 0$

(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν οι τρεις ευθείες συντρέχουν και κατόπιν να αιτιολογήσετε το αποτέλεσμα, αφού πρώτα σχεδιάσετε τις τρεις ευθείες. (Μονάδες 5)

§2.3 ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΘΕΜΑ 2ο

28) ΑΣΚΗΣΗ 2-20062 §2.3

Δίνονται τα σημεία Α(1, -2) και Β(2, 3).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α, Β.

(Μονάδες 11)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων και Κ, Λ είναι τα σημεία τομής της ε με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 14)

29) ΑΣΚΗΣΗ 2-20140 §2.3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(3, 2), Β(-3, 1) και Γ(4, 0).

α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ καθώς και την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται αυτό. (Μονάδες 16)

30) ΑΣΚΗΣΗ 2-22506 §2.3

Θεωρούμε τα σημεία Α(α, 0) και Β(0, β), όπου $\alpha \cdot \beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$

- α)** Να αποδείξετε ότι $AB: y = -\frac{\beta}{\alpha}x + \beta$ (Μονάδες 7)
- β)** Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha, \beta)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία AB , τότε:
- i) να βρείτε την εξίσωση της ε . (Μονάδες 9)
- ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο K και τον άξονα $y'y$ στο σημείο L , να αποδείξετε ότι $(OKL) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2}{2\alpha\beta}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 9)

31) ΑΣΚΗΣΗ 2-22521 §2.3

Θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda+1, 2\lambda)$, $B(2-\lambda, 4)$ και $\Gamma(-1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- α)** Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ , τα σημεία σχηματίζουν τρίγωνο. (Μονάδες 10)
- β)** Έστω ότι για το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισχύει $(AB\Gamma) = 3$.
- i. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$ ή $\lambda = 2$. (Μονάδες 10)
- ii. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ όταν $\lambda = 1$. (Μονάδες 5)

32) ΑΣΚΗΣΗ 2-22522 §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = x + 1$ και τα σημεία $A(2, 0)$ και $B(6, -3)$.

- α)** Να προσδιορίσετε σημείο Γ της ευθείας ε ώστε το τρίγωνο $AB\Gamma$ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη $B\Gamma$. (Μονάδες 15)
- β)** Έστω $\Gamma(1, 12)$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (Μονάδες 10)

33) ΑΣΚΗΣΗ 2-22523 §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: y = x + k - 1$, όπου k θετικός ακέραιος μεγαλύτερος της μονάδας.

- α)** Να βρείτε με τη βοήθεια του k , τα σημεία τομής A , B της ευθείας με τους άξονες $x'x$, $y'y$ και το εμβαδόν του τριγώνου OAB . (Μονάδες 13)
- β)** Αν ισχύει $(OAB) < 2$ να αποδείξετε ότι $k = 2$. (Μονάδες 12)

34) ΑΣΚΗΣΗ 2-22529 §2.3

Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon: 3x - 4y + 2 = 0$ και το σημείο $A(-2, 1)$.

- α)** Να αποδείξετε ότι το A δεν ανήκει στην (ε) και να βρείτε την απόστασή του από αυτή. (Μονάδες 10)
- β)** Να βρείτε όλες τις ευθείες που είναι παράλληλες στην (ε) και απέχουν από το A απόσταση ίση με 3 μονάδες. (Μονάδες 15)

35) ΑΣΚΗΣΗ 2-22532 §2.3

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων στο οποίο απεικονίζεται ο χάρτης του νομού Αρκαδίας. Τα χωριά Δόξα (Δ), Λευκοχώρι (Λ) και Κακουρέϊκα (K) έχουν αντίστοιχες συντεταγμένες $\Delta(-2, 2)$, $\Lambda(2, -1)$ και $K(-1, -10)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα χωριά Δόξα (Δ) και Λευκοχώρι (Λ). (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε την απόσταση του Κ από την ευθεία (ε). (Μονάδες 8)
- γ) Να εξετάσετε, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, ποιο από τα χωριά Δόξα και Λευκοχώρι απέχει τη μικρότερη απόσταση από τα Κακουρέϊκα. (Μονάδες 9)

36) ΑΣΚΗΣΗ 2-22537 §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(\lambda-1, \lambda+2)$ και $B(\mu+3, \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β κινούνται στις ευθείες $\varepsilon_1: y = x + 3$ και $\varepsilon_2: y = x - 3$ αντίστοιχα. (Μονάδες 12)
- β) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. (Μονάδες 13)

37) ΑΣΚΗΣΗ 2-22538 §2.3

Δίνονται τα σημεία $A(0,2)$, $B(1,5)$ και $\Gamma(t-1, 3t-2)$, $t \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ. (Μονάδες 7)
- β) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι ανεξάρτητα του t. (Μονάδες 18)

ΘΕΜΑ 4ο

38) ΑΣΚΗΣΗ 4-18609 §2.3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\overline{AB} = (\lambda, \lambda + 1)$, $\overline{AG} = (3\lambda, \lambda - 1)$, όπου $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -2$, και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ

- α) Να αποδείξετε ότι $\overline{AM} = (2\lambda, \lambda)$ (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overline{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha} = \left(\frac{2}{\lambda}, -\lambda \right)$ (Μονάδες 8)
- γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 10)

39) ΑΣΚΗΣΗ 4-18610 §2.3

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - y - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2: 10x + y - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους Μ (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο Μ ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 8x + y - 6 = 0$ (Μονάδες 7)
- γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε:
- να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ (Μονάδες 5)
 - αν Κ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$

(Μονάδες 6)

40) ΑΣΚΗΣΗ 4-18611§2.3

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : x - 4y - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B (Μονάδες 7)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - 2y - 5 = 0$ και $x - 2y + 25 = 0$

(Μονάδες 10)

41) ΑΣΚΗΣΗ 4-18613§2.3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2xy - 3\lambda x + 3\lambda y + 2\lambda^2 = 0$, με λ διαφορετικό του 0.

- α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει στο επίπεδο, δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες έχει κλίση ίση με 1. (Μονάδες 12)
- β) Αν το εμβαδόν του τετραγώνου του οποίου οι δύο πλευρές βρίσκονται πάνω στις ευθείες του ερωτήματος α) είναι ίσο με 2, να βρείτε την τιμή του λ . (Μονάδες 13)

42) ΑΣΚΗΣΗ 4-18614§2.3

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y - 4 = 0$

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2 (Μονάδες 5)
- β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Γ , τότε:
- i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ (Μονάδες 5)
- ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ (Μονάδες 5)
- γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις. (Μονάδες 10)

43) ΑΣΚΗΣΗ 4-18615§2.3

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon : y = x$ με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 < x_2$. Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

- α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B . (Μονάδες 13)
- β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 5)
- γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(x,y)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $x - y - 2 = 0$ και $x - y + 6 = 0$ (Μονάδες 7)

44) ΑΣΚΗΣΗ 4-18617§2.3

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με μέτρα 2, 6 αντίστοιχα και $\phi \in [0, \pi]$ η μεταξύ τους γωνία. Επίσης δίνεται η εξίσωση $(\vec{\alpha}\vec{\beta} + 12)x + (\vec{\alpha}\vec{\beta} - 12)y - 5 = 0$ (1)

- α)** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε $\phi \in [0, \pi]$. (Μονάδες 3)
- β)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ (Μονάδες 7)
- γ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} = -3\vec{\alpha}$ (Μονάδες 7)
- δ)** Αν η παραπάνω ευθεία είναι παράλληλη στην διχοτόμο πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων, να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \perp \vec{\alpha}$ (Μονάδες 8)

45) ΑΣΚΗΣΗ 4-18620 §2.3

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (2\lambda - 1)x + y - 5 = 0$, $\varepsilon_2: (\lambda^2 + 3)x - y - 15 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(2, -1)$.

- α)** Να αποδείξετε ότι, για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται. (Μονάδες 7)
- β)** Αν οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- γ)** Έστω $\lambda = 2$ και B, Γ τα σημεία που οι ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $y'y$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (Μονάδες 8)

46) ΑΣΚΗΣΗ 4-18621 §2.3

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon: 2kx - (1+k)y + 1 - 3k = 0$ και $\zeta: (1+3k)x + (k-1)y + 2 - 6k = 0$, όπου $k \in \mathbb{R}$

- α)** Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του k , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες. (Μονάδες 10)
- β)** Να βρείτε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες (ε) και (ζ). (Μονάδες 15)

47) ΑΣΚΗΣΗ 4-18622 §2.3

Δίνονται τα σημεία $A\left(1, \frac{-3}{2}\right)$, $B(2, -1)$ και $\Gamma\left(\mu, \frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{B\Gamma}$ (Μονάδες 8)
- β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B. (Μονάδες 8)
- γ)** Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu \cdot \overline{B\Gamma} = -\overline{AB}$ (Μονάδες 6)
- δ)** Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma) = 1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων. (Μονάδες 3)

48) ΑΣΚΗΣΗ 4-18623 §2.3

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4)$, $B(5, 7)$ και $\Gamma(2\mu+1, 3\mu-2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overline{AB}$ και $\overline{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ . (Μονάδες 8)
- β)** Να αποδείξετε ότι:

- i) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ δεν εξαρτάται από το μ . (Μονάδες 5)
 ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε , της οποίας να βρείτε την εξίσωση. (Μονάδες 7)
 γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ ; (Μονάδες 5)

49) ΑΣΚΗΣΗ 4-22568 §2.3

Σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$, $A(-1,3)$ και $B(2,-1)$ ώστε να σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν $(MAB) = 4$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του M είναι δυο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ παράλληλες μεταξύ τους. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε την απόσταση των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. (Μονάδες 5)
 γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα A, B είναι η μεσοπαράλληλη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Πως αιτιολογείται γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό; (Μονάδες 12)

50) ΑΣΚΗΣΗ 4-22571 §2.3

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(-3,4)$ και $\Gamma(2\lambda+1,1-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , τα A, B, Γ σχηματίζουν τρίγωνο και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ είναι σταθερό. (Μονάδες 12)
 β) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ κινείται σε ευθεία παράλληλη στην AB. (Μονάδες 6)
 γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την BΓ. (Μονάδες 7)

51) ΑΣΚΗΣΗ 4-22577 §2.3

Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy θεωρούμε τις ευθείες

$$\varepsilon_\lambda : x + (\lambda + 2)y - \lambda + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες διέρχονται από σταθερό σημείο M. (Μονάδες 7)
 β) Να αποδείξετε ότι $d(O, \varepsilon_\lambda) \leq \sqrt{10}$ (Μονάδες 8)
 γ) Να βρείτε ποια από τις ευθείες της παραπάνω μορφής απέχει την μέγιστη απόσταση από το O. (Μονάδες 10)

52) ΑΣΚΗΣΗ 4-22588 §2.3

Θεωρούμε τα σημεία $A(2,2)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(0,2)$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x,y)$ ώστε $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 - 2\overline{GM}^2 = 3$ είναι η ευθεία $\varepsilon : x - 2y + 1 = 0$. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε:
 i. Σημείο K στον άξονα $x'x$ ώστε το συμμετρικό του ως προς την ευθεία του ερωτήματος α) να είναι σημείο Λ του άξονα $y'y$. (Μονάδες 10)
 ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΣ όπου Σ είναι το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 5)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

§3.1 Ο ΚΥΚΛΟΣ

ΘΕΜΑ 2ο

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-22507 §3.1

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(0, -5)$ και ακτίνα $\rho = 3$ (Μονάδες 12)
- β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του παραπάνω κύκλου. (Μονάδες 13)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-22508 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$ και έχει κέντρο το $K(4, 8)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $C: (x - 4)^2 + (y - 8)^2 = 5$, και έπειτα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία O και K. (Μονάδες 13)
- β) Από τα σημεία του κύκλου C να βρείτε τις συντεταγμένες:
- i) του σημείου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)
 - ii) του σημείου που απέχει τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων. (Μονάδες 6)

3) ΑΣΚΗΣΗ 2-22533 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(x, y)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(1, 0)$. Αν τα σημεία αυτά σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα τη ΒΓ, τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι το A κινείται στον κύκλο $C: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$. (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του A, ώστε το τρίγωνο ABΓ να είναι και ισοσκελές. (Μονάδες 12)

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-22534 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $K(2, -1)$ και $A(-6, 5)$.

- α) Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο K που διέρχεται από το A, έχει εξίσωση $C: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 100$ (Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο C στο σημείο A και έχει ακτίνα ίση με το μισό της ακτίνας του C. (Μονάδες 13)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-22536 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Οxy θεωρούμε τα σημεία $A(1, 0)$, $B(3, -2)$ και την ευθεία $\varepsilon: x + y + 1 = 0$. Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της μεσοκάθετης του τμήματος AB. (Μονάδες 10)
 β) Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε. (Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 4ο

6) ΑΣΚΗΣΗ 4-22557§3.1

Έστω η εξίσωση: $(x - \lambda + 6)^2 + (y - 2\lambda)^2 = -\lambda^2 + 8\lambda - 12$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda = 2$ και τι όταν $\lambda = 6$; (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα (2,6) η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο. (Μονάδες 8)
 γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα (2,6), να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του. (Μονάδες 9)

7) ΑΣΚΗΣΗ 4-22558§3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και μία τυχούσα διάμετρό του AB με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

- α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_1$; (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(k, \lambda)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$ είναι ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = 9$. (Μονάδες 12)
 γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$. (Μονάδες 8)

8) ΑΣΚΗΣΗ 4-22581§3.1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 4$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η εξίσωση παριστάνει κύκλο C του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 8)
 β) Ο κύκλος C εφάπτεται στον άξονα $x'x$ και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής τους. (Μονάδες 7)
 γ) Το σημείο $M(2, -1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που τέμνει τον κύκλο σε δυο σημεία A, B ώστε η χορδή AB του κύκλου να έχει μέσο το M. (Μονάδες 10)

9) ΑΣΚΗΣΗ 4-22584§3.1

Δίνονται οι εξισώσεις

$$(x + y - 1)(x + y + 1) = 2xy \quad (1) \text{ και } (\lambda - 1)x + (2\lambda + 3)y + 2\lambda - 5 = 0 \quad (2), \lambda \in \mathbb{R}$$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 1$. (Μονάδες 8)
 β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (2) παριστάνει ευθεία. Κατόπιν να αποδείξετε ότι οι ευθείες που προκύπτουν από την (2) για τις διάφορες τιμές του λ διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

- γ) Έστω A και B τα σημεία τομής του κύκλου C με τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy αντίστοιχα. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε η ευθεία AB να προκύπτει από την εξίσωση (2). (Μονάδες 7)

10) ΑΣΚΗΣΗ 4-22586 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + y^2 - (3\alpha + 2)x + \alpha^2 - 4 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση παριστάνει κύκλο. Κατόπιν, να βρείτε για ποιες τιμές του α, ο κύκλος διέρχεται από την αρχή O. (Μονάδες 10)
- β) Έστω C ο κύκλος που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση όταν $\alpha = 2$ και $y = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο C σε σημείο A διαφορετικό από το O.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του A συναρτήσει του λ. (Μονάδες 10)
 - Να αποδείξετε ότι το μέσο M του τμήματος OA κινείται σε κύκλο σταθερής ακτίνας ο οποίος διέρχεται από το O. (Μονάδες 5)

11) ΑΣΚΗΣΗ 4-22587 §3.1

Σε καρτεσιανό σύστημα Oxy, θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-25, 0)$ και $B(-1, 0)$ για τα οποία ισχύει $|\overline{AM}| = 5|\overline{BM}|$.

- α) Να αποδείξετε ότι το σημείο M ανήκει στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 25$. (Μονάδες 10)
- β) Θεωρούμε το σημείο $\Sigma(7, 1)$.
- Να εξετάσετε αν το σημείο Σ βρίσκεται στο εσωτερικό ή το εξωτερικό του κύκλου C. (Μονάδες 5)
 - Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες, από το σημείο Σ προς τον κύκλο, είναι μεταξύ τους κάθετες. (Μονάδες 10)

12) ΑΣΚΗΣΗ 4-22589 §3.1

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$, $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$ ώστε να ισχύει $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 3\overline{AM} \cdot \overline{BM}$

- α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M είναι ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = 20$ (Μονάδες 10)

- β) Έστω Γ, Δ σημεία του κύκλου C ώστε $\left(\frac{\Gamma\Delta}{4}\right)^2 = 5$

- Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ και η αρχή των αξόνων O, είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)
- Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overline{M\Gamma} \cdot \overline{M\Delta}$ όταν το M κινείται στον κύκλο. (Μονάδες 5)

13) ΑΣΚΗΣΗ 4-22590 §3.1

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda - 7)y + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του λ, με $\lambda \neq 5$, παριστάνει κύκλο. Κατόπιν να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση, όταν $\lambda = 5$. (Μονάδες 12)
- β) Έστω C_1 , C_2 οι κύκλοι που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση όταν $\lambda = 3$ και $\lambda = 9$ αντίστοιχα.

- i. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι C_1 και C_2 εφάπτονται εξωτερικά. (Μονάδες 6)
 ii. Να βρείτε το σημείο επαφής των κύκλων. (Μονάδες 7)

§3.2 Η ΠΑΡΑΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ 2ο

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-22511 §3.2

Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 4x$ και την κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = \frac{p}{2}$, όπου p είναι η παράμετρος της παραβολής C .

- α) Να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής. (Μονάδες 10)
 β) Αν η ευθεία ε τέμνει την παραβολή C στα σημεία της B και Γ , τότε:
 i) να βρείτε τις συντεταγμένες των B και Γ , καθώς και τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C στα σημεία της αυτά αντίστοιχα. (Μονάδες 10)
 ii) να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ε_1 και ε_2 ανήκει στη διευθετούσα της C . (Μονάδες 5)

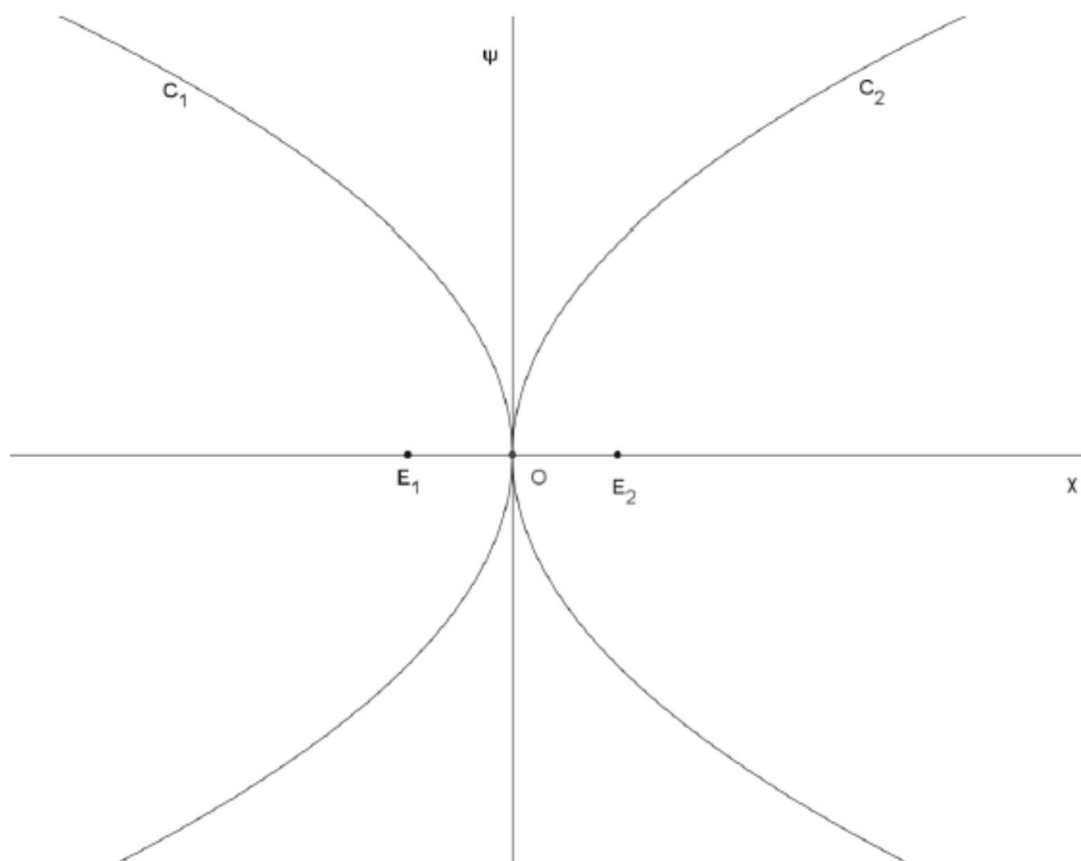
15) ΑΣΚΗΣΗ 2-22512 §3.2

Δίνεται η εξίσωση: $y^4 - 16x^2 = 0$ (1)

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει δύο παραβολές $C_1: y^2 = 4x$ και $C_2: y^2 = -4x$ και να βρείτε για καθεμιά από αυτές την εστία και τη διευθετούσα της. (Μονάδες 13)
 β) Αν E_1 και E_2 είναι οι εστίες των παραβολών C_1 και C_2 αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 . (Μονάδες 12)

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-22514 §3.2

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι παραβολές $C_1: y^2 = -2px$ και $C_2: y^2 = 2px$ οι οποίες έχουν εστίες τα σημεία E_1 και E_2 αντίστοιχα. Η απόσταση των σημείων E_1 και E_2 είναι ίση με 4 μονάδες.



- α) Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση καθεμιάς από τις παραβολές C_1 και C_2 .
(Μονάδες 15)
- β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 .
(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

17) ΑΣΚΗΣΗ 4-22559§3.2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon : x - y - 1 = 0$. Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1 .

- α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 25$ (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1 . (Μονάδες 7)
- γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 , τότε:
- να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά. (Μονάδες 5)
 - να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1 (Μονάδες 4)

18) ΑΣΚΗΣΗ 4-22560§3.2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C που διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(0,6)$.

- α) Να αποδείξετε ότι $C: x^2 + (y - 4)^2 = 4$ (Μονάδες 10)
- β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C . (Μονάδες 9)
- γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2 (Μονάδες 6)

19) ΑΣΚΗΣΗ 4-23321 §3.2

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $A(-2, -2)$, $B(0, -4)$, την παραβολή $y^2 = 4x$ και έστω $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της παραβολής.

- α) Να αποδείξετε ότι:
- $(MAB) = \frac{1}{4}(y^2 + 4y + 16)$
 - $(MAB) \geq 3$ (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του M ώστε το εμβαδόν (MAB) του τριγώνου MAB να γίνεται ελάχιστο. (Μονάδες 5)
- γ) Έστω ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν $M(1, -2)$. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της παραβολής στο M είναι παράλληλη στην πλευρά AB του τριγώνου MAB . (Μονάδες 10)

§3.3 Η ΕΛΛΕΙΨΗ

ΘΕΜΑ 2ο

20) ΑΣΚΗΣΗ 2-22509 §3.3

Δίνονται οι ελλείψεις $C_1: x^2 + 4y^2 = 20$ και $C_2: 4x^2 + y^2 = 20$

- α) Να αποδείξετε ότι οι ελλείψεις C_1 και C_2 έχουν την ίδια εκκεντρότητα. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ελλείψεων C_1 και C_2 ανήκουν στον κύκλο $C: x^2 + y^2 = 8$ (Μονάδες 13)

21) ΑΣΚΗΣΗ 2-22510 §3.3

Δίνονται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 = 20$, η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ και η κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x = 4$

. Αν Γ και Δ είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

- α) να βρείτε τις συντεταγμένες των Γ και Δ . (Μονάδες 11)
- β) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου C_1 στο σημείο του Γ και της έλλειψης C_2 στο σημείο της Δ , καθώς και το σημείο τομής των εφαπτομένων αυτών. (Μονάδες 14)

22) ΑΣΚΗΣΗ 2-22516 §3.3

Θεωρούμε την έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-\sqrt{5}, 0)$, $E(\sqrt{5}, 0)$ και μεγάλο άξονα μήκους 6 μονάδων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. (Μονάδες 10)

β) Αν είναι σημείο της έλλειψης για το οποίο ισχύει $ME' = 2 \cdot ME$, τότε:

i) να βρείτε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και ME' και ME . (Μονάδες 9)

ii) να αποδείξετε ότι η γωνία $E'ME$ είναι ορθή. (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4ο

23) ΑΣΚΗΣΗ 4-22592 §3.3

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overline{AM} \cdot \overline{BM} + \frac{16}{9} (\overline{OA} \cdot \overline{OB}) = 0$, όπου $A(-3, 0)$ και $B(3, 0)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 25$

(Μονάδες 11)

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B . (Μονάδες 10)

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 . (Μονάδες 4)

§3.4 Η ΥΠΕΡΒΟΛΗ

ΘΕΜΑ 2ο

24) ΑΣΚΗΣΗ 2-22515 §3.4

Μια έλλειψη C_1 έχει εκκεντρότητα ίση με $\frac{4}{5}$ και τις ίδιες εστίες με την υπερβολή $C_2 : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (Μονάδες 15)

β) Να παραστήσετε γραφικά την έλλειψη C_1 και την υπερβολή C_2 σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy . (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4ο

25) ΑΣΚΗΣΗ 4-22591 §3.4

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της υπερβολής που τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A'(-2, 0)$, $A(2, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $\Gamma(2\sqrt{5}, 2)$ είναι η $C_1 : \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου C_2 με διάμετρο το τμήμα $A'A$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι οι μοναδικές κοινές εφαπτόμενες της υπερβολής C_1 και του κύκλου C_2 είναι οι ευθείες $\varepsilon_1 : x = -2$ και $\varepsilon_2 : x = 2$. (Μονάδες 10)