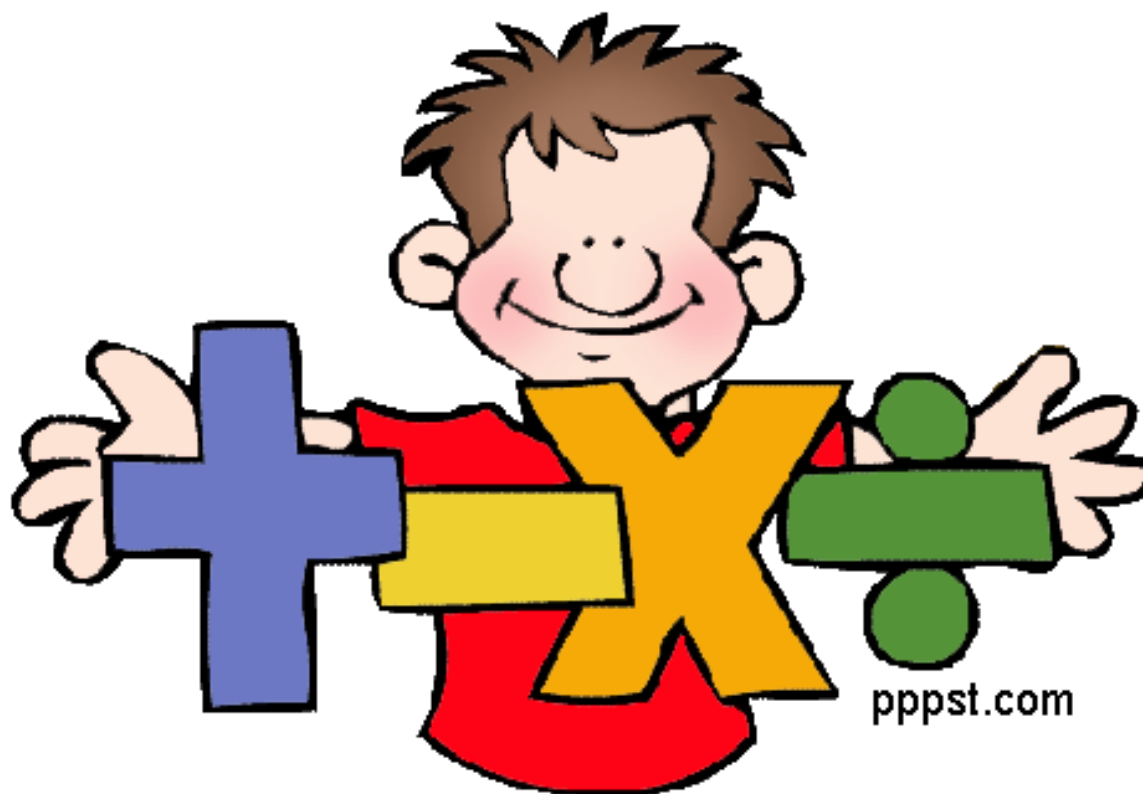


Πίνακας περιεχομένων

1. Επανάληψη στις βασικές γνώσεις της Άλγεβρας	7
Γενικές Ασκήσεις στις πράξεις Ρητών	10
1. Δυνάμεις ρητών αριθμών	11
Δυνάμεις ρητών με φυσικό εκθέτη	14
Ασκήσεις στις δυνάμεις πραγματικών	18
2. Εξισώσεις 1ου βαθμού	21
Επίλυση εξισώσεων 1 ^{ου} βαθμού	23
Το πρόβλημα και η επίλυσή του με τη βοήθεια των εξισώσεων	31
3. Προβλήματα με εξισώσεις	32
4. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού	37
Ασκήσεις στην τετραγωνική ρίζα	41
5. Συναρτήσεις	45
Ασκήσεις στις συναρτήσεις	47
6. Καρτεσιανές συντεταγμένες & γραφική παράσταση συνάρτησης	49
Ασκήσεις στην γραφική παράσταση συνάρτησης.....	51
7. Η συνάρτηση $y=ax$ & $y=ax+b$	52
Ασκήσεις στην ευθεία	55
8. Η υπερβολή	58
Ασκήσεις στην υπερβολή	59
9. Πυθαγόρειο θεώρημα.....	63
Ασκήσεις στο Πυθαγόρειο Θεώρημα	66
10. Εφαπτομένη οξείας γωνίας	71
Ασκήσεις στην εφαπτομένη οξείας γωνίας	72
11. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας.....	75
Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς	78
12. Επαναληπτικές ασκήσεις στην τριγωνομετρία.....	82
13. Εγγεγραμμένες γωνίες	83
Ασκήσεις στις εγγεγραμμένες γωνίες	84
14. Κανονικά πολύγωνα	86
Ασκήσεις στα κανονικά πολύγωνα.....	87

15.	Μήκος κύκλου και μήκος τόξου	88
	Ασκήσεις στο μήκος κύκλου – τόξου	91
16.	Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	93
	Ασκήσεις στο εμβαδόν κυκλικού δίσκου	94
17.	Εμβαδόν κυκλικού τομέα	95
	Ασκήσεις στο εμβαδόν κυκλικού τομέα	96
	Επαναληπτικές ασκήσεις στον κύκλο	97
18.	Γενικές επαναληπτικές ασκήσεις	98
19.	Επαναληπτικές ασκήσεις	102



Άλγεβρα

1. Επανάληψη στις βασικές γνώσεις της Άλγεβρας

Πρόσημα:

(+) συν

(-) μείον

Θετικοί : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο +.

Αρνητικοί : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο -.

Το μηδέν : δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.

Ομόσημοι : είναι οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο .

Ετερόσημοι : είναι οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Απόλυτη τιμή : ενός αριθμού είναι ο αριθμός που εκφράζει την απόσταση της τετμημένης του σημείου που παριστάνει τον αριθμό πάνω στον άξονα από την αρχή 0.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Πρόσθεση ομόσημων αριθμών :

Για να προσθέσω δύο ομόσημους αριθμούς , γράφω το πρόσημό τους και προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους .

Παράδειγμα :

$$(-3) + (-2) = -5$$

Πρόσθεση ετερόσημων αριθμών :

Για να προσθέσω δύο ετερόσημους αριθμούς , γράφω το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την μικρότερη .

Παράδειγμα :

$$(-7) + (+3) = -4$$

Απαλοιφή παρενθέσεων

- Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (+) απαλείφουμε το (+) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς με τα πρόσημά τους
- Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (−) τότε απαλείφουμε το (−) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς με αλλαγμένα πρόσημα

Παράδειγμα :

$$-(2 + 4 + 5) + (1 - 7 + 2) = -2 - 4 - 5 + 1 - 7 + 2 = -16 + 1 = -15$$

Γινόμενο ομόσημων αριθμών

Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός

Γινόμενο ετερόσημων αριθμών

Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι πάντα αρνητικός αριθμός

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Ένα γινόμενο πολλών παραγόντων είναι:

- Θετικός αριθμός όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.
- Αρνητικός αριθμός όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό

$$(+)(+) = + \quad (-)(-) = + \quad (+)(-) = - \quad (-)(+) = -$$

Οι ίδιοι κανόνες ισχύουν και για τη διαίρεση

Ιδιότητες πρόσθεσης		Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	Αντιμεταθετική	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
$(\alpha + \beta) + \gamma$ $= \alpha + (\beta$ $+ \gamma)$	Προσεταιριστική	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
$\alpha + 0 = \alpha$	Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
$\alpha + (-\alpha) = 0$	Αντίθετο στοιχείο	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$

Επιμεριστική ιδιότητα
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Γενικές Ασκήσεις στις πράξεις Ρητών

1. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) (-2) + (-5) \quad ii) (-13) + (+8) \quad iii) (+14) + (-14) \quad iv) (+13) + (-4)$$

2. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) -13 + 5 + 5 + 13 - 19 \quad ii) -(13 + 4 - 15) + (-3 + 5 + 9) \quad iii) +12 + (-4 - 2 + 15) - 13 + (1 - 3)$$

3. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) (-2)(-3) \quad ii) (-3)(+4) \quad iii) (-1)(-3) + (-2)(+4) \quad iv) (-2)(+3) - (-4)(-5)$$

4. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) -\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) \quad ii) \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)$$

5. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \quad ii) \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \quad iii) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$$

6. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) (-15) : (+3) \quad ii) (-21) : (-7) \quad iii) (+125) : (-25) \quad iv) (-1024) : (+2)$$

7. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) \frac{\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \quad ii) \frac{\left(-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right)}$$

8. Να κάνετε τις πράξεις :

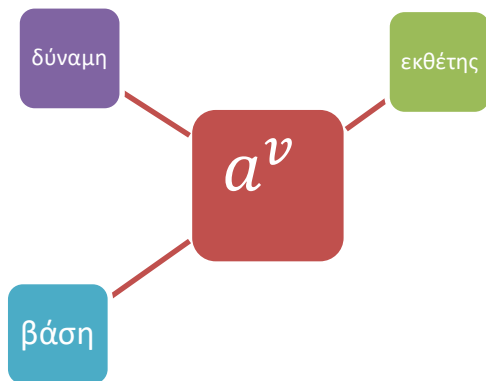
$$i) 1 + (-4) - 7 \quad ii) 2 + (5 - 8) - 5 + 4 \quad iii) 1 - 2 + (1 - 4) \quad iv) 5 - 3[4 - (3 - 6)]$$

9. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

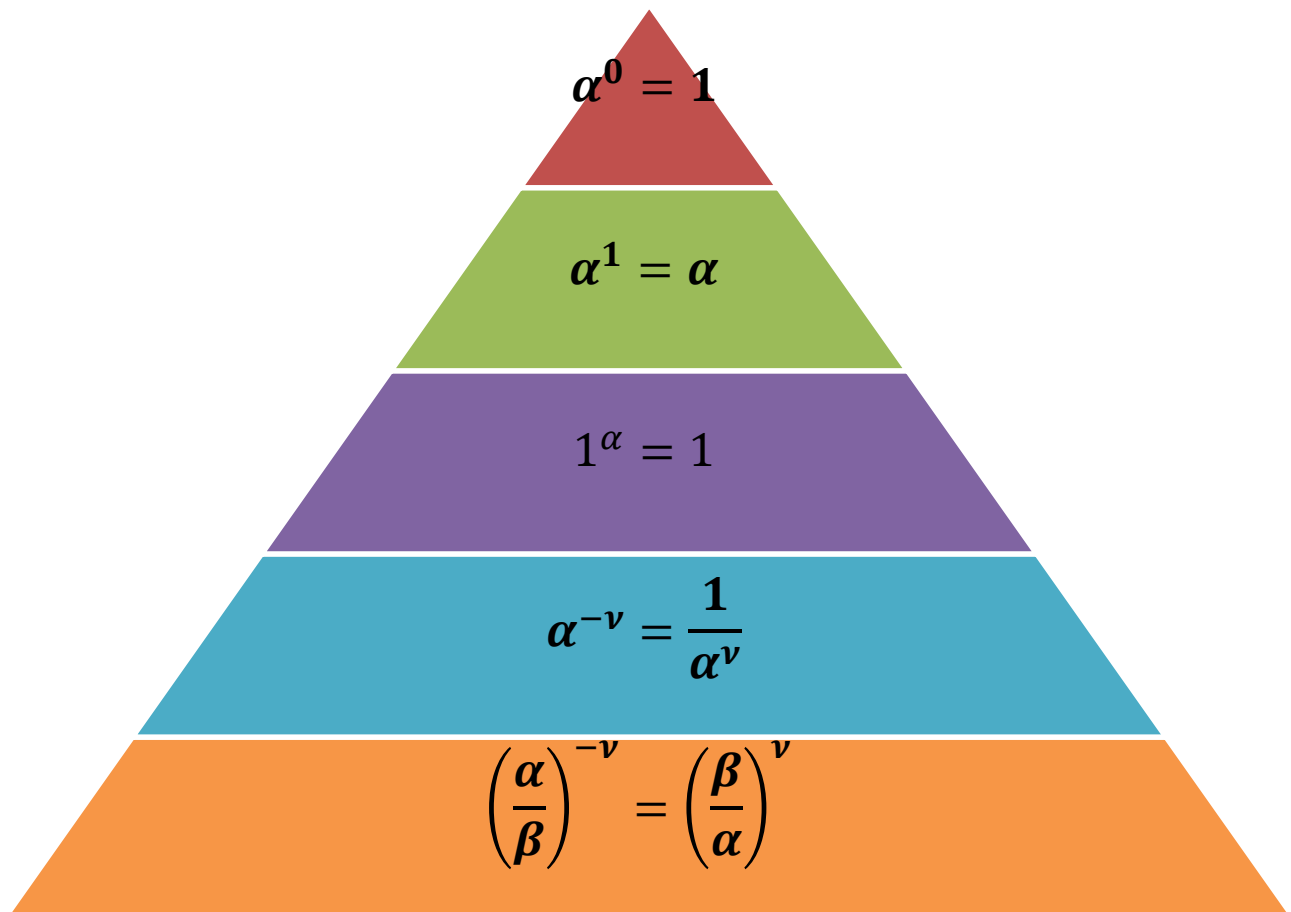
$$i) 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \quad ii) 1 - 3 \cdot \frac{5}{2} - 5 \left(2 - \frac{1}{4}\right) \quad iii) 2 - \left(1 + \frac{1}{-2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) : \left(-\frac{1}{6}\right)$$

1. Δυνάμεις ρητών αριθμών

Ορισμός: ονομάζουμε δύναμη με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη τον φυσικό αριθμό n ένα γινόμενο από n παράγοντες ίσους με α . $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$



Από τον ορισμό προκύπτουν



$$1) \alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu+\mu}$$

$$\text{παραδειγμα } x^2 \cdot x^3 = x^5$$



$$2) \alpha^{\nu} : \alpha^{\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$$

$$\text{παραδειγμα } x^{12} : x^3 = x^8$$



$$3) (\alpha^{\nu})^{\mu} = \alpha^{\nu \cdot \mu}$$

$$\text{παραδειγμα } (x^3)^5 = x^{15}$$



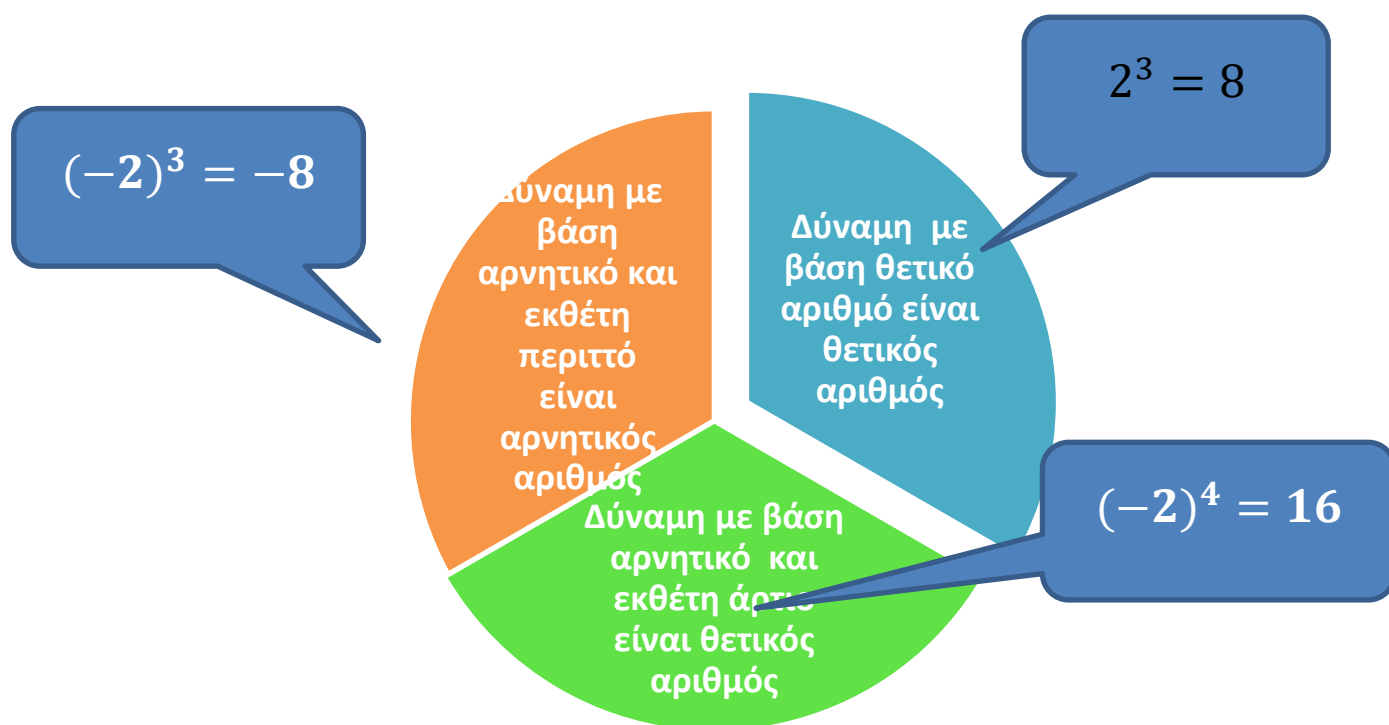
$$4) \alpha^{\nu} \cdot \beta^{\nu} = (\alpha\beta)^{\nu}$$

$$\text{παραδειγμα } 10^2 \cdot (0,5)^2 = (10 \cdot 0,5)^2 = 1^2 = 1$$



$$5) \frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$$

$$\text{παραδειγμα } \frac{(100)^2}{(25)^2} = \left(\frac{100}{25}\right)^2 = 4^2 = 16$$



Προτεραιότητα πράξεων :

1^{ον} γίνονται οι δυνάμεις

2^{ον} οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

3^{ον} οι προσθέσεις και οι αφαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

Αν υπάρχουν παρενθέσεις γίνονται πρώτα οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που ειπώθηκε

Δυνάμεις ρητών με φυσικό εκθέτη

1. Να υπολογίσεις τις δυνάμεις :

i) $4^2 =$ ii) $2^3 =$ iii) $(-3)^3 =$ iv) $(-2,5)^2 =$

v) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 =$ vi) $(-1)^3 =$ vii) $(-10)^4 =$

2. Να υπολογίσεις τον ρητό που αντιπροσωπεύει καθεμιά από τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις:

i) $-\left(\frac{3}{5}\right)^2 =$ ii) $-6^2 =$ iii) $-0,7^3 =$ iv) $-(-3)^3 =$ v) $-0,8^2 + 0,8^2 - 1^{30} =$

3. Να υπολογίσεις το ρητό που αντιπροσωπεύει καθεμιά από τις πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις

i) $(-1)^1 + (-2)^2 + (-3)^3 + (-4)^4 =$

ii) $-1^1 - 2^2 - 3^3 - 4^4 =$

4. Γράψε με μορφή μιας δύναμης καθένα από τα γινόμενα

i) $5^3 \cdot 5^4 =$ ii) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^5 =$ iii) $(-7) \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^3 =$

i) $5^3 \cdot 5^4$ iii) $(-7) \cdot (-7)^2 \cdot (-7)^3$

ii) $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^5$ iv) $9^2 \cdot 9^4 \cdot 9^6 \cdot 9^8$
v) $1,34 \cdot 1,34^5 \cdot 1,34^{10} \cdot 1,34^{20}$

5. Να υπολογίσεις τα γινόμενα :

a i) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3$ ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ iii) $(-6)^7 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^7 \cdot 1^7$ iv) $0,125^3 \cdot 80^3$

6. Να υπολογίσεις τα πηλίκα :

i) $\frac{16^5}{8^5}$ ii) $45^3 : (-9)^3$ iii) $501,6^3 : (-62,7)^3$ iv) $\frac{60^4}{20^4}$

7. Να υπολογίσεις τον αριθμό με τον οποίο είναι ίση καθεμιά από τις πιο κάτω δυνάμεις :

$$i) [(-3)^3]^2 \quad ii) [(-2 \cdot 5)^3]^3 \quad iii) [(-4 \cdot 250)^2]^2 \quad iv) (10^3)^3$$

8. Γράψε με τη μορφή μιας δύναμης καθεμιά από τις παραστάσεις :

$$i) (3^{10} \cdot 3^{11} \cdot 3^{12}) : (3 \cdot 3^8)$$

$$ii) (-4)^{20} : [-4 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^3]$$

$$iii) [(-0,57)^8 \cdot 0,57^{12}] : [(-0,57)^2]^3$$

9. Να υπολογίσεις το ρητό που αντιπροσωπεύει η παράσταση :

$$A = (-14)^6 : (-7)^6 - (-15)^4 : 5^4 + 36^3 (-4)^3 + (-1)^{10} : (-1)^9$$

10. Αν αφήσουμε μια μικρή μεταλλική σφαίρα να πέσει μόνη της από την κορυφή ενός πολύ ψηλού κτιρίου , η απόσταση της S από την κορυφή μετά t sec δίνεται από τον τύπο : $S=5t^2$

Να συμπληρώσεις τον πίνακα

t σε sec	0,1	0,3	0,5	1	2	2,5	3	3,5	4
S σε m									

11. Να υπολογίσεις το ρητό που αντιπροσωπεύει καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις

$$i) -1 - (-2)^2 - [(-3 - 4)^2 - (3 - 6)^2]$$

$$ii) -2^3 - (5 - 3)^4 + (6 + 4)^3 : (-5)^2$$

$$iii) 47,6 \cdot 8,2^3 - 26,9 \cdot 8,2^3 - 20,7 \cdot 8,2^3$$

12. Να κάνεις τις πιο κάτω σημειωμένες πράξεις :

$$i) \left(\frac{1}{6}\right)^{31} \cdot (-6)^{33}$$

$$ii) \left(-\frac{4}{3}\right)^{40} \cdot 0,75^{43}$$

$$iii) \left(\frac{1}{5}\right)^{42} \cdot (-5)^{44}$$

13. Να υπολογίσεις το ρητό που αντιπροσωπεύει η παράσταση :

$$\frac{\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] : \left[-\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{6}\right]}{\frac{3 \cdot (-2)^3}{5} \cdot \frac{(-1)^6}{7}}$$

14. Να υπολογίσεις το ρητό αριθμό που αντιπροσωπεύει η παράσταση :

$$K = -x + x^2 - x^3 + x^4 \quad \text{Όταν } x = -2$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΑΚΕΡΑΙΟ

1. Να υπολογίσεις τις δυνάμεις :

$$\begin{array}{llll} \text{i)} 2^{-2} & \text{iii)} \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} & \text{iv)} \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} & \text{v)} \left(-\frac{1}{5}\right)^{-3} \\ \text{ii)} (-2)^{-2} & & & \end{array}$$

2. Να κάνεις τις πιο κάτω σημειωμένες πράξεις :

$$\begin{array}{lll} \text{i)} 2^{-5} \cdot 2^3 & \text{iii)} 2^{-5} \cdot 2^3 & \text{v)} 2^{-4} \cdot 3^{-2} \\ \text{ii)} 4^{-6} : 8^{-6} & \text{iv)} 4^{-6} : 8^{-6} & \text{vi)} 12^{-4} : 12^{-6} \end{array}$$

3. Να κάνεις τις πιο κάτω σημειωμένες πράξεις :

$$\begin{array}{ll} \text{i)} (-2)^3 \cdot 10^{-1} & \text{iv)} 0,25^{-4} : (-0,25)^{-6} \\ \text{ii)} (7^{-3} \cdot 7^{-5})^{-4} & \text{v)} 5^{-5} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{-5} \\ \text{iii)} \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} & \text{vi)} (10^8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-4})^{-2} \end{array}$$

4. Να υπολογίσεις το ρητό που αντιπροσωπεύει καθεμιά από τις πιο κάτω παραστάσεις :

$$\begin{array}{l} \text{i)} 78^{-5} \cdot 78^{-6} \cdot 78 \cdot 78^{10} \cdot 78^0 \\ \text{ii)} 123^{-7} \cdot 123^{-8} \cdot \left[\left(\frac{1}{123}\right)^{-5}\right]^3 \end{array}$$

5. Να γράψεις με τη μορφή μιας δύναμης τους αριθμούς :

α) 0,1 β) 0,01 γ) 0,001 δ) -0,0001 ε) 1 000 000

6. Να υπολογίσεις το ρητό που αντιπροσωπεύει καθεμιά από τις πιο κάτω παραστάσεις :

$$\begin{array}{l} 4^{1-x} + 8^{2-x} - 16^{3-x} - 8^{x-2} - 4^{x-1} \text{ όταν } x = 3 \\ x^{y-1} - y^{1-x} \text{ όταν } x = 3, y = -2 \end{array}$$

Ασκήσεις στις δυνάμεις πραγματικών

1. Να γράψετε κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη

$$i) 3^5 \cdot 3^{-7} \quad ii) 2^7 : 2^{-3} \quad iii) (2^{-5})^{-2} \quad iv) 2^5 \cdot 3^5 \quad v) \frac{12^5}{4^5}$$

2. Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις :

$$i) 8 \cdot 2^5 \quad ii) 9 \cdot 3^{-5} \quad iii) \frac{32}{2^{10}} \quad iv) 4^5 \cdot 7^{10} \quad v) (-3)^2 \cdot 3^5 \quad vi) (-2)^7 \cdot 16$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης :

$$i) (3^4)^{-1} \cdot 3^6 \quad ii) (-2)^7 \cdot (-2)^{-5} \quad iii) 12^5 : (-3)^5 \quad iv) (0,2)^7 \cdot (-5)^7$$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) 3x^2 \cdot (-5x^3) \quad ii) -2x^3 \cdot (-5x^6) \quad iii) 2x^3y^5 \cdot (-5x^4y) \quad iv) -3xy^3 \cdot (-4x^5y) \quad v) \frac{2}{5}x^5 \cdot (-5x^3)$$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) (3x^3)^4 \quad ii) (-3y^3)^4 \quad iii) (-2x^4)^3 \quad iv) \left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3$$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) \frac{6x^4}{3x} \quad ii) \frac{5x^3y^2}{10xy^5} \quad iii) \left(-\frac{1}{2}xy^4\right) : (-5x^3y^5)$$

7. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

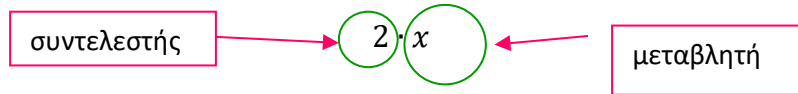
$$i) (x^2)^3 \cdot 2x^5 \quad ii) 3x^2y \cdot (-2xy^2)^3 \quad iii) (-2x^3)^2 : (-x^2) \quad iv) \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2 : (-3xy)^3$$

Εξισώσεις Ανισώσεις



2. Εξισώσεις 1ου βαθμού

Η έννοια της μεταβλητής : ονομάζουμε ένα γράμμα ($x, y, \dots$) που παριστάνει οποιονδήποτε αριθμό



Όμοιοι όροι : είναι οι όροι που έχουν την ίδια μεταβλητή στον ίδιο εκθέτη

Αναγωγή όμοιων όρων : είναι η αντικατάσταση των όμοιων όρων με έναν όμοιο όρο που θα έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών

Παράδειγμα: Να γίνει η αναγωγή όμοιων όρων $2x - 4x + 7x + 12x = (2 - 4 + 7 + 12)x = 17x$

Επιμεριστική ιδιότητα: $a(\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$

Παράδειγμα:

- $2(x - 3) = 2x - 6$
- $-2(x + 4) = -2x - 8$

Εξίσωση 1ου βαθμού ονομάζουμε κάθε ισότητα που έχει έναν άγνωστο και αριθμούς

Παράδειγμα

$$2x + 5 = 3x - 7$$

Άγνωστος : x

Άγνωστοι όροι : $2x, 3x$

Γνωστοί όροι : $5, 7$

1° μέλος: $2x+5$

2° μέλος : $3x-7$

Βασικός κανόνας για την επίλυση εξισώσεων :

Όταν αλλάζω μέλος σε κάποιον όρο του αλλάζω και το πρόσημο .



Βήματα επίλυσης μιας εξίσωσης 1^{ου} βαθμού

1^{ον} Αν η εξίσωση έχει παρονομαστές τους απαλείφουμε πολλαπλασιάζοντας κάθε όρο με το Ε.Κ.Π των παρονομαστών

2^{ον} ότι μένει από κάθε κλάσμα το βάζουμε σε παρένθεση και κάνουμε επιμεριστικές

3^{ον} χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και κάνουμε πράξεις

4^{ον} διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου αν αυτός δεν είναι 0

Ειδικές περιπτώσεις :

- 1) Εξίσωση της μορφής $0x=0$ έχει άπειρες λύσεις και ονομάζεται ταυτότητα ή αόριστη
- 2) Εξίσωση της μορφής $0x = \beta$ ($\beta \neq 0$) δεν έχει λύση και ονομάζεται αδύνατη

Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x-1}{3} + \frac{2x-4}{2} = x + \frac{1-x}{6}$$

Λύση:

$$\frac{x-1}{3} + \frac{2x-4}{2} = x + \frac{1-x}{6}$$

Απαλείφω τους παρονομαστές πολλαπλασιάζοντας με Ε.Κ.Π

$$6 \frac{x-1}{3} + 6 \frac{2x-4}{2} = 6x + 6 \frac{1-x}{6}$$

Κάνω επιμεριστικές και πράξεις

$$2(x-1) + 3(2x-4) = 6x + 1 - x$$

$$2x - 2 + 6x - 12 = 6x + 1 - x$$

Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους

$$2x + 6x - 6x + x = 2 + 12 + 1$$

$$3x = 15$$

Διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου αν αυτός δεν είναι μηδέν

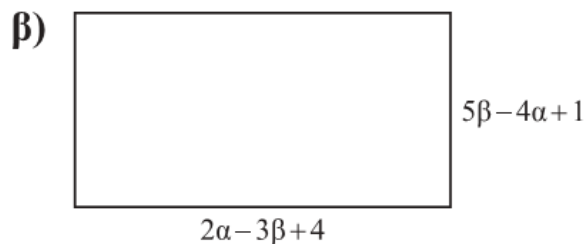
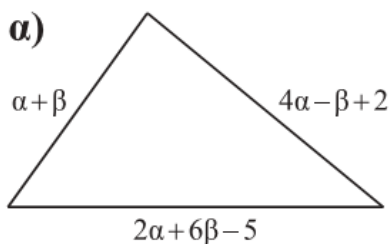
$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$

$$x = 5$$

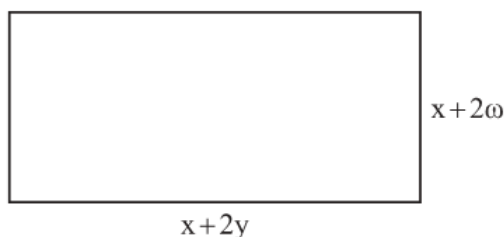
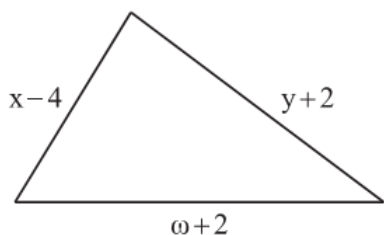
Επίλυση εξισώσεων 1^{ου} βαθμού

1. Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
 - α) Το διπλάσιο ενός αριθμού μειωμένο κατά 7.
 - β) Η διαφορά δυο αριθμών διαιρούμενη με 5.
 - γ) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, που το πλάτος του είναι 5 m μικρότερο από το μήκος του.
2. Να εκφράσετε συμβολικά:
 - α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 2.
 - β) Το μειωμένο κατά 7 ενός αριθμού.
 - γ) Το 15% ενός αριθμού.
3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
 - α) $17x - 3x + x =$
 - β) $-3x - 4x - x =$
 - γ) $15a + 13a + a =$
 - δ) $16y - 14y - y + 6y =$
 - ε) $-7\omega + 5 + 3\omega - 4 =$
4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A, B και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:
 - α) $A = 2(\alpha + 3\beta) - 3(\alpha - 2\beta)$, όταν $\alpha = 2, \beta = -1$.
 - β) $B = 3(x - 3y) + 2(5y - x)$, όταν $x = -2, y = 3$
5. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων αν γνωρίζετε ότι $\alpha + \beta = -6$ και $x - y = 7$
 - α) $A = -\alpha - \beta - x + y$
 - β) $B = -(-\alpha - \beta) - (-x + y)$
 - γ) $\Gamma = \alpha - (y - 2) + (x - 1) + \beta$
6. Αν $\alpha = -15, \beta = -2, \gamma = -1,5$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
 - α) $A = \alpha + \beta + \gamma$
 - β) $B = \alpha - \beta - \gamma$
 - γ) $\Gamma = \beta - \gamma + \alpha$

7. Να βρείτε την περίμετρο των παρακάτω σχημάτων:



8. Αν το τρίγωνο έχει περίμετρο 10cm, να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου.



18. Να επιλύσεις τις εξισώσεις :

α) $3x = 42$ β) $x - 2x = -10$ γ) $7x + 32 = -x$ δ) $10 - 5x = -105$
 ε) $-4x + 5 = 41$ ς) $-8x = -5x + 40$

19. Να επιλύσεις τις εξισώσεις :

α) $6x - 19 = 2x + 5$ β) $-9x + 13 = 3x + 1$ γ) $-37 - 55\omega = 8\omega + 2$
 δ) $2,7 - 0,3z = 0,1z - 0,3$ ε) $-\frac{3}{5} + 1,2 = a - 4,8$ ς) $1 - \frac{3}{4}\beta - 2 = \frac{6}{5}\beta$

20. Να επιλύσεις και να επαληθεύσεις τις εξισώσεις :

α) $2(3 - 5x) = 39 + x$ β) $t - 3(t - 7) = 2(t - 5) + 36$
 γ) $7 - 2t + 3(2t - 1) - 4(5 - 3t) - 0$
 δ) $\varphi = 2(\varphi - 1) - 3(\varphi - 2) - 4(\varphi - 3)$

21. Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις:

Αν $x + 2 = -3$ τότε $x = \dots\dots\dots$
 Αν $-5 - x = -7$ τότε $x = \dots\dots\dots$
 Αν $x - 9 = -10$ τότε $x = \dots\dots\dots$
 Αν $-7 - x = 5$ τότε $x = \dots\dots\dots$

22. Συμπληρώστε τις παρακάτω προτάσεις:

Αν $x \cdot (-3) = 18$ τότε $x = \dots\dots\dots$
 Αν $4 \cdot x = -15$ τότε $x = \dots\dots\dots$
 Αν $x : (-3) = -20$ τότε $x = \dots\dots\dots$
 Αν $7 : (-x) = -2$ τότε $x = \dots\dots\dots$

23. Δύο αριθμοί έχουν διαφορά 17.

α) Αν x ο ένας αριθμός τότε ο άλλος θα είναι:

A.: 17 B.: $17 - x$ Γ.: $x - 17$ Δ.: $17 + x$

Επιλέξτε την σωστή απάντηση.

β) Αν το άθροισμα του ενός με το πενταπλάσιο του άλλου είναι ίσο με 25 να κάνετε την εξίσωση που προκύπτει. Βρίσκοντας την λύση της εξίσωσης να υπολογίσετε τους δύο αριθμούς.

24. Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι η λύση της εξίσωσης:

α) $2x - 4 = x$, $x = 4$

β) $-(x + 1) + 2(x - 3) = 0$, $x = 7$

γ) $-3(2x - 1) + 4 = -(2x + 3)$, $x = -1$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2x = 4$

β) $6x = 0$

γ) $2x = 0$

δ) $5x = -25$

ε) $-7x = 1$

ζ) $-x = 5$

26. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $4x + 3 = 7$

β) $-2x + 4 = 0$

γ) $5x + 7 = -3$

δ) $-7x + 2 = 40$

ε) $-y + 2 = -2y + 0,5$

ζ) $0,2\omega + 2,5 = 1,5\omega - 10,5$

27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $6x - 2(-x + 5) = 20 - 3(x - 1)$

β) $6x - 4(-5 - x) + 4 = -2(3x - 4)$

γ) $12x - 4(3x - 2) = 6(-2x - 3) + 15$

δ) $2(2 - 2x) = 2(-6 - 2x)$

ε) $4\omega - 3 = -3 + \omega$

ζ) $1,5y - 2,3 = 1,7 + 3,5y$

η) $-x + 2 = -2x + 0,5$

θ) $0,2x + 2,5 = 1,5x - 10,5$

ι) $4,6 + x = 5,6 - 3x$

κ) $7x - 15 = 3x + 19$

λ) $3x - 4 = 5x + 2$

28. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $9(8 - x) - 10(9 - x) - 4(x - 1) = 1 - 8x$

β) $3(x - 2) + 2(1 + x) = 3(2x - 1)$

γ) $3(x + 4) = 15$

δ) $-5(-2x + 1) = -45$

ε) $2(3x + 2) = 4 - x$

ζ) $5 + 6(x + 3) = 4(x - 1) + 7$

η) $10x + 4(-3x + 1) - 1 = 2x - (4x + 1)$

θ) $x + 3 + 3(x + 2) = 9 - 2x$

ι) $16(x + 1) - 2(3 - x) = -3(x + 6)$

$$\kappa) 2(3z + 4) + 5(3z - 5) = 3(z - 7) + 8$$

$$\lambda) -15 + 24(x + 2) = 2(5x + 9) - x$$

$$\mu) 2x + 3 = 3x - (x + 7)$$

$$\nu) 4x - 1 = 2(2x + 4) + 3$$

$$\xi) -2(-3x + 1) = 6(x + 3) - 12$$

$$\omicron) 3(x + 1) = 5 - (-3x + 2)$$

$$\pi) -2(2x - 1) + 5 = 11 - 4(x + 1)$$

29. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) (3x - 8)(2x + 12) = 0$$

$$\beta) (x - 1)(4 + x) = 0$$

30. Αφού λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις να δείξετε ότι το άθροισμα και το γινόμενο των λύσεών τους είναι το ίδιο:

$$\alpha) -2(4 - 3x) + 5 = -11 - 4(-x - 2)$$

$$\beta) 5 - (3y - 5) = -2(2,5y - 6) - (-y + 3)$$

$$\gamma) -5\omega + 3(2\omega - 1) = 2(\omega - 2)$$

31. Δίνεται η εξίσωση $3(2x - \lambda) + x = -2(3 - 2x) + 3x$, με άγνωστο το x και λ κάποιον γνωστό αριθμό.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν γνωρίζουμε ότι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

β) Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση αν το λ είναι 0.

32. Να επιλύσεις τις εξισώσεις :

$$\alpha) 2x - \frac{x}{3} = -5 \quad \beta) \frac{3x}{5} - \frac{x}{2} = 1 \quad \gamma) \frac{x-5}{3} = \frac{x}{8}$$

$$\delta) \frac{1+2y}{5} - \frac{1-2y}{10} = \frac{y}{2} - \frac{3}{10} \quad \epsilon) \frac{9x}{5} - 3 = \frac{4x-15}{5} + x$$

33. Να επιλύσεις τις εξισώσεις :

$$\alpha) \frac{x+2}{3} - \frac{3x+1}{4} = -x - \frac{3}{4} \quad \beta) \frac{3t-1}{2} - \frac{2t-5}{3} - \frac{t+5}{2} = 0$$

$$\gamma) \frac{x+3}{4} - \frac{3(x-4)}{5} + \frac{x-1}{2} = \frac{3(x-25)}{20} \quad \delta) 2 - \frac{2(x-3)}{4} = -\frac{x+5}{12}$$

$$\epsilon) 2z - \frac{z+1}{5} - \frac{z-2}{10} = \frac{17z}{20}$$

34. Να επιλύσεις τις εξισώσεις :

$$\alpha) 5x - 12 = 2(x - 3) + 3(x - 6)$$

$$\beta) 2(x - 6) + 5(-7 + x) = 1 - 3(5 - x) - 4(10 - x)$$

$$\gamma) \frac{x}{2} - \frac{x - \frac{1}{2}}{4} - \frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{5} \right) = \frac{33}{40}$$

$$\delta) x - \frac{1 - \frac{x}{3}}{2} + \frac{1 - \frac{x}{6}}{3} = \frac{1 - \frac{x}{9}}{4} - \frac{5}{12}$$

35. Να επιλύσεις τις εξισώσεις :

a) $0,35(x - 2) + 3x = 0,7x - 1,25$ b) $\frac{3}{8}(x - 32) - 0,125(x + 32) = -32$

c) $\frac{x - 0,6}{16} = \frac{x - 0,6}{8} - \frac{x - 0,8}{4}$ d) $\omega - 2\omega - 3\omega - 4\omega = 100\omega$

36. Να λυθούν οι εξισώσεις :

α) $6 - [2x - (3x - 4) - 1] = 0$ b) $\frac{3x - 5}{5} - \frac{2x + 15}{3} = 6 - \frac{3x + 10}{15}$

c) $\frac{2}{5}\left(\frac{3x}{14} - \frac{2}{7}\right) = \frac{5}{7}\left(\frac{12x}{25} + \frac{1}{25}\right)$

d) $\frac{3(x - 4)}{4} - \frac{2(x + 5)}{3} - \frac{3x - 5}{2} - 2 = -\frac{5(x + 1)}{6} - x$

37. Να λυθούν οι εξισώσεις:

a) $x - \frac{x}{2} = 3 - 3(x - 2)$ b) $\frac{x - 4}{2} + \frac{2x - 4}{4} = \frac{4x - 12}{4}$

c) $6 - \frac{x - 5}{10} = \frac{1 - 5x}{5}$ d) $\frac{x - 4}{3} - \frac{2x - 4}{2} = \frac{1}{2}$ e) $\frac{3x - 5}{8} = \frac{3 - 2x}{5}$

38. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{7x + 4}{5} - x = \frac{3x - 5}{2}$

β) $\frac{2x - 5}{3} - \frac{5x - 3}{4} + \frac{8}{3} = 0$

γ) $\frac{5y - 3}{2} - \frac{3y}{4} = y - 5$

δ) $\frac{5x - 7}{2} - \frac{2x + 7}{3} = 3x - 14$

ε) $\frac{x + 4}{3} - \frac{x - 4}{5} = 2 + \frac{3x - 1}{15}$

ζ) $\frac{x - 1}{7} + \frac{23 - x}{5} = 7 - \frac{4 + x}{4}$

η) $\frac{1}{6}(8 - x) + \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{1}{2}(x + 6) - \frac{x}{3}$

θ) $2x - \frac{1}{2}(19 - 2x) = \frac{1}{2}(2x - 11)$

ι) $\frac{5x}{7} = 10\left(\frac{x}{14} + 1\right)$

κ) $\frac{6(9 + 8x)}{2} - 27 = 24x$

λ) $\frac{3x + 2}{5} - \frac{4x - 3}{7} = 4 + \frac{x - 2}{35}$

$$\begin{aligned} \mu) \quad & \frac{x}{3} + \frac{x}{2} + 5 = \frac{5x}{6} + 2 \\ \nu) \quad & \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+2}{12} = \frac{x-3}{4} + 1 \\ \xi) \quad & \frac{3x}{4} - \frac{16+7x}{20} = \frac{2(x-2)}{5} \\ \omicron) \quad & 2x-5 = \frac{x+7}{2} + \frac{3x}{2} \\ \pi) \quad & \frac{3x}{2} - 5 + x = \frac{x-10}{2} + 2x \\ \rho) \quad & \frac{x+6}{2} + \frac{2(x+17)}{3} + \frac{5(x-10)}{6} = 2x+6 \\ \sigma) \quad & \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{5} + \frac{3x+1}{2} = \frac{27x+19}{20} \\ \tau) \quad & \frac{-2x+1}{3} + \frac{x}{2} = 0 \\ \upsilon) \quad & \frac{x-3}{5} + \frac{1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{4x-2}{10} \\ \varphi) \quad & \frac{2(x-3)}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x}{3} - \frac{x}{4} \\ \chi) \quad & 2 - \left(\frac{2x}{3} + 1 \right) - x = 3x + \left(\frac{x}{3} - 1 \right) \\ \psi) \quad & 5x - 10 + \left(\frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{3} \right) = - \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \right) \end{aligned}$$

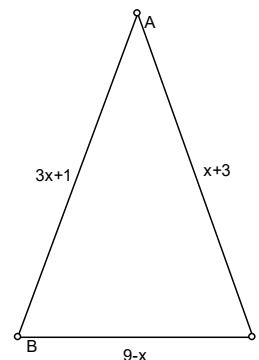
39. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \frac{x}{6} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right) = 0 \\ \beta) \quad & \frac{x - \frac{2x+3}{9}}{8} - \frac{x - \frac{1}{3}}{2} = \frac{2x - \frac{5(x+3)}{6}}{4} - \frac{x+1}{3} \\ \gamma) \quad & \frac{x - \frac{2(x-6)}{3}}{8} + \frac{x+3}{5} = x - 10 + \frac{x - \frac{3x-6}{5}}{3} \\ \delta) \quad & \frac{x - \frac{5}{3}}{2} - \frac{1 - \frac{x}{3}}{4} + \frac{\frac{x}{2}}{6} - \frac{x+1}{3} = \frac{5x+8}{12} \\ \varepsilon) \quad & \frac{\frac{3x-5}{2}}{4} = \frac{4(2x-7)}{9} + \frac{3 - \frac{5(x-2)}{3}}{3} + \frac{13}{24} \\ \zeta) \quad & \frac{\frac{2-x}{3}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{x}{2} \\ \eta) \quad & \frac{2x - \frac{1}{2}}{3x - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{x}{3} \end{aligned}$$

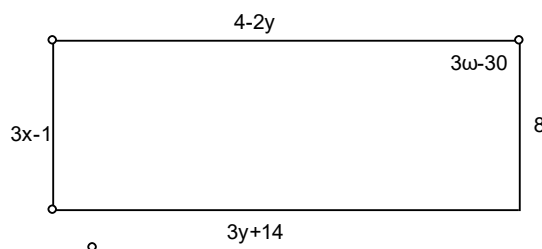
40. Ποιος αριθμός πρέπει να προστεθεί στον αριθμητή του κλάσματος $\frac{5}{12}$ ώστε αυτό να γίνει ίσο με $\frac{4}{3}$;
41. Ποιου αριθμού το μισό του ισούται με το διπλάσιό του;
42. Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 5 ισούται με το τριπλάσιό του. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;
43. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $AB = 2x + 1$, $BΓ = x - 1$ και $ΓΑ = 4x - 3$. Να βρείτε το x σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 α) Η περίμετρός του είναι 11
 β) Είναι ισοσκελές με βάση την $BΓ$
44. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές $AB = x + 1$ και $BΓ = 4x - 2$. Να βρείτε την τιμή του θετικού αριθμού x σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
 α) Η μία πλευρά είναι διπλάσια της άλλης
 β) Η περίμετρός του είναι 38
45. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x+\alpha}{3} + \frac{2x-\alpha}{2} = 1$.
 α) Να βρεθεί το α , ώστε η εξίσωση να έχει λύση το 1
 β) Να λυθεί η εξίσωση, αν δίνεται ότι $\alpha = 2$
46. Να βρείτε τον αριθμό α ώστε η εξίσωση $(\alpha-3)x=6$ να είναι αδύνατη.
47. Για τα διπλανά σχήματα, το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι ίσο με τα εμβαδά του παραλληλογράμμου και του τριγώνου μαζί.
 Να βρείτε το x και μετά το εμβαδόν του κάθε σχήματος.
48. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $3-x-1+(-\frac{2}{3})x+1+(x+3)+xx+1$ όπου x είναι η λύση της εξίσωσης $3(x+2)-8-2(x+5)+11=0$

49. Δίνεται το παρακάτω τρίγωνο.

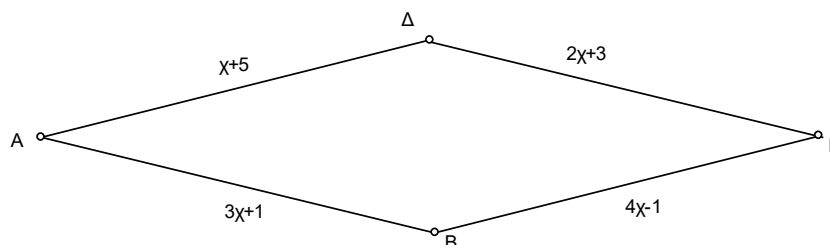
- α) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε να είναι ισοσκελές με βάση τη $BΓ$. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;
 β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΓ$. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;
 γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την $ΑΒ$. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;



50. Δίνεται το ορθογώνιο του παρακάτω σχήματος. Να βρείτε τους αριθμούς x , y και ω (το ω παριστάνει μοίρες).



51. Να βρείτε το x ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος.



52. Να βρεθεί το x ώστε να ισχύει $A - 1 = 2B$ σε κάθε περίπτωση:

- α) $A = 5 - x$ και $B = 2x - 3$
 β) $A = 2(x - 3) + 1$ και $B = -(x - 2) + 3$

53. Δίνεται η εξίσωση $\alpha(2x - 3) + x = 2\alpha x - 3(\alpha + 1)$.

- α) Να βρεθεί το x αν γνωρίζετε ότι $\alpha = -2$.
 β) Να βρεθεί το α αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση έχει λύση το $x = 1$.

54. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $AB = x + 3$, $A\Gamma = 2x - 1$ και $B\Gamma = 3(x + 2) - 4$.

- α) Να βρεθεί το x ώστε το τρίγωνο να είναι ισοσκελές με βάση το $B\Gamma$.
 β) Αν $x = 4$ να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου.
 γ) Να βρεθεί η περίμετρος του $AB\Gamma$.

55. Δίνεται τρίγωνο με πλευρές $AB = -3(x - 1) + x + 1$, $A\Gamma = 2(3 - 5x) + 9 - x$ και $B\Gamma = x - 2(x - 3) - 1$.

- α) Να βρείτε το x ώστε η περίμετρος του τριγώνου να είναι 10.
 β) Να δείξετε ότι σ' αυτή την περίπτωση το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Το πρόβλημα και η επίλυσή του με τη βοήθεια των εξισώσεων

Βήματα επίλυσης προβλήματος

Για να λύσω ένα πρόβλημα :

1^{ov} Διαβάζω πολύ καλά το πρόβλημα

2^{ov} Ονομάζω με έναν άγνωστο αυτό που μου ζητάει

3^{ov} Εκφράζω με τη βοήθεια του αγνώστου τα δεδομένα του προβλήματος

4^{ov} Σχηματίζω και λύνω την εξίσωση που εκφράζει το πρόβλημα.

5^{ov} Επαληθεύω

Παράδειγμα:

Ο Παναγιώτης και ο Αντώνης έχουν μαζί 24 σοκολάτες . Αν ο Παναγιώτης έχει 3πλάσιες σοκολάτες από τον Αντώνη , πόσες σοκολάτες έχει ο Αντώνης ;

Λύση:

Ο Αντώνης έχει x σοκολάτες

Άρα ο Παναγιώτης έχει $3x$ σοκολάτες

Άρα και οι δύο μαζί έχουν $x + 3x$

Οπότε η εξίσωση του προβλήματος θα είναι $x + 3x = 24$

$$4x = 24$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$



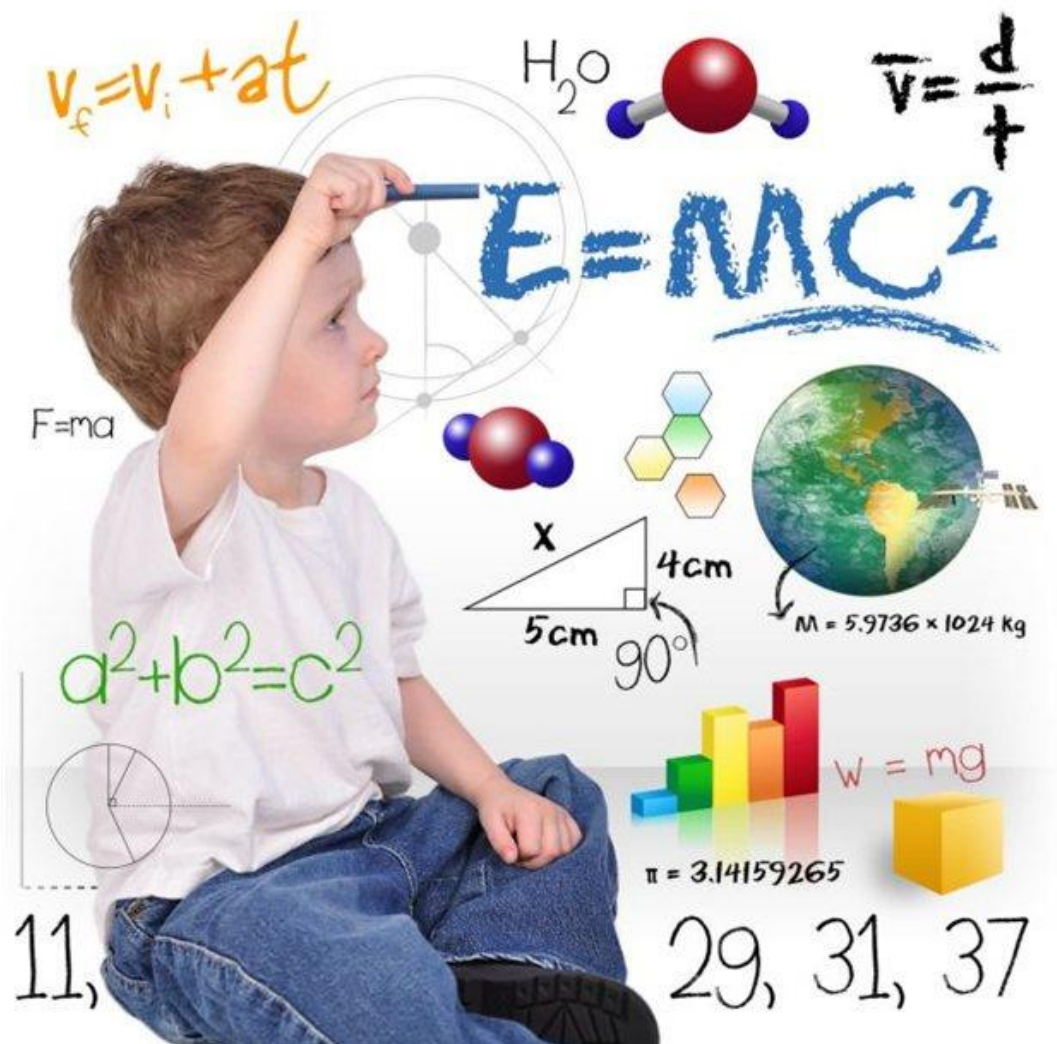
3. Προβλήματα με εξισώσεις

1. Ένα κινητό κινείται πάνω στον άξονα $x'Ox$. Αρχίζει την κίνησή του από την αρχή του άξονα κινείται προς τα δεξιά 8 μονάδες. Κατόπιν αλλάζοντας την κίνησή του κινείται προς τα αριστερά 15 μονάδες. Μετά αλλάζει πάλι την φορά της κίνησής του και κινείται προς τα δεξιά 6 μονάδες.
α) Βρείτε τους αριθμούς του άξονα στους οποίους το κινητό άλλαξε την κίνησή του.
β) Η τελική θέση του κινητού πόσο μακριά από την αρχική του θέση είναι;
γ) Ποιο είναι το συνολικό διάστημα που έκανε το κινητό;
2. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 11.
Να υπολογίσετε το άθροισμα αυτού του διψήφιου και του διψήφιου που προκύπτει, από αυτόν, αν αλλάξουμε την θέση των ψηφίων του.
3. Κάποιος μαθητής έχει υπολογίσει ότι το 2016 θα έχει διπλάσια ηλικία από αυτή που έχει το 2003. Να υπολογίσετε το έτος της γέννησής του.
4. Η ηλικία του Γιάννη το 2010 χρόνια θα είναι ίση με τα $\frac{3}{2}$ της ηλικίας του το 2002. Να βρείτε την ηλικία του Γιάννη το 2004.
5. Το $\frac{1}{9}$ της δύναμης του 3 με εκθέτη τον αριθμό x είναι ίσο με το 9 – πλάσιο της δύναμης του 27 με εκθέτη τον αριθμό x .
α) Με την βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να δείξετε ότι η εξίσωση που θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε το x είναι η $2 + 3x = x - 2$.
β) Να υπολογίσετε την δύναμη του -2 με εκθέτη τον αριθμό $\frac{3}{2}x$.
6. Αν στο τετραπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 10 βρίσκουμε το πενταπλάσιό του. Να βρείτε τον αριθμό.
7. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 16. Να βρείτε τις διαστάσεις του, αν γνωρίζετε ότι η μία είναι τριπλάσια της άλλης.

8. Αν στο τετραπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 10 βρίσκουμε το πενταπλάσιό του. Να βρείτε τον αριθμό.
9. Σε ένα τρίγωνο έχουμε $A=90^\circ$, ενώ η Β γωνία είναι πενταπλάσια από τη Γ. Να βρείτε τις γωνίες Β και Γ.
10. Ο πατέρας της Αλεξάνδρας έχει τετραπλάσια ηλικία από αυτή. Αν μετά από 5 χρόνια έχει τριπλάσια ηλικία από την κόρη του, να βρείτε πόσο χρονών είναι σήμερα η Αλεξάνδρα.
11. Δύο αριθμοί διαφέρουν κατά 35 και ο λόγος τους είναι $\frac{2}{7}$. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.
12. Ψάχνοντας ένα παλιό μπαούλο της γιαγιάς του ο Γιάννης βρήκε δίσκους γραμμοφώνου. Οι μισοί απ' αυτούς και μισός δίσκος έχουν παραδοσιακή μουσική. Οι μισοί από τους υπολοίπους και μισός δίσκος έχουν ρεμπέτικα και οι υπόλοιποι 3 έχουν λαϊκά. Πόσους δίσκους βρήκε ο Γιάννης;
13. Τα τμήματα της Β' Γυμνάσιου ενός σχολείου έχουν αριθμό μαθητών μεταξύ 25 και 28. Οι μαθητές ενός τμήματος χωρίζονται σε τετράδες και περισσεύουν 2 μαθητές. Πόσους μαθητές έχει το τμήμα;
14. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για το οποίο γνωρίζετε ότι η μία πλευρά είναι τριπλάσια της άλλης. Να βρείτε τις πλευρές, αν δίνεται ότι:
α) Η περίμετρός του είναι 40.
β) Το εμβαδόν του είναι 48.
15. Ο Βασίλης έχει στην τσέπη του χαρτονομίσματα των 10 και 20 ευρώ. Αν γνωρίζετε ότι τα χαρτονομίσματα των 10€ είναι διπλάσια από αυτά των 20€ και ότι το συνολικό ποσό που έχει στην τσέπη του είναι 160€, να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 10€ και πόσα των 20€ έχει.
16. Η Μαρία έχει τη διπλάσια ηλικία από τον Δημήτρη. Αν γνωρίζετε ότι σε 4 χρόνια το άθροισμα των ηλικιών τους θα είναι 32 χρόνια, να βρείτε τις ηλικίες των δύο παιδιών σήμερα.
17. Δίνονται ένα τρίγωνο με πλευρά x και ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές x και 6cm . Αν γνωρίζετε ότι η περίμετρος του τετραγώνου είναι 6cm μικρότερη από την περίμετρο του ορθογωνίου, να βρείτε:
α) Τα μήκη των πλευρών των δύο σχημάτων
β) Τα εμβαδά τους
γ) Ποια η σχέση των εμβαδών;

18. Σε ένα γραφείο υπάρχουν μπλε και κόκκινα στυλό. Δίνεται ότι τα κόκκινα είναι 4 περισσότερα από τα μπλε. Αν γνωρίζετε ότι όλα τα στυλό είναι 36, να βρείτε πόσα στυλό από κάθε χρώμα υπάρχουν στο γραφείο.
19. Σε μια μάντρα αυτοκινήτων και μηχανών υπάρχουν συνολικά 55 οχήματα. Αν γνωρίζετε ότι όλα τα οχήματα έχουν 190 ρόδες, να βρείτε πόσα αυτοκίνητα και πόσες μηχανές υπάρχουν στη μάντρα.

Τετραγωνική ρίζα



4. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Ορισμός: ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α τον αριθμό που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό α και συμβολίζουμε $\sqrt{\alpha}$

➤ Επίσης ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$

Παράδειγμα: $\sqrt{81} = 9$ διότι $9^2 = 81$

Παρατήρηση :

- 1) Δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού
- 2) Το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ έχει νόημα όταν $\alpha \geq 0$
- 3) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
- 4) Γενικά ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

Ιδιότητες :

- 1) αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- 2) αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
- 3) αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha \sqrt{\beta}$

1^η βασική άσκηση

Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες

$$i) \sqrt{144} = \dots \quad ii) \sqrt{121} = \dots \quad iii) \sqrt{225} = \dots \quad iv) \sqrt{1,44} = \dots \quad v) \sqrt{2500} = \dots$$

Λύση :

$$i) \sqrt{144} = \mathbf{12} \quad ii) \sqrt{121} = \mathbf{11} \quad iii) \sqrt{225} = \mathbf{15} \quad iv) \sqrt{1,44} = \mathbf{1,2} \quad v) \sqrt{2500} = \mathbf{50}$$

2η Βασική άσκηση

Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες

$$i) \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \dots \quad ii) \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \dots$$

Λύση :

$$i) \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 50} = \sqrt{100} = 10$$

$$ii) \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

3η βασική άσκηση :

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

$$i) x^2 = 25 \quad ii) x^2 = 49$$

Λύση :

$$i) x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5, x \geq 0$$

$$ii) x^2 = 49$$

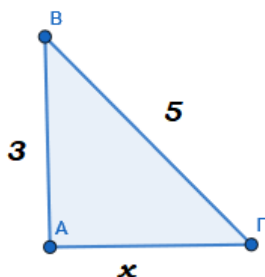
$$x = \sqrt{49}$$

$$x = 7, x \geq 0$$

4^η βασική άσκηση :

Να υπολογιστεί η ζητούμενη πλευρά του παρακάτω τριγώνου

Λύση:



Εφαρμόζω πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ

$$BG^2 = AB^2 + AG^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2$$

$$x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$$

5^η Βασική άσκηση :

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \sqrt{22 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} - \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}} + \sqrt{\sqrt{81}}}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{22 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} - \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}} + \sqrt{\sqrt{81}}} = \sqrt{22 + \sqrt{5 + 4}} - \sqrt{8\sqrt{2 \cdot 2} + \sqrt{9}} \\ &= \sqrt{22 + \sqrt{9}} - \sqrt{8 \cdot 2} + 3 = \sqrt{25} - \sqrt{16} + 3 = 5 - 4 + 3 = 4 \end{aligned}$$

Άρρητοι αριθμοί :

Είναι οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν ως κλάσματα με ακέραιους όρους

Π.χ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... και γενικώς οι ρίζες που δεν βγαίνουν

Ρητοποίηση :

Είναι η διαδικασία που μετατρέπουμε έναν άρρητο παρονομαστή σε ρητό

6^η βασική άσκηση

Να ρητοποιηθούν οι παραστάσεις $\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

Λύση :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Ασκήσεις στην τετραγωνική ρίζα

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά :

$$i) \sqrt{9} = \dots \quad ii) \sqrt{900} = \dots \quad iii) \sqrt{90.000} = \dots \quad iv) \sqrt{0,09} = \dots$$

$$v) \sqrt{0,0009} \quad vi) \sqrt{144} = \dots \quad vii) \sqrt{14.400} = \dots \quad viii) \sqrt{1,44} = \dots$$

2. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

$$i) \sqrt{529} \quad ii) \sqrt{1024} \quad iii) \sqrt{2025} \quad iv) \sqrt{15.129} \quad v) \sqrt{18,49} \quad vi) \sqrt{156,25}$$

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) A = (\sqrt{3})^2 \quad ii) B = \sqrt{5^2} + \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{2^4} \quad iii) \Gamma = \sqrt{(1-5)^2}$$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{121} - \sqrt{225} + \sqrt{196} \quad ii) B = \sqrt{144} - \sqrt{256} - \sqrt{625} \quad iii) \Gamma$$

$$= \sqrt{0,16} + \sqrt{0,09}$$

5. Να υπολογίσεις τις παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{19 - \sqrt{7 + \sqrt{4}}} \quad ii) B = \sqrt{8\sqrt{1 + \sqrt{9}}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{9\sqrt{8\sqrt{4}}} \quad iv) \Delta = \sqrt{99 + \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \sqrt{25}}}$$

6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} \quad ii) \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{0,9} \quad iii) \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \quad iv) \frac{\sqrt{2,42}}{\sqrt{2}}$$

7. Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt{\frac{15}{2}} \quad ii) \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

8. Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \quad ii) 3\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad iii) \sqrt{5} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

9. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) \sqrt{8} \quad ii) \sqrt{12} \quad iii) \sqrt{18} \quad iii) \sqrt{20} \quad iv) \sqrt{24} \quad v) \sqrt{27}$$

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

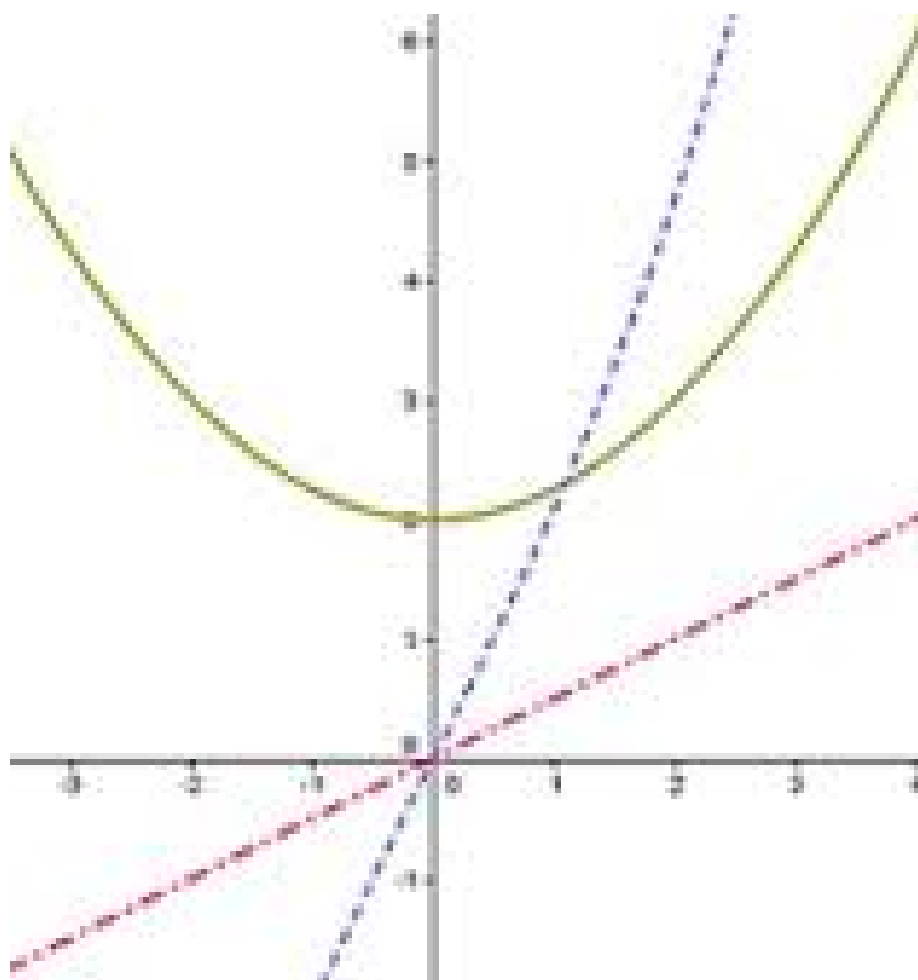
$$i) \sqrt{8} - 3\sqrt{200} - \sqrt{50} \quad ii) \sqrt{12} - \sqrt{75} - 2\sqrt{300}$$

11. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές

$$i) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ii) \frac{5}{\sqrt{5}} \quad iii) \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad iv) \frac{2}{\sqrt{8}}$$

12. Να υπολογίσετε τις ζητούμενες πλευρές στα παρακάτω τρίγωνα

Συναρτήσεις



5. Συναρτήσεις

Συνάρτηση : λέγεται μια σχέση μεταξύ των τιμών x και y , δυο μεγεθών, όπου κάθε τιμή της μεταβλητής x αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y

Πίνακας τιμών μιας συνάρτησης : είναι ένας πίνακας που περιέχει τις τιμές της μεταβλητής x και τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής y

Παράδειγμα :

Δίνεται η συνάρτηση $y = 3x - 2$. Να συμπληρώσετε τους πίνακες τιμών

a)

x	-3	-1	0
y			

b)

x		5	
y	4		-14

Λύση :

Έχουμε $y = 3x - 2$

a) Για $x = -3$: $y = 3 \cdot (-3) - 2 = -9 - 2 = -11$

Για $x = -1$: $y = 3 \cdot (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$

Για $x = 0$: $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$

Άρα ο πίνακας τιμών είναι :

x	-3	-1	0
y	-11	-5	-2

b) Για $y = 4$: $4 = 3x - 2 \Rightarrow -3x = -2 - 4 \Rightarrow x = 2$

Για $x = 5$: $y = 3 \cdot 5 - 2 = 13$

Για $y = -14$: $-14 = 3x - 2 \Rightarrow -3x = 12 \Rightarrow x = -4$

Άρα ο πίνακας συμπληρωμένος είναι:

x	2	5	-4
y	4	13	-14

Ασκήσεις στις συναρτήσεις

1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

a) $y = 2x - 3$

x	1	2	3
y			

b) $y = \frac{5x-2}{3}$

x	1	4	-2
y			

2. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

a) $y = 3x^2 - 2$

x	-2	-1	2
y			

b) $y = 3(x - 1)^2 - 1$

x	-3	-2	3
y			

c) $y = -x^2 + 5x - 4$

x	-2	-1	0
y			

3. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

a) $y = 2x - 3$

x		5	
y	3		-7

d) $y = \frac{3x-1}{2}$

x	1		
y		4	0

e) $y = -\frac{5}{x}$

x		0,25	
y	0,5		$\frac{5}{3}$

4. Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = ax + b$ είναι ο διπλανός . Να υπολογίσετε τα a και b .

x	0	1
y	3	2

5. Οι τιμές των προϊόντων ενός εργοστασίου επιβαρύνονται με φόρο 9% . Να εκφράσετε τις τιμές y με φόρο , ως συνάρτηση των τιμών x χωρίς φόρο και μετά να βρείτε την τιμή ενός προϊόντος με φόρο , όταν η τιμή του χωρίς φόρο είναι 12 ευρώ.

6. Καρτεσιανές συντεταγμένες & γραφική παράσταση συνάρτησης

Ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

$\chi'\chi$: άξονας των τετμημένων

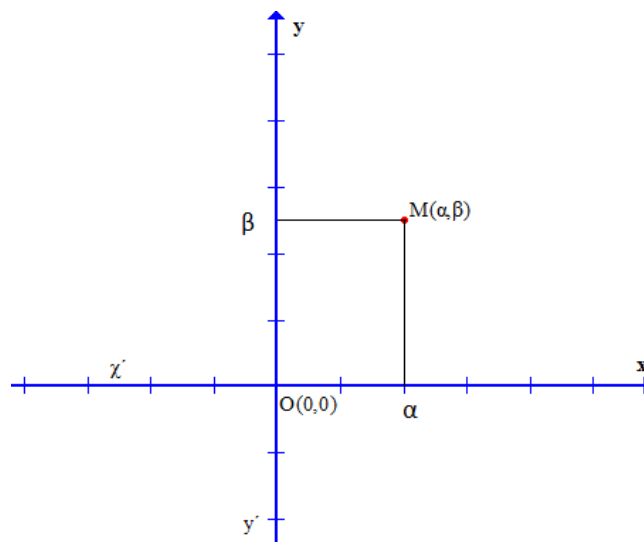
$\gamma'\gamma$: άξονας των τεταγμένων

$O(0,0)$: αρχή των αξόνων

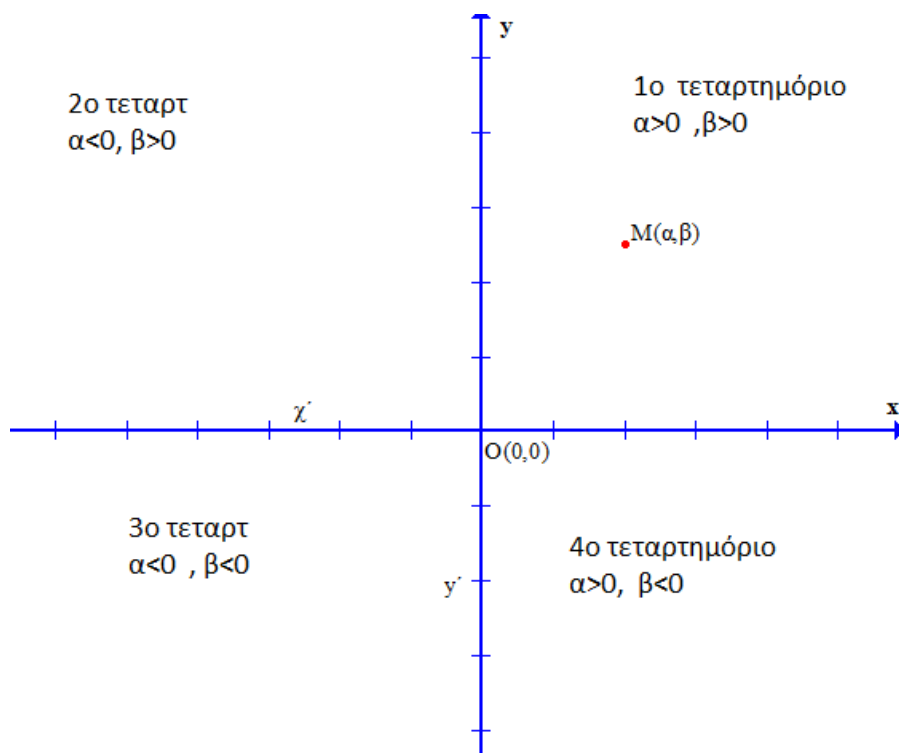
α : τετμημένη

β : τεταγμένη

(α,β) : συντεταγμένες



Τεταρτημόρια



Συμμετρικό σημείου

Σημείο	Συμμετρικό ως προς τον x'	Συμμετρικό ως προς τον y'	Συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$
$M(\alpha,\beta)$	$M_1(\alpha,-\beta)$	$M_2(-\alpha,\beta)$	$M_3(-\alpha,-\beta)$

Απόσταση σημείων

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ είναι $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(3,5)$ και $B(2,6)$

Λύση:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης :ονομάζουμε το σύνολο των σημείων με συντεταγμένες (x,y)

Παρατήρηση:

Το σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν

Ασκήσεις στην γραφική παράσταση συνάρτησης

1. Σε ένα σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία :
 $A(3,2)$, $B(-3,-1)$, $\Gamma(0,3)$, $\Delta(-2,0)$
2. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το σημείο $A(3x-2, 2x+1)$, να βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο
3. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου $A(-2,3)$ ως προς
 - a) Τον άξονα $x'x$
 - b) Τον άξονα $y'y$
 - c) Την αρχή των αξόνων
4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων από τους άξονες $x'x$ και $y'y$
 - a) $A(5,3)$
 - b) $B(-2,3)$
 - c) $\Gamma(-3,0)$
5. Να βρείτε τις αποστάσεις των παρακάτω σημείων
 - a) $A(5,7)$ και $B(2,3)$
 - b) $A(-7,3)$ και $B(5,-2)$
 - c) $A(5,-7)$ και $B(0,-5)$
6. Αν το σημείο $A(-3,15)$ βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 - 3$, να βρείτε την τιμή του a .
7. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε το σημείο $M(3\lambda-2, \lambda+1)$, να βρίσκεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 5x - 3$
8. Αν τα σημεία $A(0,3)$ και $B(-2,1)$ βρίσκονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+b$, να βρείτε τις τιμές των a και b

7. Η συνάρτηση $y=ax$ & $y=ax+\beta$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

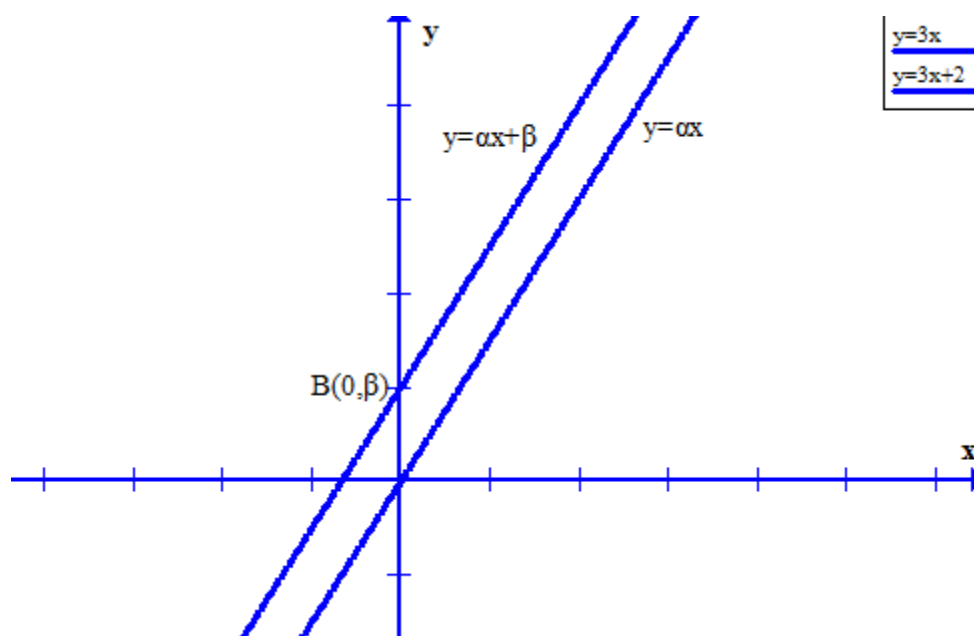
a : είναι η κλίση της ευθείας

παρατήρηση:

- 1) Αν $a>0$ τότε η ευθεία βρίσκεται 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο
- 2) Αν $a<0$ τότε η ευθεία βρίσκεται 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο
- 3) Η ευθεία $y=x$ είναι η διχοτόμος του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου
- 4) Η ευθεία $y=-x$ είναι διχοτόμος 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$

Είναι μια ευθεία παράλληλη στην $y = ax$ που τέμνει τον άξονα y στο σημείο $B(0,\beta)$



1^η βασική άσκηση:

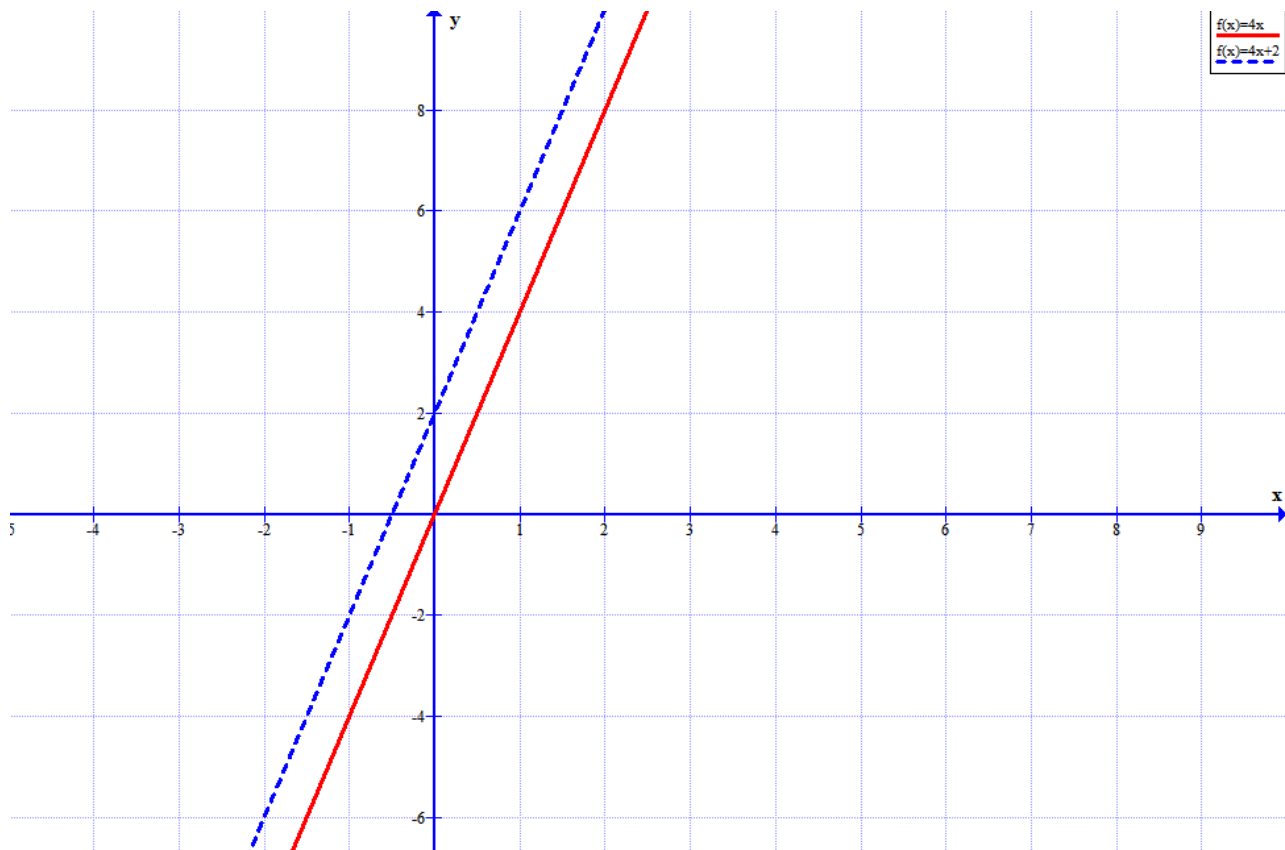
Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση των συναρτήσεων $y = 4x$ και $y = 4x + 2$

Λύση :

Κατασκευάζω πίνακα τιμών

x	0	1
y	0	4

x	0	1
y	2	6



2^η βασική Άσκηση

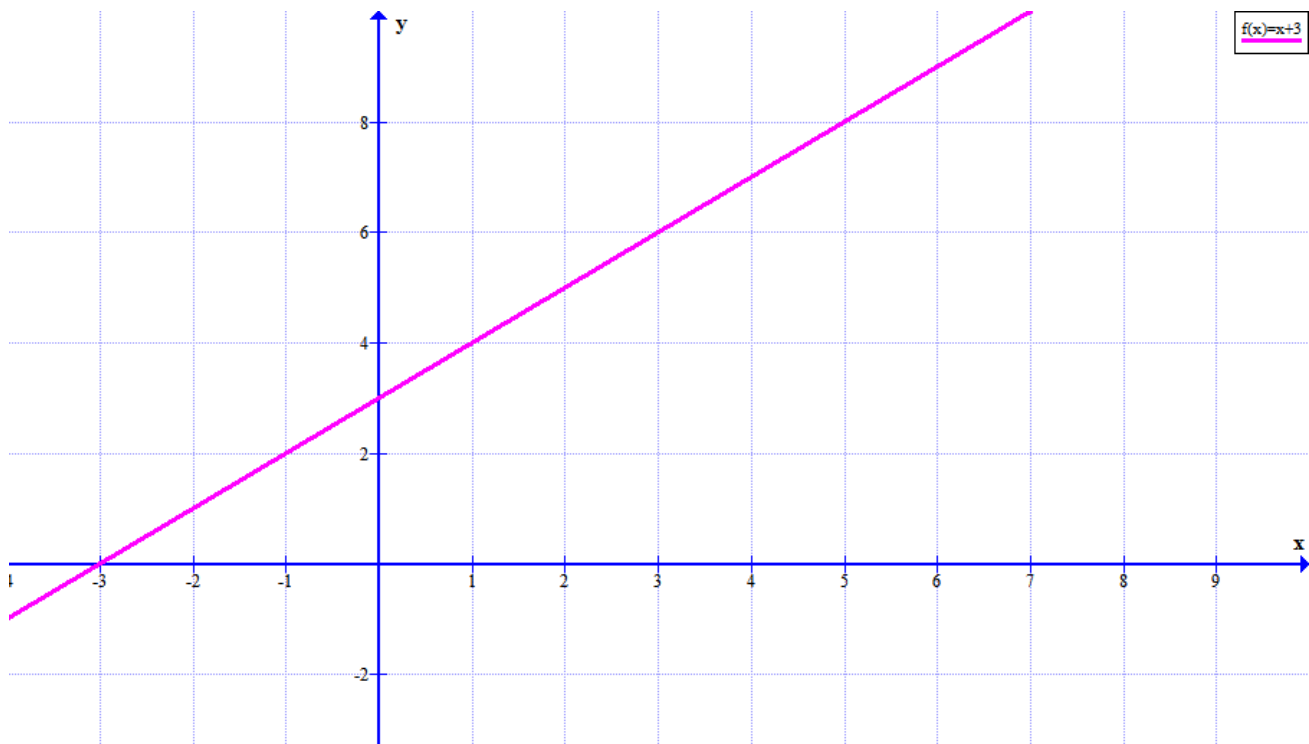
Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $y = x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,3)$. Και αφού βρεθεί η εξίσωσή της να γίνει η γραφική της παράσταση

Λύση :

Η ευθεία που είναι παράλληλη στην $y = x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,3)$ είναι η $y = x + 3$

Η γραφική παράσταση της $y = x + 3$

x	0	1
y	3	4



Παρατήρηση (σημεία τομής με τους άξονες)

Η ευθεία $y = ax + \beta$ τέμνει τον άξονα $x'x$ όταν $y = 0$

Η ευθεία $y = ax + \beta$ τέμνει τον άξονα $y'y$ όταν $x = 0$

3^η βασική άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(1,4)$

Λύση:

Η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων αρα θα είναι της μορφής $y = ax$

$$4 = a \cdot 1$$

$$a = 4$$

Άρα η ευθεία θα είναι $y = 4x$

4^η βασική άσκηση

Να βρεθεί η εξίσωση β

Ασκήσεις στην ευθεία

1. Αν τα ποσά x και y είναι ανάλογα να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες

X	1	2	5		
Y		4		14	30

X	1	2	3	
y		3		10

2. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

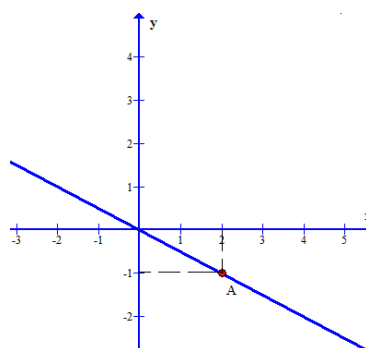
$$a) y = 2x \quad b) y = -\frac{3}{5}x \quad c) y = -3x$$

3. Να βρείτε την κλίση κάθε μιας από τις ευθείες

$$a) y = 5x \quad b) y = -\frac{5}{3}x \quad c) y = 0$$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από την αρχή των και το σημείο

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας του διπλανού σχήματος:



6. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να

παραστήσετε γραφικά τις ευθείες με εξισώσεις

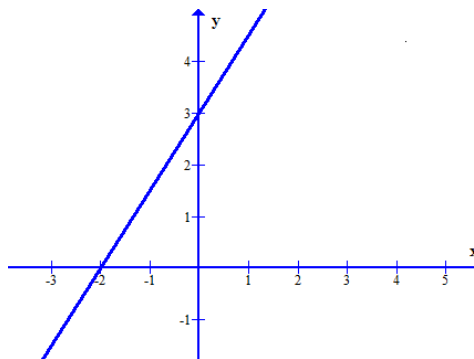
$$a) y = 2x \quad b) y = 2x + 1 \quad c) y = 2x - 3$$

7. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις

$$a) y = 3x - 2 \quad b) y = 2x + 3 \quad c) y = -2x + 3$$

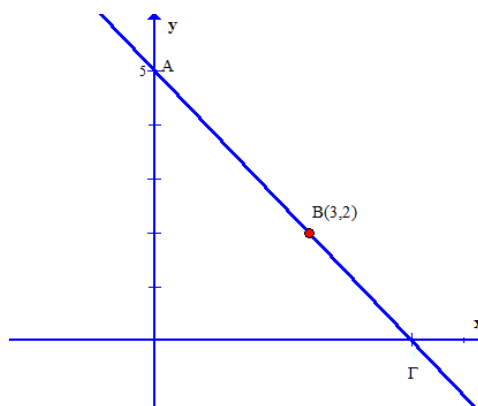
8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση -5 και τέμνει τον γ'γ στο 2
9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x$ και τέμνει τον άξονα γ'γ στο -5
10. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση 5 και διέρχεται από το σημείο $M(2,-3)$

11. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε



12. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε:

- a) Την εξίσωση της ευθείας ε
- b) Τις συντεταγμένες του σημείου Γ
- c) Τις αποστάσεις του σημείου B από τα σημεία A, O και Γ



13. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η κλίση της ευθείας $\varepsilon: y = \frac{3\lambda-1}{2}x + 5$ να είναι 4
14. Να βρείτε τις τιμές των κ και λ ώστε η ευθεία $y = (2\kappa - 1)x + 3$ να έχει κλίση 3 και να διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\lambda}{2}, 3\lambda\right)$
15. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $3x + 2y = 6$
 - a) Να βρείτε τα σημεία τομής A, B της ευθείας ε με τους άξονες
 - b) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε
 - c) Να χαράξετε την ευθεία ε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων
 - d) Να βρείτε το εμβαδόν του AOB

8. Η υπερβολή



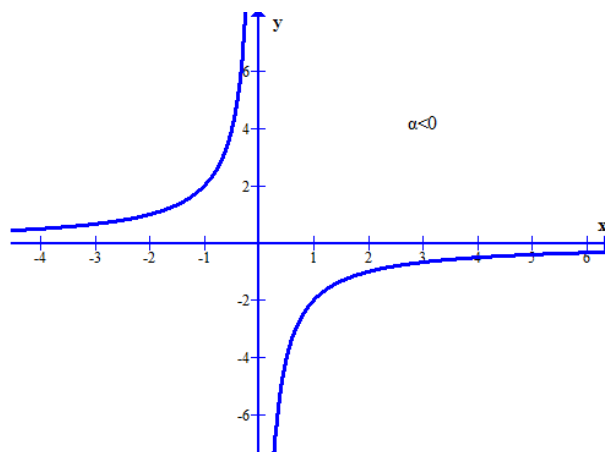
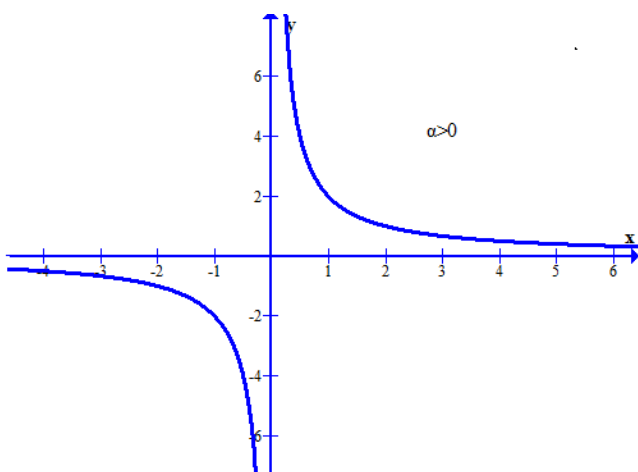
Όταν τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους είναι σταθερό. Δηλαδή $y \cdot x = a = \text{σταθερό}$

Και συνδέονται με τη σχέση:

$$y = \frac{a}{x}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$ λέγεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται:

- Στο 1^ο και στο 3^ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a > 0$
- Στο 2^ο και στο 4^ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a < 0$



Παρατήρηση:

- 1) Η υπερβολή έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
- 2) Και άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των αξόνων $y=x$ και $y=-x$

Ασκήσεις στην υπερβολή

1. Αν τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

x	3	6	8	12
y		4		

2. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$a) y = \frac{4}{x} \quad b) y = -\frac{2}{x}$$

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$a) y = \frac{2}{x} \quad b) y = \frac{3}{x} \quad c) y = \frac{4}{x}$$

4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

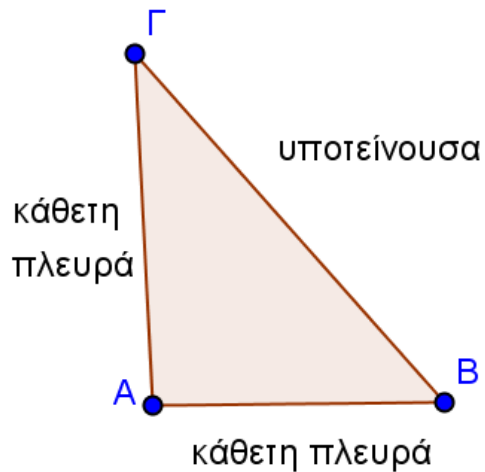
$$a) y = \frac{1}{4x} \quad b) y = -\frac{1}{4x}$$

5. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{2\lambda-1}{x}$ διέρχεται από το σημείο $A(-3,2)$ να βρείτε την του λ

9. Πυθαγόρειο θεώρημα

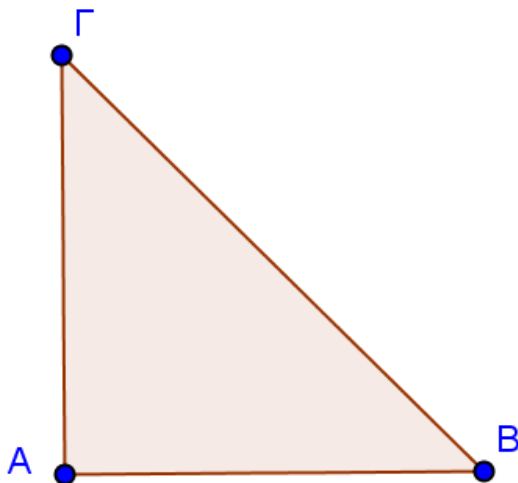
Ορθογώνιο τρίγωνο είναι το τρίγωνο που έχει μια γωνία ορθή

Υποτείνουσα: λέγεται η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία



Πυθαγόρειο θεώρημα:

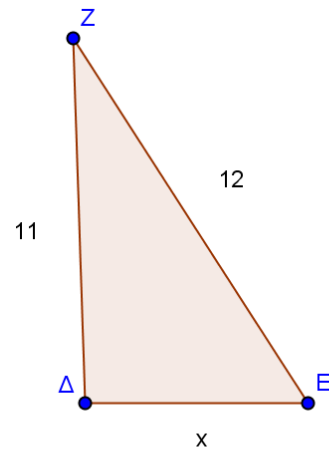
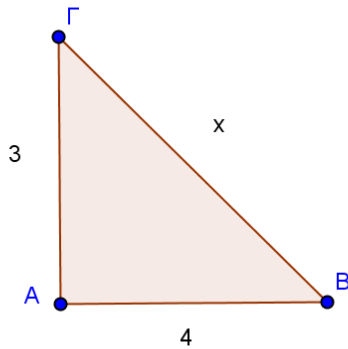
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών



$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 \quad \text{ή} \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Παράδειγμα:

Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα να υπολογίσετε τη ζητούμενη πλευρά



Λύση :

Από Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε :

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$$

$$x^2 = 4^2 + 3^2$$

$$x^2 = 25 \text{ άρα } x = \sqrt{25} \text{ δηλαδή } x = 5$$

Στο 2^ο σχήμα από Π.Θ. έχουμε

$$Z\epsilon^2 = \Delta\epsilon^2 + \Delta Z^2$$

$$12^2 = x^2 + 11^2$$

$$x^2 = 144 - 121$$

$$x^2 = 23 \text{ άρα } x = \sqrt{23} \cong 5$$

Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών , τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνι με υποτείνουσα τη μεγαλύτερη πλευρά

Παρατήρηση:

Με το αντίστροφο του πυθαγορείου θεωρήματος εξετάζουμε , αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο

Παράδειγμα :

Να εξετάσεις αν το τρίγωνο με μήκη πλευρών $\alpha=5$, $\beta=3$ και $\gamma=4$ είναι ορθογώνιο

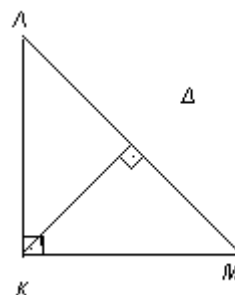
Λύση :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha^2 = 5^2 = 25 \\ \beta^2 + \gamma^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά α

Ασκήσεις στο Πυθαγόρειο Θεώρημα

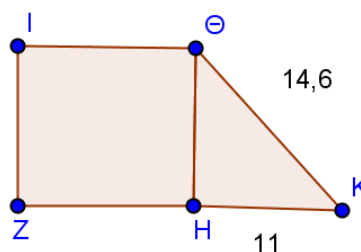
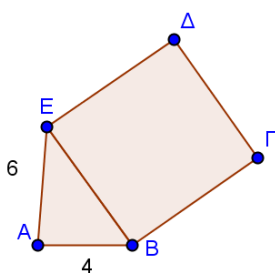
2. Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο στο Κ και το ευθύγραμμο τμήμα ΚΔ είναι ένα ύψος του . Να εφαρμόσεις το πυθαγόρειο θεώρημα σε καθένα από τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΛΜ, ΚΔΜ και ΚΔΛ.



3. Στον πιο κάτω πίνακα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ , ΑΓ και ΒΓ είναι οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) . Να εξετάσεις αν ο πίνακας αυτός έχει συμπληρωθεί σωστά

ΑΒ	7	9	24	3,9	6,5
ΑΓ	24	40	70	8	7,2
ΒΓ	25	41	84	8,9	9,7

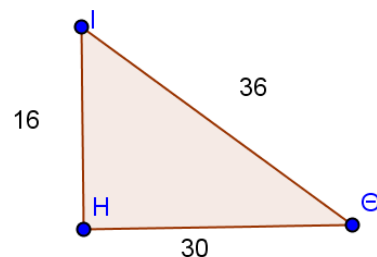
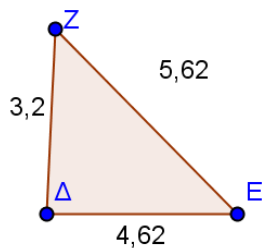
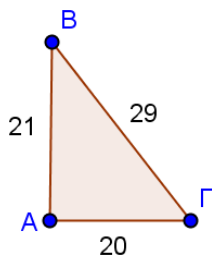
4. Να υπολογιστούν τα εμβαδά (ΒΓΔΕ) και (ΖΗΘΙ) που φαίνονται στα πιο κάτω σχήματα :



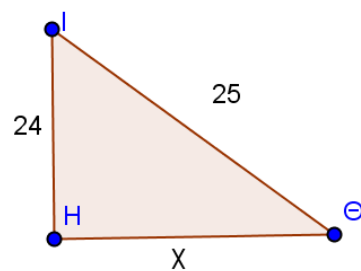
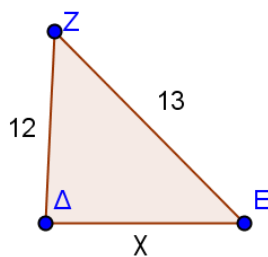
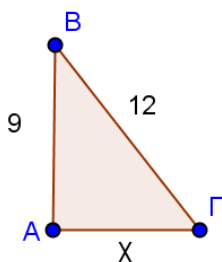
5. Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) έχει ΑΒ=7. Να υπολογίσεις το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα ΒΓ .

6. Το μήκος της πλευράς ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 12 m . Να υπολογίσεις το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά το ύψος του ΑΔ.

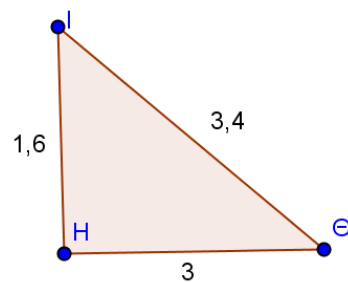
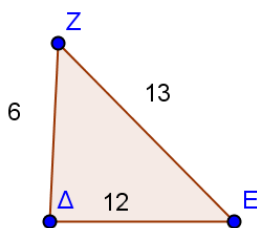
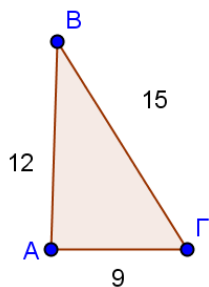
7. Να εξετάσεις αν τα πιο κάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια :



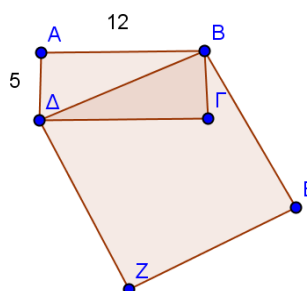
8. Να υπολογίσεις την πλευρά x στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα



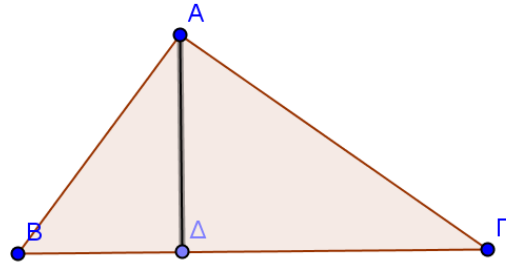
9. Να εξετάσεις αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια



10. Στο διπλανό σχήμα , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΕΖΔ



11. Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Delta\Gamma=35\text{cm}$, $\text{Β}\Gamma=51\text{cm}$, και $\text{Α}\Gamma=37\text{cm}$.
Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΒ.

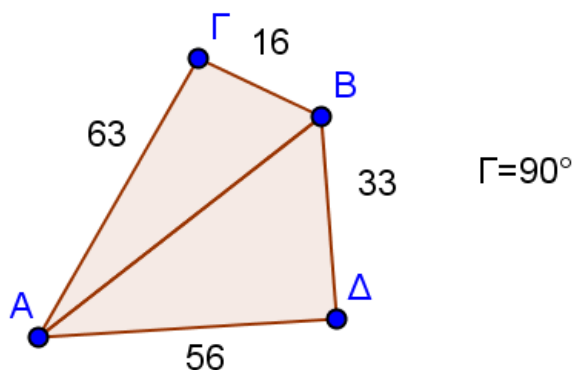


12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\text{Α}=90^\circ$) με $\text{ΑΒ}=8\text{cm}$ και $\text{Α}\Gamma=6\text{cm}$. Να υπολογίσετε :
a) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
b) Την υποτείνουσα ΒΓ
c) Το ύψος προς τη υποτείνουσα ΒΓ

13. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\text{Α}=90^\circ$) έχει $\text{ΑΒ}=16\text{cm}$ και $\text{Α}\Gamma=12\text{cm}$. Να υπολογίσετε το ύψος προς την υποτείνουσα

14. Στο διπλανό σχήμα :

- a) Να υπολογίσετε το ΑΒ
b) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ορθογώνιο



15. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\text{ΑΒ}=\text{Α}\Gamma=5$) έχει βάση $\text{Β}\Gamma=8\text{cm}$. Να υπολογίσετε το ύψος των ΑΔ και το εμβαδόν του.

16. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο είναι $\text{ΑΒ}=\text{Α}\Gamma=4\text{cm}$. Να υπολογίσετε τη ΒΓ, το ύψος ΑΔ και το εμβαδόν του.

17. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) είναι $\alpha=20\text{cm}$ και $\beta=\frac{4}{3}\gamma$. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές και το εμβαδόν του.
18. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς 8 cm . Αν E μέσο του ύψους AD να υπολογίσετε: i) το ύψος AD ii) BE iii) το εμβαδόν του.
19. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=AG=5\text{ cm}$ το ύψος $AD=BF$. Να βρεθούν: i) BF ii) το εμβαδόν του.
20. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $A=\Delta=90^\circ$, $AB=12\text{ cm}$, $AG=10\text{ cm}$, $\Delta\Gamma=6\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τη $B\Gamma$ και το εμβαδόν του.
21. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) η $B\Gamma$ είναι μεγαλύτερη κατά 3 cm από την AB και η $AG=9\text{ cm}$. Να βρεθούν οι πλευρές του και το εμβαδόν του.
22. Σε ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ το ύψος $AD=7\text{ cm}$. Να βρεθούν η πλευρά του και το εμβαδόν του.
23. Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 12 cm , E μέσο του AB και σημείο Z στη $B\Gamma$ ώστε $BZ=3\text{ cm}$. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .
24. Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) οι γωνίες A και Δ είναι ορθές. Αν είναι ακόμη $AB=8$, $B\Gamma=13$ και $\Delta\Gamma=20$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου.
25. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ($A=90^\circ$) είναι $AB=x$, $AG=8$ και $B\Gamma=x+4$. Να υπολογίσετε το x .
26. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB=AG=13$ και $B\Gamma=10$. Να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου που φέρνουμε από την κορυφή A .
27. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma=11$ και $AB=7$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

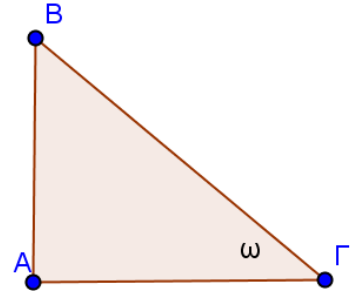
28. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $AB=AG=10$ και $B\Gamma=16$. Να υπολογίσετε το ύψος του τριγώνου που φέρνουμε από την κορυφή A .
29. Το τρίγωνο με πλευρές $\alpha=25$, $\beta=20$, $\gamma=15$ είναι ορθογώνιο;

10. Εφαπτομένη οξείας γωνίας

Εφαπτομένη της οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega}$$

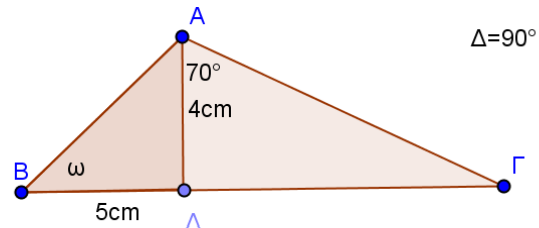
$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{AG}$$



Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε :

- Την $\varepsilon\varphi\omega$
- Το μήκος του $\Gamma\Delta$



Λύση:

$$\text{a) } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας } \omega} = \frac{AD}{BD} = \frac{4}{5}$$

b) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΔ έχουμε

$$\varepsilon\varphi 70^\circ = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}, \quad \varepsilon\varphi 70^\circ = 2,7475$$

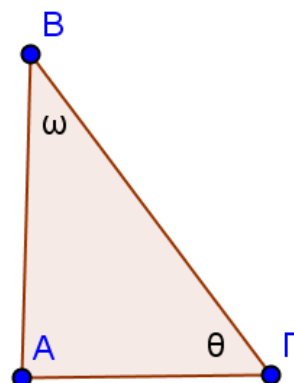
Άρα

$$2,7475 = \frac{\Delta\Gamma}{4} \quad \text{ή} \quad \Delta\Gamma = 10,99 \text{ cm}$$

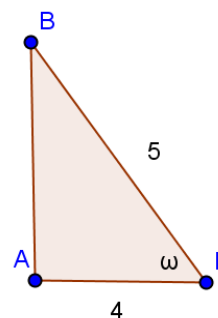
Ασκήσεις στην εφαπτομένη οξείας γωνίας

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

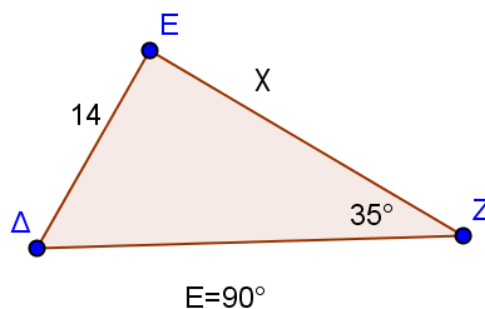
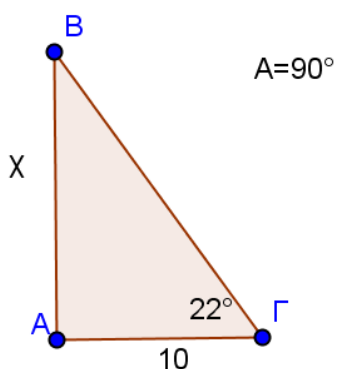
- a) Η απέναντι πλευρά της γωνίας ω είναι η
- b) Η πλευρά ΑΓ είναι προσκείμενη κάθετη της οξείας γωνίας
- c) Η πλευρά ΑΒ είναι Πλευρά της γωνίας θ
- d) Η προσκείμενη πλευρά της γωνίας ω είναι η
- e) $\epsilon\phi\omega = \dots\dots\dots$ $\epsilon\phi\theta = \dots\dots\dots$



2. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την $\epsilon\phi\omega$

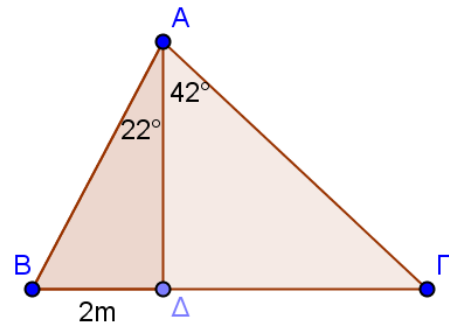


3. Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω τρίγωνα

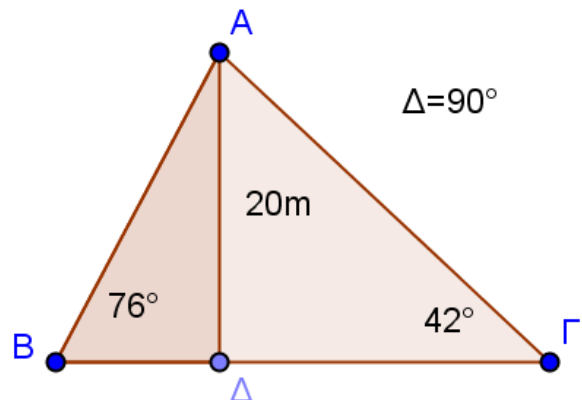


4. Να κατασκευάσετε μια οξεία γωνία ω , ώστε $\epsilon\phi\omega = \frac{5}{3}$

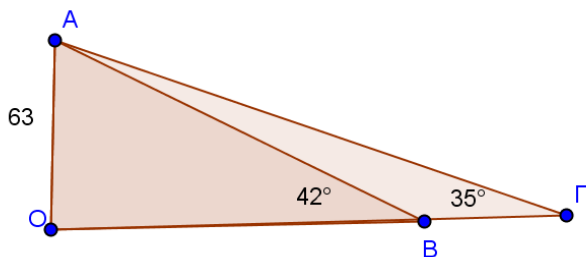
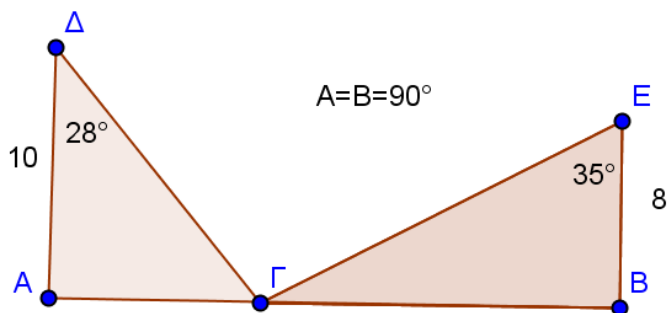
5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του $\Delta\Gamma$



6. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς BΓ

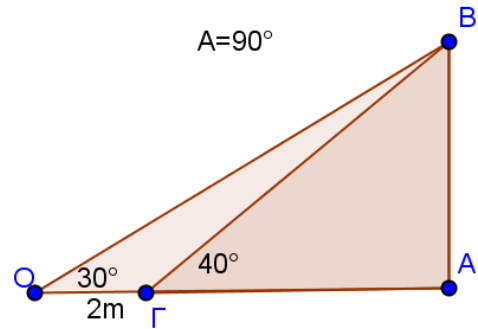


7. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση AB

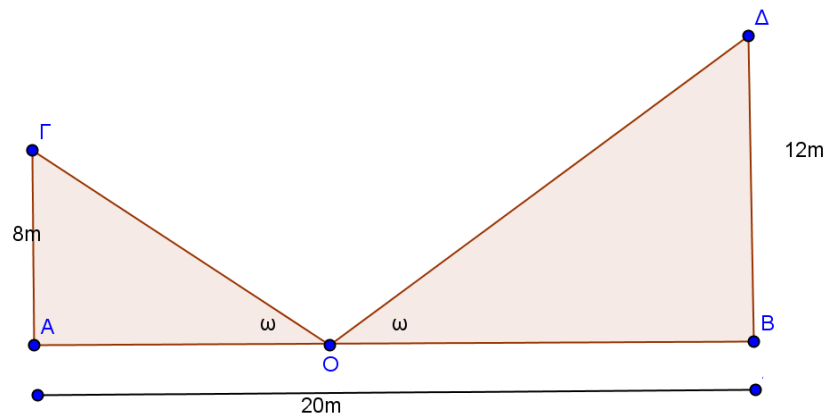


8. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων B και Γ

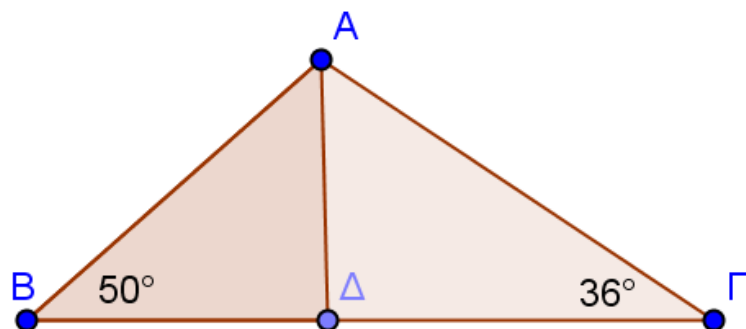
9. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AB



10. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων OA και OB.



11. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Gamma = 10\text{ m}$. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων BΔ και AΔ



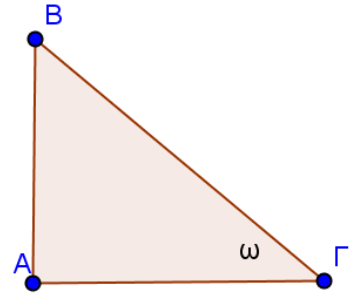
11. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Ημίτονο μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι πλευρά της γωνίας ω με την υποτείνουσα

Δηλαδή

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{AB}{B\Gamma}$$



Συνημίτονο οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου λέγεται ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά προς την υποτείνουσα

Δηλαδή

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

Παρατήρηση:

1) Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύουν

$$0 < \eta\mu\omega < 1 \text{ και } 0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$$

2) $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

3) Στη διεθνή ορολογία το ημίτονο συμβολίζεται $\sin$
Το συνημίτονο $\cos$ και η εφαπτομένη $\tan$

Παράδειγμα:

Δίνεται το διπλανό σχήμα . Να υπολογίσετε το $\eta\mu\theta$ και το $\sigma\upsilon\nu\omega$

Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

$$\eta\mu\theta = \frac{AD}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{AD}{AG}$$

Εφαρμόζοντας Π.Θ στο τρίγωνο ΑΔΓ

έχουμε :

$$\Delta\Gamma^2 = AG^2 - AD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$

Άρα $\Delta\Gamma=16$ Οπότε

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\Delta\Gamma}{AG} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

Παράδειγμα :

Δίνεται μία οξεία γωνία ω . Να αποδείξετε ότι

$$i) 5 + 3\eta\mu\omega < 8 \quad ii) 7 - 2\sigma\upsilon\nu\omega > 5$$

Λύση:

$$i. \text{ Έχω } \eta\mu\omega < 1 \text{ ή } 3\eta\mu\omega < 3 \text{ ή } 5 + 3\eta\mu\omega < 8$$

$$ii. \text{ Έχω } \sigma\upsilon\nu\omega < 1 \text{ ή } -2\sigma\upsilon\nu\omega > -2 \text{ ή } 7 - 2\sigma\upsilon\nu\omega > 5$$

Μεταβολές ημιτόνου , συνημίτονου και εφαπτομένης

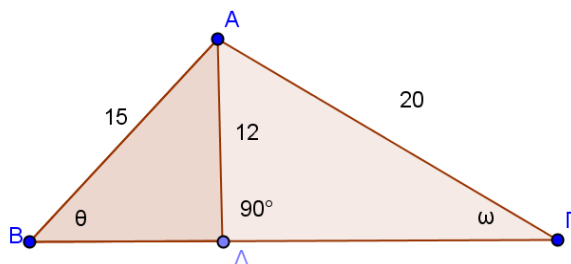
Όταν μια γωνία ω αυξάνεται τότε :

- Αυξάνεται το ημίτονό της
- Ελαττώνεται το συνημίτονό της
- Αυξάνεται η εφαπτομένη της

Παρατήρηση:

Αν δύο οξείες γωνίες έχουν:

- Ίσα ημίτονα τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες
- Ίσα συνημίτονα τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες
- Ίσες εφαπτόμενες τότε οι γωνίες αυτές είναι ίσες



Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα x και y

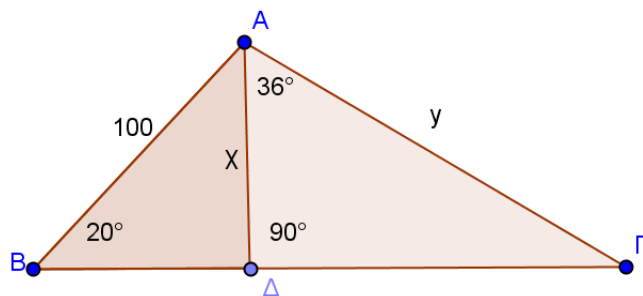
Λύση:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\eta\mu B &= \frac{A\Delta}{AB} \quad \text{ή} \quad \eta\mu 20^\circ \\ &= \frac{x}{100} \quad \text{ή} \quad 0,342 = \frac{x}{100}\end{aligned}$$

$$x = 34,2$$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ έχουμε $\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$ ή $\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{34,2}{y}$ ή $0,809 = \frac{34,2}{y}$ ή $y = \frac{34,2}{0,809}$ ή $y = 42,27$

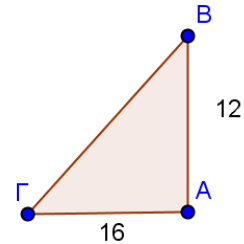


Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	30°	45°	60°
$\eta\mu$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Sigma\upsilon\nu$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\epsilon\phi$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς

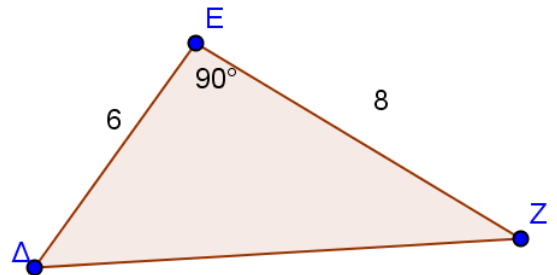
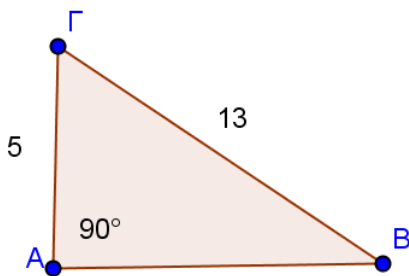
1. Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε το $\eta\mu B$ και $\sigma\upsilon\nu B$



2. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB = 25\text{ cm}$, $AG = 20\text{ cm}$ και $BΓ = 15\text{ cm}$

- a) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο
b) Να υπολογίσετε το $\eta\mu A$ και το $\sigma\upsilon\nu A$

3. Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα, να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των οξείων γωνιών



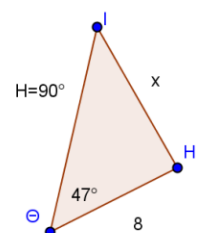
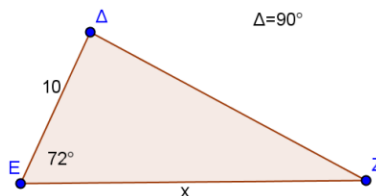
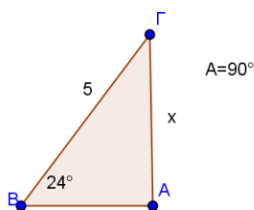
4. Να βάλετε σε κύκλο τις τιμές που δεν εκφράζουν το ημίτονο οξείας γωνίας

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{2014}{2015}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) 0,97

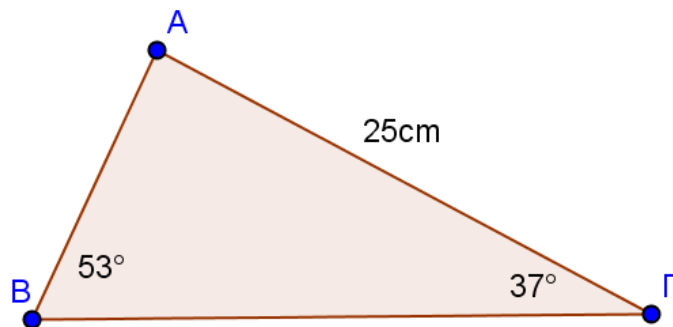
5. Δίνεται μια οξεία γωνία ω . Να αποδείξετε ότι :

α) $3 + 2\eta\mu\omega < 5$ β) $-2 + 3\eta\mu\omega > -2$ γ) $5 - 3\eta\mu\omega > 2$
δ) $3\eta\mu\omega + 7\sigma\upsilon\nu\omega < 10$ ε) $7\sigma\upsilon\nu\omega - 3\eta\mu\omega > -3$

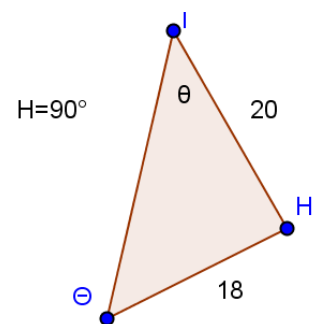
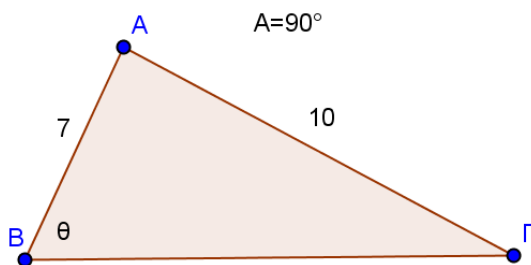
6. Να υπολογίσετε το x σε καθένα από τα παρακάτω τρίγωνα



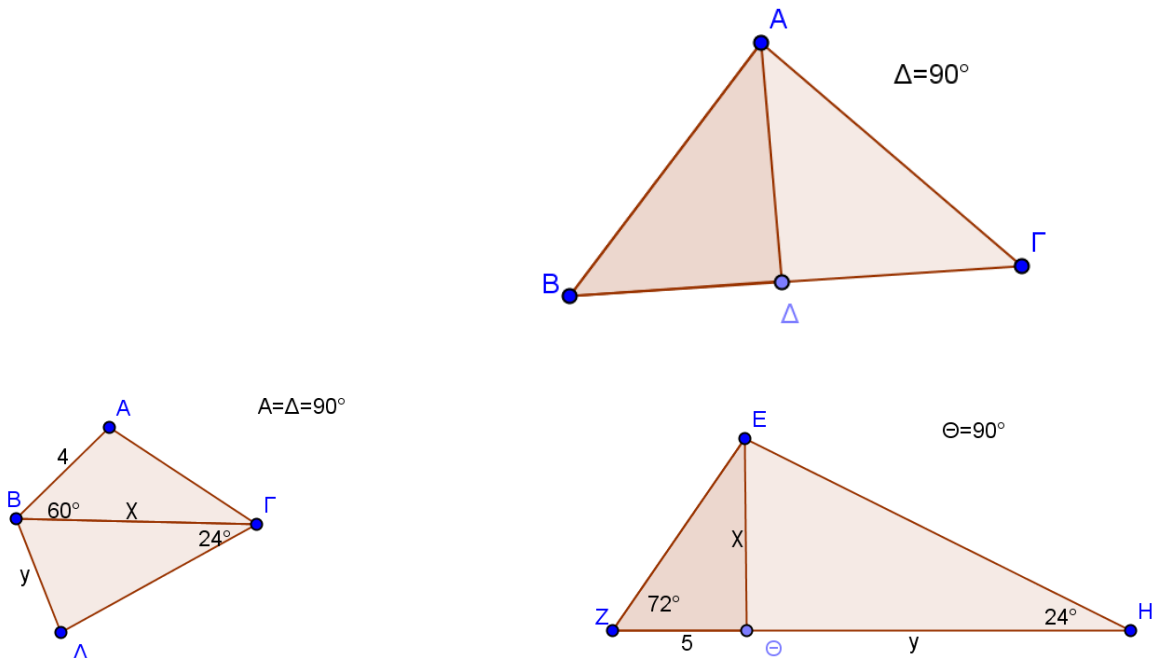
7. Να υπολογίσετε τη ΒΓ του παρακάτω σχήματος.



8. Να υπολογίσεις την γωνία θ στα παρακάτω σχήματα



9. Να βρείτε τα x και y στα παρακάτω σχήματα



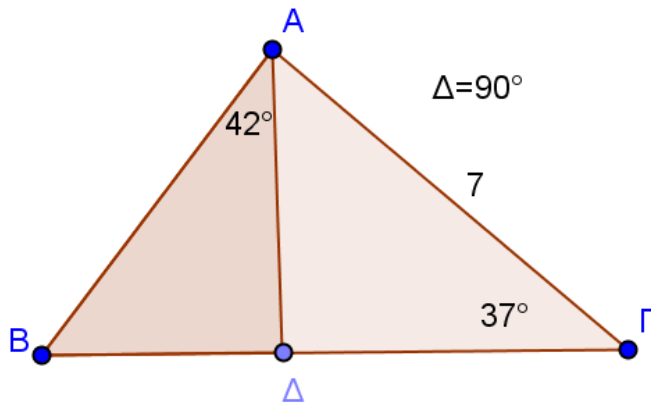
10. Στο διπλανό σχήμα είναι $AB=15\text{cm}$, $B\Gamma=20\text{cm}$ και $B\Delta=7\text{ cm}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες B και Γ

11. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD το ύψος του . Αν $AB=10$, $B\Gamma=18$ και $\Delta B=5$, να υπολογίσετε :

- Τη γωνία B
- Το ύψος AD
- Τη γωνία Γ

12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A=58^\circ$ και $B=32^\circ$. Αν $AB=10\text{cm}$, να υπολογίσετε τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$

13. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το μήκος του ΒΔ



14. Αν $\theta=30^\circ$ και $\omega=45^\circ$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων :

$$A = 2\sigma\eta\nu\theta \cdot \eta\mu\omega - \eta\mu^2\omega + 2\eta\mu\theta \cdot \sigma\eta\nu\omega \quad \text{και} \quad B = \frac{4\sigma\eta\nu^2\omega - 1}{\varepsilon\varphi\omega - \varepsilon\varphi^2\theta}$$

15. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

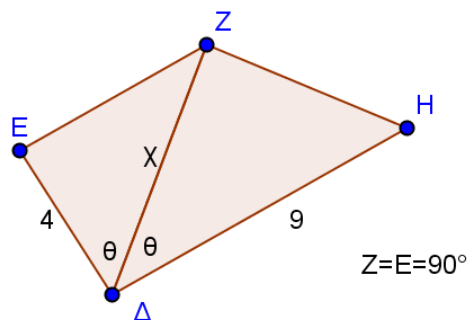
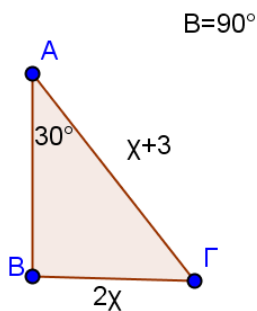
$$A = \varepsilon\varphi^2 45^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ \cdot \varepsilon\varphi 30^\circ \cdot \varepsilon\varphi^2 60^\circ$$

$$B = \frac{3}{4} \varepsilon\varphi^2 45^\circ + \varepsilon\varphi^2 60^\circ - \eta\mu 30^\circ + \sigma\eta\nu 60^\circ - \varepsilon\varphi^2 45^\circ$$

16. Να υπολογίσετε τις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A=90^\circ$) όταν :

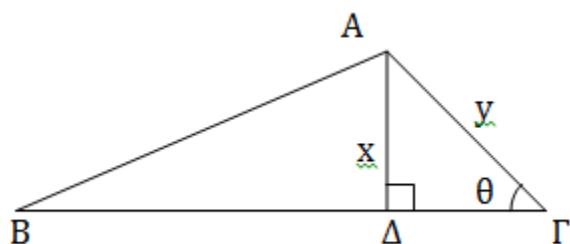
$$a) B = 60^\circ \text{ και } \beta = 4cm \quad b) B = 30^\circ \text{ και } \gamma = 10cm$$

17. Να υπολογίσετε το x στα παρακάτω σχήματα



12. Επαναληπτικές ασκήσεις στην τριγωνομετρία

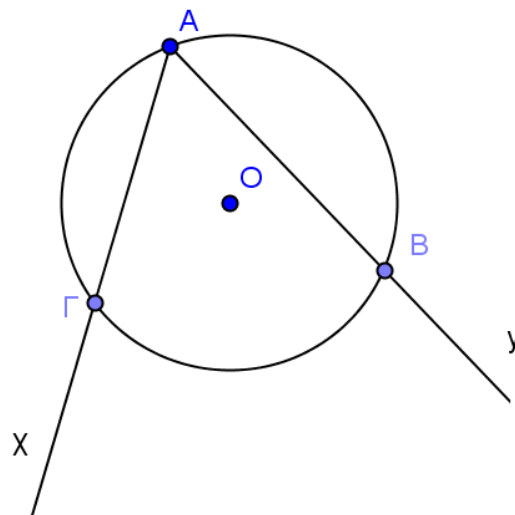
1. Στο διπλανό σχήμα δίνονται : $AB=8\text{cm}$, $\Delta\Gamma=4\text{cm}$, $\widehat{B}=30^\circ$ και $A\Delta \perp B\Gamma$. Να βρείτε τα x , y , θ .



2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) είναι $\epsilon\phi B=\frac{3}{4}$ και $\alpha=15\text{cm}$. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές και το εμβαδόν του.
3. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $A=150^\circ$, $A\Delta=10\text{cm}$ και $AB=20\text{cm}$. Να υπολογίσετε το ύψος AE και το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$.
4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) έχει $B=50^\circ$ και $B\Gamma=20\text{cm}$. Να βρείτε τις κάθετες πλευρές του AB και $A\Gamma$. Δίνεται $\eta\mu 50^\circ=0,766$.
5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\epsilon\phi\Gamma=\frac{4}{3}$ και $AB=40$. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.
6. Αν $\eta\mu\theta=\frac{12}{13}$ να βρείτε τα $\sigma\upsilon\nu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$.
7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι 15 και η AB είναι 5. Να βρείτε τις γωνίες του.

13. Εγγεγραμμένες γωνίες

Εγγεγραμμένη $\chi\hat{A}y$: ονομάζεται η γωνία που έχει την κορυφή της στην περιφέρεια του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο



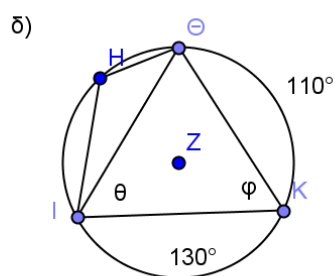
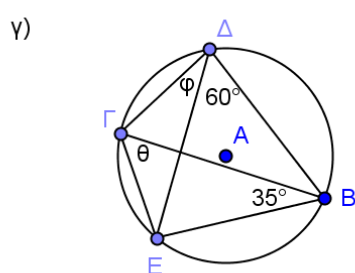
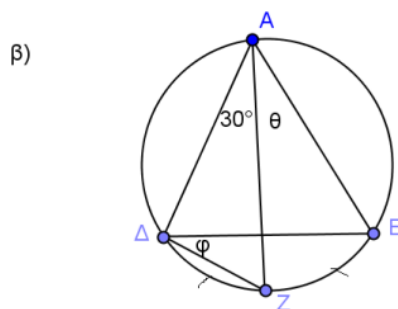
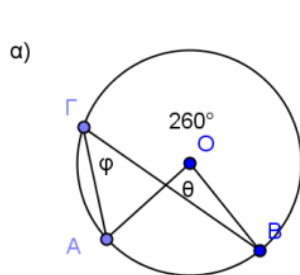
- Το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ του κύκλου (ο,ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία $\chi\hat{A}y$, λέγεται αντίστοιχο τόξο αυτής
- Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{A}\Gamma$ λέμε ότι βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$

Παρατήρηση:

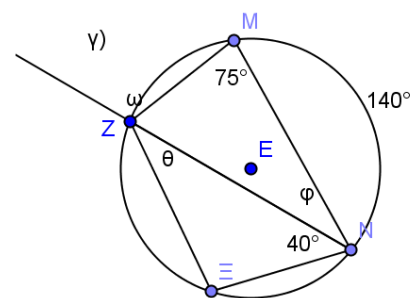
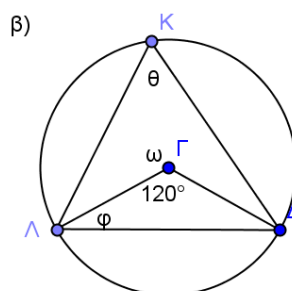
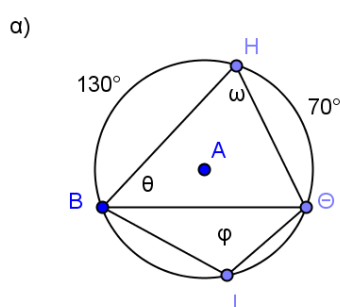
- 1) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο (ή σε ίσα τόξα) $B\hat{A}\Gamma = \frac{B\hat{O}\Gamma}{2}$
- 2) Η εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της
- 3) Κάθε εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικόκλιο είναι ορθή
- 4) Εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα του ίδιου κύκλου είναι ίσες

Ασκήσεις στις εγγεγραμμένες γωνίες

1. Να υπολογίσεις τις γωνίες ϕ και θ στα παρακάτω σχήματα

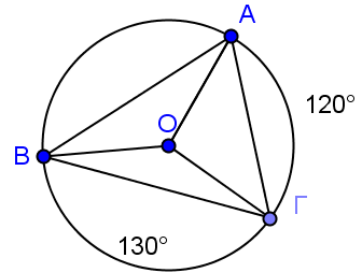


2. Να υπολογίσετε τις γωνίες ϕ, ω, θ των παρακάτω σχημάτων

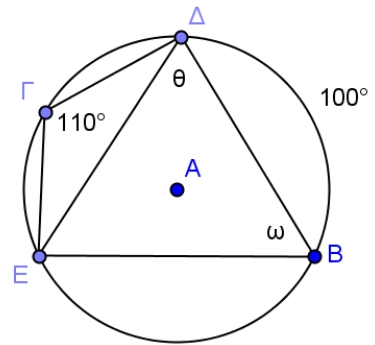


3. Σε έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\widehat{AB} = 110^\circ$, $\widehat{BT} = 140^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 90^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ

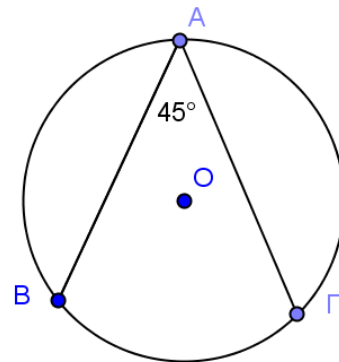
4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τον κύκλο με κέντρο O και $\widehat{A\Gamma} = 120^\circ$, $\widehat{B\Gamma} = 130^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες :
 α) $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ β) $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$ γ) $\widehat{A\hat{\Gamma}B}$



5. Να υπολογίσετε τις γωνίες θ και ω



6. Έστω ο κύκλος (O, ρ) με $\rho = 2\text{cm}$ και η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 45^\circ$. Να υπολογίσετε :
 α) Τη γωνία $\widehat{B\hat{O}\Gamma}$
 β) Το μήκος της χορδής $B\Gamma$



14. Κανονικά πολύγωνα

Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες

Περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου: λέγεται ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου

Εγγεγραμμένο πολύγωνο : είναι το πολύγωνο που οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου

Κεντρική γωνία : ενός κανονικού n -γώνου λέμε κάθε επίκεντρη γωνία του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού n -γώνου που βαίνει σε τόξο με χορδή ίση με την πλευρά του κανονικού n -γώνου

Παρατήρηση:

Η κεντρική γωνία ω ενός κανονικού n -γώνου είναι ίση με $\frac{360^\circ}{n}$

Η γωνία φ ενός κανονικού n -γώνου είναι παραπληρωματική της γωνίας ω $\varphi = 180^\circ - \omega$

Παράδειγμα :

Δίνεται κανονικό οκτάγωνο. Να βρείτε

- a) Την κεντρική του γωνία
- b) Τη γωνία του

Λύση:

a) Το πλήθος των πλευρών του κανονικού οκταγώνου είναι $n=8$

$$\text{Η κεντρική γωνία } \omega = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

b) Η γωνία του κανονικού πολυγώνου

$$\varphi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - 45^\circ = 135$$

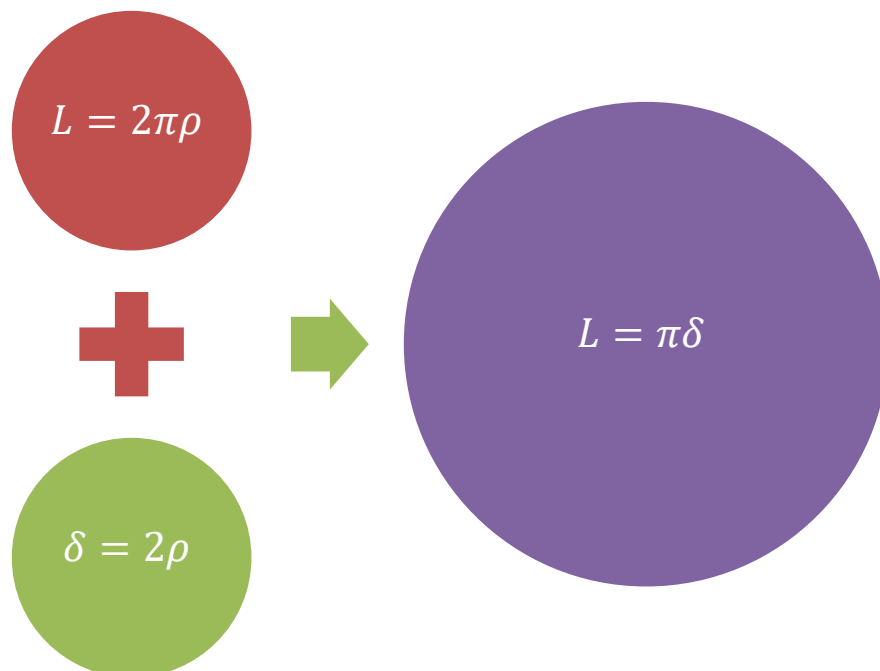
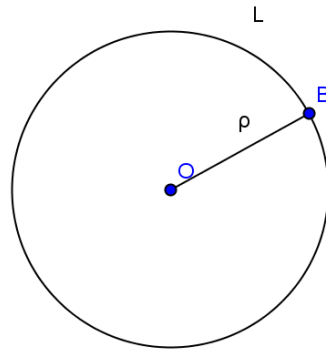
Ασκήσεις στα κανονικά πολύγωνα

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις
 - a) Ένα πολύγωνο λέγεται Όταν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους
 - b) Ο κύκλος που διέρχεται από τις κορυφές ενός πολυγώνου λέγεται Του πολυγώνου
 - c) Όταν οι κορυφές ενός πολυγώνου ανήκουν σ' έναν κύκλο, τότε το πολύγωνο λέγεται Στον κύκλο αυτό
 - d) Αν ω και ϕ η κεντρική γωνία και η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου αντίστοιχα, τότε $\omega = \dots\dots\dots$ Και $\phi = \dots\dots\dots$
2. Δίνεται κανονικό δωδεκάγωνο. Να βρείτε :
 - a) Την κεντρική γωνία του
 - b) Τη γωνία του
3. Να βρείτε τη γωνία ενός κανονικού 24-γωνου
4. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου που έχει κεντρική γωνία $\omega = 36^\circ$
5. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου που έχει γωνία $\frac{4}{3}$ της ορθής
6. Σε κανονικό πολύγωνο η γωνία του είναι τριπλάσια της κεντρικής γωνίας. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου

15. Μήκος κύκλου και μήκος τόξου

Το μήκος του κύκλου L :

- Με διάμετρο δ είναι $L=\pi\delta$
- Με ακτίνα ρ είναι $L=2\pi\rho$



Παράδειγμα

Να βρείτε το μήκος του κύκλου (O,ρ) του διπλανού σχήματος

Λύση :

Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο αφού η γωνία Γ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο
Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο ABΓ

$$AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$$

$$AB^2 = 3^2 + 1,6^2 = 9 + 2,56 = 11,56$$

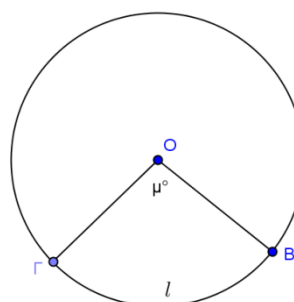
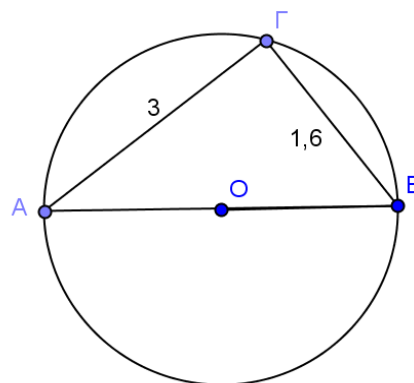
$$\text{Άρα } AB = \sqrt{11,56} = 3,4$$

$$\text{Οπότε } \delta = 3,4 \text{ και } \rho = 1,7$$

$$\text{Άρα } L = \pi \cdot \delta = 3,14 \cdot 3,4 = 10,68$$

Μήκος τόξου

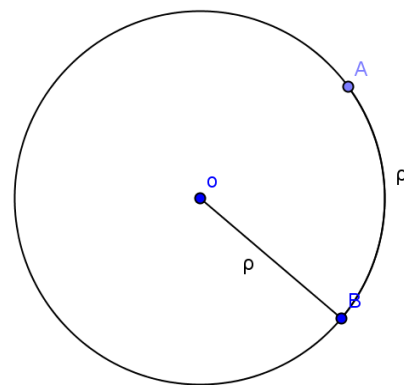
$$\text{Ένα τόξο } \mu^{\circ} \text{ έχει μήκος } \ell = 2\pi\rho \cdot \frac{\mu}{360}$$



Ακτίριο ή rad

Είναι το τόξο ενός κύκλου (O, ρ) που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου

Το μήκος ενός τόξου α rad ισούται με $\ell = \alpha \cdot \rho$



Σχέση που συνδέει μοίρες με ακτίνα

Αν ένα τόξο είναι μ° ή α rad τότε ισχύει

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Παράδειγμα :

Να βρεθεί πόσα rad είναι μια γωνία 30°

Λύση :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180} \Rightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{30}{180} \Rightarrow \frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

Τεταρτοκύκλιο : ονομάζεται το τόξο που έχει μέτρο 90°

Ημικόκλιο : ονομάζεται το τόξο που έχει μέτρο 180°

Παρατήρηση:

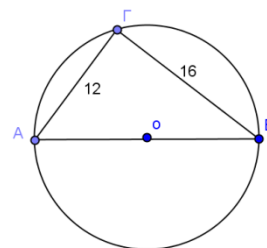
μοίρες	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
ακτίνα	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Δύο τόξα με ίσα μήκη δεν είναι απαραίτητα ίσα , αφού μπορεί να ανήκουν σε άνισους κύκλους

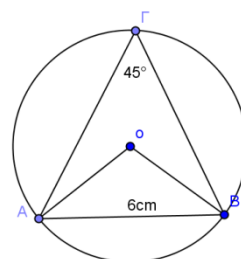
Ασκήσεις στο μήκος κύκλου – τόξου

- Ένας κύκλος έχει μήκος 12,56cm . Να βρείτε το μήκος της ακτίνας του.
- Ένας κύκλος έχει μήκος 10cm λιγότερο από έναν άλλο. Πόσο μικρότερη είναι η ακτίνα του;

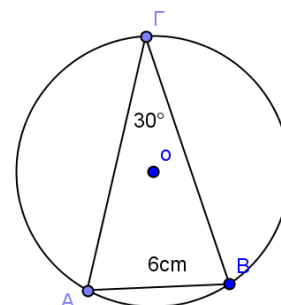
- Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (O,ρ) του διπλανού σχήματος



- Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (O,ρ) του διπλανού σχήματος



- Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου (O,ρ) του διπλανού σχήματος



- Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

- Το τόξο του κύκλου (O,ρ) , μ° έχει μήκος $\ell = \dots\dots\dots$
- Το τόξο του κύκλου (O,ρ) , α rad έχει μήκος $\ell = \dots\dots\dots$
- Αν το τόξο είναι μ° ή α rad , τότε ισχύει:

$$i) \frac{\mu}{180} = \frac{\dots}{\dots} \quad ii) \mu = \dots \quad iii) \alpha = \dots$$

- Έστω κύκλος (O,ρ) με $\rho=4\text{cm}$. Να βρείτε το μήκος του τόξου :

- 15°

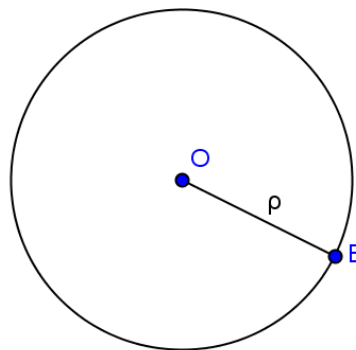
b) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

8. Να υπολογίσετε το μήκος ενός τεταρτοκύκλιου ακτίνας $\rho=10\text{cm}$
9. Ένας κύκλος έχει μήκος $62,8\text{cm}$. Να βρείτε το μήκος τόξου 120°
10. Ένα τόξο 60° έχει μήκος $18,84 \text{ cm}$. Να βρείτε την ακτίνα του κύκλου
11. Να μετατρέψετε σε rad ένα τόξο 48°
12. Να μετατρέψετε σε μοίρες ένα τόξο $\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$

16. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με ακτίνα ρ και διάμετρο δ είναι :

$$E = \pi \rho^2 \quad \text{και} \quad E = \frac{\pi \delta^2}{4}$$



Κυκλικός δακτύλιος : λέγεται το χωρίο που βρίσκεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων

Παρατήρηση:

Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου : θα λέγεται εμβαδόν κύκλου

Παράδειγμα:

Αν το μήκος L ενός κύκλου (O, ρ) είναι 4π cm, να βρείτε το εμβαδόν του

Λύση:

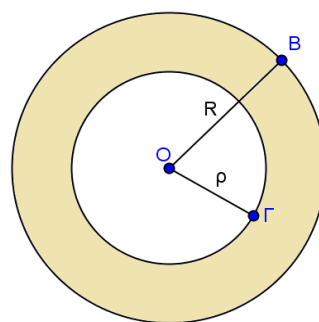
$$\text{Έχουμε } L = 4\pi \Rightarrow 2\pi\rho = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi\rho}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} \Rightarrow \rho = 2 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν E του κύκλου είναι $E = \pi\rho^2$ ή $E = \pi 2^2$ ή $E = 4\pi$ ή $E = 12,56$

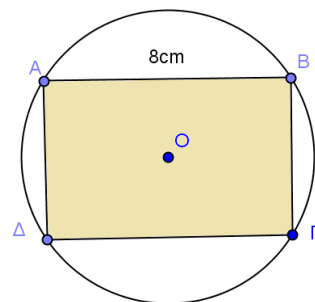
Ασκήσεις στο εμβαδόν κυκλικού δίσκου

1. Να βρείτε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα που έχει :
 - a) Ακτίνα $\rho=5\text{cm}$
 - b) Διάμετρο $\delta=2\text{cm}$
2. Αν το μήκος του κύκλου $(0,\rho)$ είναι $62,8\text{ cm}$,να βρείτε το εμβαδόν του
3. Αν το εμβαδόν ενός κύκλου είναι $62,8\text{cm}^2$, να βρείτε το μήκος του
4. Ένας κύκλος έχει ακτίνα $\rho=5\text{cm}$. Να κατασκευάσετε κύκλο που να έχει διπλάσιο εμβαδόν

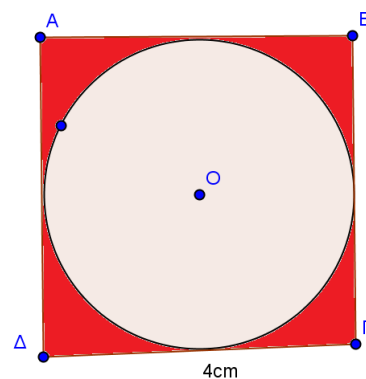
5. Οι ακτίνες των δύο κύκλων στο διπλανό σχήμα είναι $\rho=4\text{cm}$ και $R=6\text{cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου



6. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο και έχει εμβαδόν 48cm^2 , να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου.



7. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο με πλευρά 4cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου



17. Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Κυκλικός τομέας γωνίας μ° : λέγεται το μέρος του κυκλικού δίσκου που περιέχεται μέσα στην επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = \mu^\circ$

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί σε τόξο :

$$\mu^\circ \text{ είναι } E = \pi \rho^2 \cdot \frac{\mu}{360}$$

$$\alpha \text{ rad είναι } E = \frac{1}{2} \alpha \rho^2$$

παρατήρηση :

- 1) Το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι

$$E = \frac{\pi \rho^2}{2}$$

- 2) Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου είναι

$$E = \frac{\pi \rho^2}{4}$$

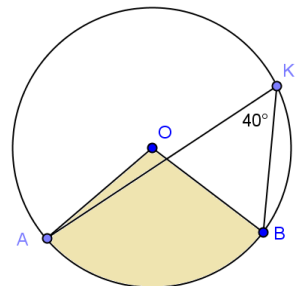
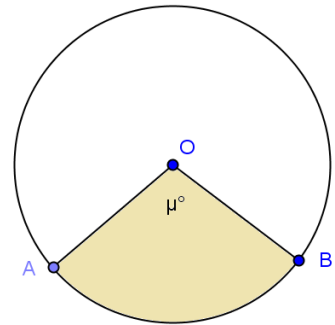
Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα έχουμε κύκλο (ο,ρ) με $\rho=3$ και την εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{K}B = 40^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του κυκλικού τομέα τόξου AB

Λύση:

Η εγγεγραμμένη είναι 40° άρα το τόξο στο οποίο βαίνει θα είναι 80°

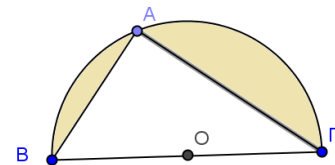
$$E = \frac{\pi \rho^2 \mu}{360} = \pi \cdot 9 \cdot \frac{80}{360} = 2\pi = 6,28 \text{ cm}^2$$



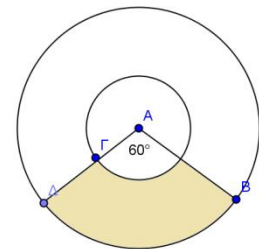
Ασκήσεις στο εμβαδόν κυκλικού τομέα

1. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με $\rho=4\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα 30°
2. Αν το εμβαδόν κυκλικού τομέα 45° είναι $12,56\text{cm}^2$, να βρείτε την ακτίνα του κύκλου.
3. Να υπολογίσετε τη γωνία του κυκλικού τομέα που έχει εμβαδόν ίσο με $\frac{1}{12}$ του εμβαδού του κύκλου
4. Αν το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα είναι πcm^2 και η ακτίνα του είναι 2cm , να βρείτε τη γωνία του κυκλικού τομέα.

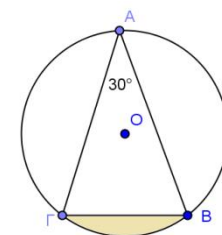
5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma=10\text{cm}$. Αν $AB=6\text{cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του ημικυκλίου



6. Δίνεται κύκλος (O, ρ) με $\rho=2\text{cm}$ και η χορδή του $B\Gamma=2\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα γωνίας $B\hat{O}\Gamma$



7. Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες $\rho=4\text{cm}$ και $R=6\text{cm}$. Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

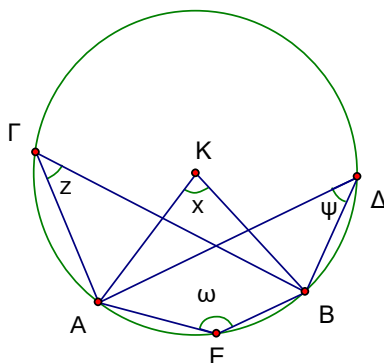


8. Στο διπλανό σχήμα έχουμε κύκλο (O, ρ) με $\rho=6\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου κυκλικού τμήματος.

Επαναληπτικές ασκήσεις στον κύκλο

1. Στο σχήμα παραπλεύρως, τα σημεία Α,Β,Γ,Δ και Ε βρίσκονται πάνω στον κύκλο (Κ,Ρ). Αν το τόξο ΑΕΒ έχει μέτρο 80ο, να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών:

(α) x (β) z (γ) y (δ) ω



2. Σε κύκλο (O, ρ) να πάρετε δύο διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle BOΓ = 100^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
3. Σε ένα κύκλο (O, ρ) να φέρετε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ. Αν Ε είναι ένα σημείο του τόξου ΑΒ, να συγκρίνετε τις γωνίες ΒΕΓ και ΓΕΔ.
4. Να γράψετε κύκλο (O, ρ) και να πάρετε τα τόξα $\widehat{AB} = 60^\circ$ και $\widehat{\Gamma\Delta} = 40^\circ$. Αν οι χορδές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Κ, να υπολογίσετε τη γωνία ΑΚΒ.
5. Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει κάθε γωνία του ίση με 140° .
6. Ένα κανονικό οκτάγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 4. Να υπολογίσετε την πλευρά του.
7. Κανονικό οκτάγωνο έχει απόστημα 5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.
8. Ο τροχός ενός αυτοκινήτου έχει περιφέρεια 2,198 cm. Να υπολογίσετε την διάμετρό του.
9. Το εμβαδόν ενός κύκλου είναι 314. Να βρείτε το μήκος του.

18. Γενικές επαναληπτικές ασκήσεις

1. Α) Να λύσετε την εξίσωση $1 - \frac{2x-5}{3} = x - \frac{x-16}{6}$ (1)

Β) Να λύσετε την ανίσωση $x - \frac{2(3x-1)}{3} - 1 < \frac{x}{2}$ (2)

Γ) Να εξετάσετε αν η λύση της εξίσωσης (1) είναι και λύση της ανίσωσης (2)

2. Α) Να λύσετε τη διπλή ανίσωση $3x - 1 < x \leq \frac{x}{2}$

Β) Να βρείτε το μεγαλύτερο ακέραιο που δεν ξεπερνάει το μισό του και είναι μεγαλύτερος από το τριπλάσιο του ελαττωμένο κατά 1

3. Α) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{10x}{3} + 2(7x - 9) = 34$

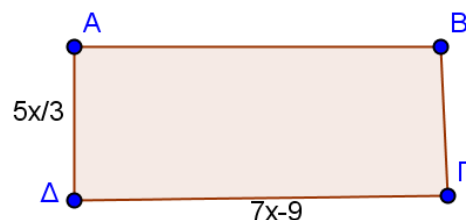
Β) Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο

ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

i. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του x

ii. Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 34cm , να υπολογίσετε τη

διαγώνιο ΑΓ



4. Δίνεται η εξίσωση : $\frac{5x-1}{2} - 1 = x - \frac{11-x}{4}$ (1)

a) Να λύσετε την εξίσωση (1)

b) Αν η εξίσωση (1) και η εξίσωση $\frac{2x+\alpha}{3} - x = \alpha - 1$ έχουν κοινή λύση , να βρείτε την τιμή του α

c) Για α=2 να λύσετε την ανίσωση $\alpha y - 1 < 2(y - \alpha)$

5. Δίνεται η διπλή ανίσωση

$$\frac{3x-1}{3} \leq 2x-1 \leq \frac{x}{2}$$

a) Να λύσετε την διπλή ανίσωση

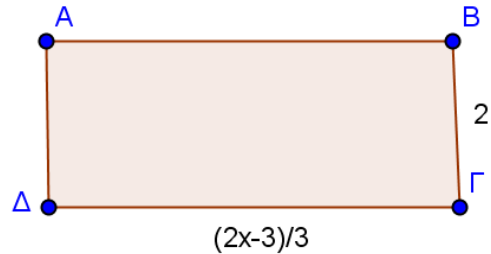
b) Αν η εξίσωση

$$\frac{3\alpha x - 1}{2} = \alpha \cdot \frac{x + 3}{5} - 1$$

Έχει τις ίδιες λύσεις με την διπλή ανίσωση , να βρείτε τις τιμές του α

6. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο .

- a) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του x
- b) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 10 , να υπολογίσετε την τιμή του x
- c) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου δεν ξεπερνάει τον αριθμό 5 να βρείτε τις δυνατές τιμές του x



7. Έστω η ευθεία $\varepsilon: 2x-3y=6$

- a) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες και να σχεδιάσετε την ευθεία
- b) Να βρείτε την κλίση της ευθείας
- c) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(\lambda-1, 2\lambda-3)$, να βρείτε την τιμή του λ

8. Δίνεται η εξίσωση της ευθείας

$$\varepsilon: y = \frac{3\lambda - 1}{2}x - \lambda + 2$$

- a) Αν η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $M(-1, 5)$ να βρείτε το λ
- b) Για $\lambda=-1$,
 - i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που ορίζεται από την ε και τους άξονες
 - ii. Να βρείτε τα σημεία της ε που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'

9. Δίνεται η ευθεία $y = (2\lambda + 1)x - 1$

a) Αν η κλίση της ευθείας είναι $\frac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή του λ

b) Για $\lambda = -\frac{1}{4}$,

i) Να σχεδιάσετε την ευθεία

ii) Να βρείτε και μετά να σχεδιάσετε τα σημεία της ευθείας που έχουν τεταγμένη μικρότερη από $\frac{1}{3}$

10. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y = (2\lambda + 1)x + 3\mu - 2$

a) Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta: 5x + y - 7 = 0$ και περνάει από το σημείο $A(-1, 6)$, να βρείτε τις τιμές των λ και μ

b) Για $\lambda = -3$ και $\mu = 1$

i. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε

ii. Να βρείτε την μέγιστη τιμή των τετμημένων των σημείων της ευθείας ε αν η ελάχιστη τιμή τεταγμένων της είναι 2

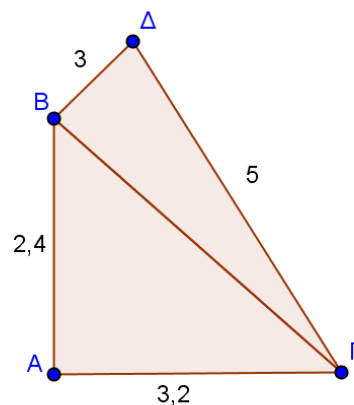
11. Στο διπλανό σχήμα $\hat{A} = 90^\circ$:

a) Να υπολογίσετε την $B\Gamma$

b) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο

c) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$

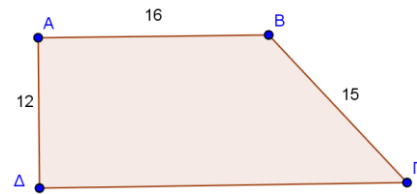
d) Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $B\Gamma$



12. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$, $AB=16$

$B\Gamma=15$ και $AD=12$. Να υπολογίσετε :

- Το μήκος ΒΔ
- Το εμβαδόν του $\Delta B\Gamma$
- Τη γωνία $\Delta \hat{B}\Gamma$

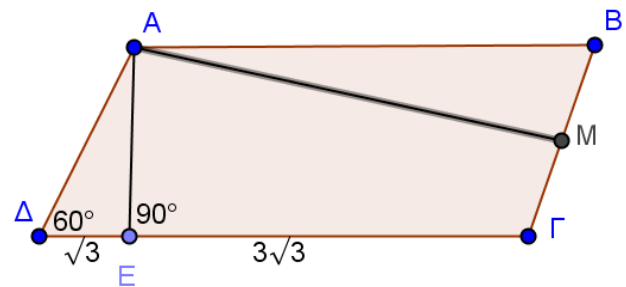


13. Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και Μ

είναι το μέσον του ΒΓ. Να

υπολογίσετε :

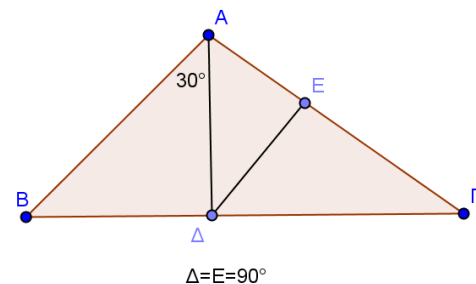
- Το ύψος ΑΕ του παραλληλογράμμου και το εμβαδόν του
- Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ



14. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Delta = \sqrt{3}cm$ και $\Delta\Gamma = 4cm$. Να

υπολογίσετε :

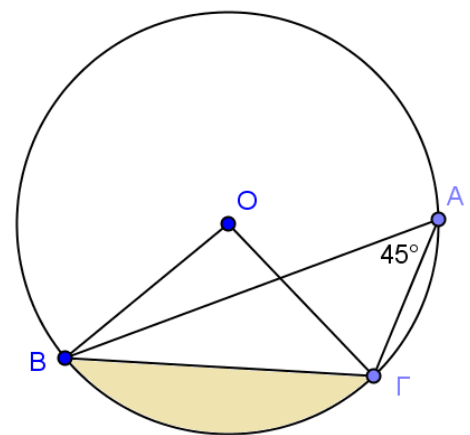
- Το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ
- Την πλευρά ΑΓ
- Το ΔΕ



15. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τον κύκλο (Ο,ρ) με

$B\Gamma = 2\sqrt{2}cm$. Να υπολογίσετε

- Τη γωνία $\hat{O}$ και την ακτίνα ρ
- Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα τόξου ΒΓ
- Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου



19. Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$A = 5 + [-(7 - 3 + 2) - (-12 - 7 + 3)] + (25 - 7)$$

$$B = (12 - 3) - [-(12 - 5 + 32) - 25] - (-25 - 4) + 3$$

2. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$A = -(2 - \alpha) - [-3\alpha + (5 - 7\alpha) - 3(\alpha - 2)]$$

$$\text{αν } \alpha = -1$$

3. Να υπολογιστούν οι παρακάτω δυνάμεις :

$$i) (-2)^3 =$$

$$vi) 25^3 : (-5)^3 =$$

$$ii) -5^3 =$$

$$vii) 1250^8 : (-625)^8 =$$

$$iii) (-4)^4 =$$

$$viii) 1002^{11} : (-2004)^{11} =$$

$$iv) (-7)^2 =$$

$$ix) (-3)^5 \cdot 3^4 \cdot 3^2 \cdot (-3) =$$

$$v) -2^2 =$$

$$x) [(-2)^2]^3 =$$

4. Να υπολογιστούν οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων :

$$A = (-2)^3 \cdot 2^4 \cdot 2^2 - 4^3 : 4 - 256^8 : 128^8$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{4^{-2}}$$

$$B = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}$$

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$i) 2(x-1) - 3(x-2) = 7(1-3x)$$

$$ii) 2(2-4\alpha) - 3\alpha = 12 \quad \frac{4x-3}{3} - \frac{2-3x}{3} = \frac{2(x-1)}{3} - 4$$

6. Να υπολογιστούν τα α , β έτσι ώστε, η εξίσωση :

να είναι αδύνατη .

να είναι αόριστη.

$$ii)(3-\alpha)\chi=4-2\beta$$

iii) Πότε η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη;

7. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις και να γίνει παράσταση των λύσεων :

$$i)2(x-3)>5x-3$$

$$ii)\frac{2x-5}{3}-\frac{7-2x}{7}\leq\frac{5-3x}{3}+2$$

$$iii)\frac{3-x}{4}+\frac{7-2x}{3}\geq\frac{2(x-4)}{2}-12$$

8. Να γίνει συναλήθευση των παρακάτω ανισώσεων:

$$2(x-3)+5\geq 4-3x+7$$

$$\frac{7(x-1)}{3}+\frac{2x-1}{2}\leq\frac{3x-6}{2}-1$$

9. Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

$$A=[(-3)^0-(-3^4+57)-(-2)^5\cdot 2^{-7}]-[-(-2)^3]^3:(-8)^2$$

$$B=(-2)-[4\cdot(-2+5-6)+5-13]+(16-21-2^3)-[(-2)\cdot(-1)\cdot(-4)]^3$$

$$G=3\cdot 2^{-3x-5}-2(x-1)^2-5\cdot 2^{2-x}$$

Για $\chi=-2$.

10.A) Να λυθεί η εξίσωση :

$$\frac{2(x-1)}{5}-4\frac{x+1}{3}=\frac{4-x}{5}-2(-x+1)$$

B) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{2-x}{16}+5\frac{x+3}{2}>\frac{2x-5}{4}+\frac{1}{8}$$

$$2x-3\leq 2(2x-2)$$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση :

$$\frac{x-2}{5} - 2\frac{x-3}{3} \geq \frac{4-x}{5} - 2x$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $\psi+3\chi+1=0$

A) Να γραφεί στη μορφή $\psi=\alpha\chi+\beta$

B) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες $\chi' \chi$ και $\psi' \psi$.

Γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία $\Gamma(-1,2)$ και $\Delta(2,2)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης .

Δ) Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης .

Ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης και των αξόνων.

12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ ύψος $B=50^\circ$, $\hat{A}\Gamma=30^\circ$ και $A\Gamma=6$, $B\Delta=2,7$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

13. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{\sqrt{\eta\mu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ - (\eta\mu 45^\circ)^2}}{\epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ}$$

$$B = \frac{(\sigma\upsilon\nu 45^\circ - \eta\mu 45^\circ)^2}{\epsilon\phi 45^\circ}$$

14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma$, $\hat{A}=120^\circ$ και $A\Delta$ ύψος με $A\Delta=8$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.

15. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$, $B=60^\circ$ και $AB=10$.

A) Να βρεθεί η περίμετρός του .

B) Να βρεθεί το εμβαδόν του .

Γ) Να βρεθεί το ύψος $A\Delta$.

16. Σε έναν κύκλο (O, R) γράφουμε δύο διαδοχικές επίκεντρες γωνίες : $\widehat{AOB}=130^\circ$ και $\widehat{BO\Gamma}=68^\circ$. Να υπολογιστεί η γωνία $\widehat{AO\Gamma}$ καθώς και οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$. (Και σε rad).
17. Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AGB}$ βαίνει σε ημπεριφέρεια . Αν το τόξο $\widehat{GB}=80^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.
18. Δίνεται κύκλος $(O, 2)$ και τα σημεία του A, B, Γ έτσι ώστε η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AGB}=45^\circ$. Να υπολογίσετε :
- a) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και το μήκος του κύκλου.
 - b) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στο τόξο $\widehat{AB}$.
 - c) Το εμβαδόν του μικρότερου χωρίου που βρίσκεται ανάμεσα στον κύκλο και τη χορδή AB .

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Β' ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α) Το μήκος ενός κύκλου ακτίνας ρ είναι $L=.....$

β) Το μήκος ενός τόξου μ^0 μοιρών σε κύκλο ακτίνας ρ είναι $S=.....$

γ) Το εμβαδό κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ είναι $E=.....$

Μονάδες 6

A2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

Οι μονάδες μέτρησης του μέτρου ενός τόξου είναι οι δύο: α)
και β)

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

B1. Τι ονομάζουμε εξίσωση ; Τι ονομάζουμε λύση της εξίσωσης ;

Μονάδες 3

B2. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της Α' στήλης του παρακάτω πίνακα στηναντίστοιχη λύση της Β' στήλης

ΣΤΗΛΗ Α΄

ΣΤΗΛΗ Β΄

ΕΞΙΣΩΣΗ		ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	
1.	$5x = 0$	α.	-2
2.	$2x = 2x$	β.	Αδύνατη
3.	$-x = 2$	γ.	0
4.	$3x - x = 2x - 5$	δ.	Ταυτότητα

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1	2	3	4

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

Γ1. $2(x - 1) = 4(x - 4)$

Μονάδες 5

Γ2. $\frac{x-1}{2} = \frac{1+2x}{3}$

Μονάδες 10

Γ3. $\frac{1+x}{2} - \frac{2x-1}{3} = \frac{1+2x}{3} + \frac{1}{2}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ορθογώνια με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{E}=90^\circ$. Επιπλέον έχουμε:

$AB=6\text{ cm}$, $A\Gamma=8\text{ cm}$, $A\Delta=1\text{ cm}$, $E\Gamma=7\text{ cm}$

Δ1. Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων: $B\Gamma$, BE και $B\Delta$

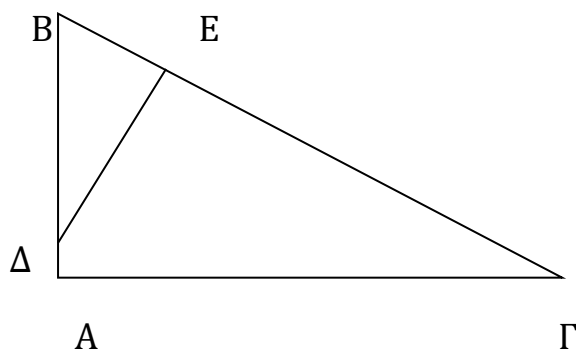
Μονάδες 9

Δ2. Να υπολογιστεί το τμήμα ΔE

Μονάδες 9

Δ3. Να υπολογιστεί η περίμετρος του τετραπλεύρου $A\Delta E\Gamma$.

Μονάδες 7



ΘΕΜΑ Ε

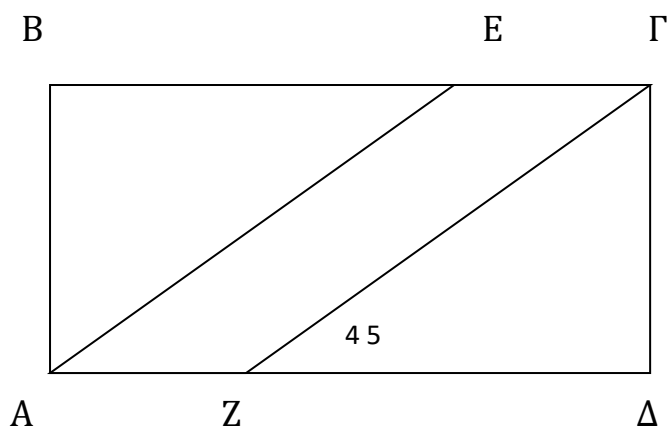
Στο ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $B\Gamma=8\text{cm}$ και $E\Gamma=5\text{ cm}$. Αν το $BE\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο με $\widehat{E\Delta\Gamma} = 45^\circ$ τότε :

Ε1. Να υπολογίσετε τα μήκη $E\Delta=x$ και $\Delta\Gamma=y$.

Μονάδες 12

Ε2. Να βρεθούν τα εμβαδά των $AB\Gamma\Delta$ και $BE\Delta Z$.

Μονάδες 13



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Β' ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Να μεταφέρετε τις παρακάτω προτάσεις στη κόλλα σας και να γράψετε δίπλα το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος.

A1. $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

A2. $\varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$

A3. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (ορθή γωνία είναι η Α) ισχύει ότι $\sin B = \frac{BG}{AB}$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Β

Να μεταφέρετε τις παρακάτω προτάσεις στο τετράδιό σας και να γράψετε δίπλα το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος.

B1. Μια αδύνατη εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 0

B2. Όταν μια εξίσωση αληθεύει για κάθε αριθμό λέγεται ταυτότητα.

B3. Η εξίσωση $0 \cdot x = \frac{0}{5}$ είναι αδύνατη.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $\frac{x}{2} - \frac{1-x}{3} < 1$ και $-\frac{1}{2}x \geq 0$ και να τις παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \sqrt{6 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} \quad \text{και} \quad B = \sqrt{\frac{\sqrt{16}}{4} + 3\sqrt{9} + \sqrt{36}}$$

Να δείξετε ότι $A \cdot B = 2\sqrt{36}$.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Ε

Δίνεται η συνάρτηση με $y = 2x + \lambda$.

Ε1. Αν η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο (1,5) να βρείτε τη τιμή του λ και τη κλίση της.

Μονάδες 13

Ε2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 13

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Β' ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α και πώς συμβολίζεται ;

Μονάδες 3

A2. Να αντιγράψετε στην κόλλα σας συμπληρωμένες τις παρακάτω ισότητες

$$\alpha) \sqrt{0} = \quad \beta) \text{ Αν } \alpha \geq 0 \text{ τότε } (\sqrt{\alpha})^2 =$$

Μονάδες 2

A3. Να γράψετε στην κόλλα σας τις λέξεις που λείπουν. Αν παραστήσουμε έναν άρρητο αριθμό σε δεκαδική μορφή τότε τα δεκαδικά του ψηφία είναι στο πλήθος και δεν υπάρχει κανενός είδους επανάληψή τους

Μονάδες 2

A4. Να γράψετε στην κόλλα σας τις λέξεις που λείπουν.

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τους αριθμούς και τους αριθμούς .

(οι λέξεις είναι κάποιες από : πεπερασμένα, άπειρα, περιοδική, τυχαία , τετραγωνικούς, ρητούς, ριζικούς, άρρητους)

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

B1. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με υποτείνουσα την ΑΓ.

Μονάδες 2

B2. Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο ΑΒΓ που σχεδιάσατε στο ερώτημα Α ποια γωνία του είναι ορθή;

Μονάδες 2

B3. Διατυπώστε (με λόγια και τύπο) χρησιμοποιώντας το τρίγωνο ΑΒΓ που σχεδιάσατε στο ερώτημα 1) το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Μονάδες 8

B4. Χρησιμοποιώντας το τρίγωνο ΑΒΓ που σχεδιάσατε στο ερώτημα Α να γράψετε στην κόλλα σας συμπληρωμένους τους τύπους

α) $ΑΓ^2 - ΑΒ^2 = \dots\dots\dots$

β) $ΑΒ^2 = \dots\dots\dots$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Να λύσετε την παρακάτω ανίσωση:

$$\frac{x-2}{2} + \frac{2x-1}{3} - \frac{3-2x}{4} < 1$$

Μονάδες 25

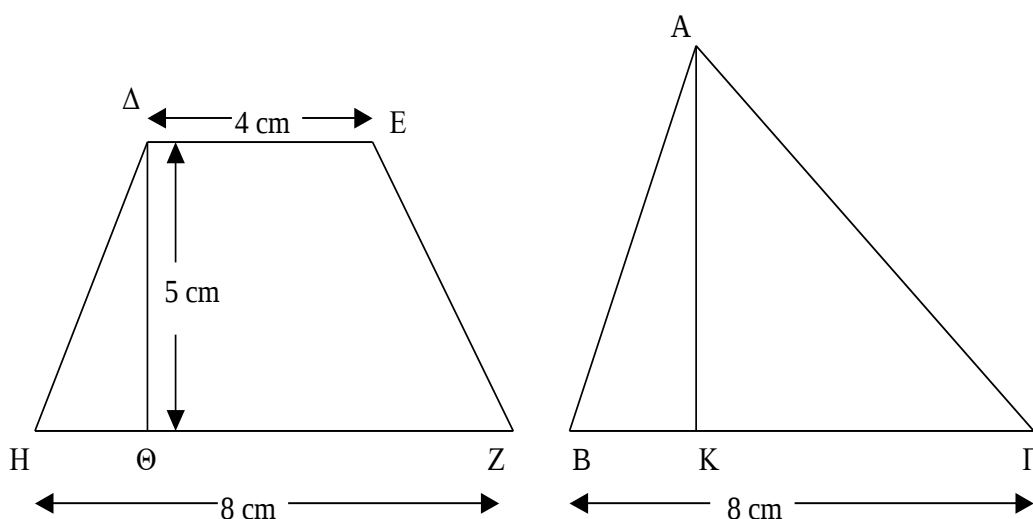
ΘΕΜΑ Δ

Το τραπέζιο ΔΕΖΗ και το τρίγωνο ΑΒΓ έχουν ίσα εμβαδά.

Δ1. Να βρεθεί το εμβαδό του τραπεζίου.

Μονάδες 13

Δ2. Να βρεθεί το ύψος ΑΚ του τριγώνου. Δίνονται $\Delta E = 4 \text{ cm}$, $\Delta \Theta = 5 \text{ cm}$, $HZ = 8 \text{ cm}$, $B\Gamma = 6 \text{ cm}$.



Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Ε

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$ δίνονται $B\Gamma=10 \text{ cm}$ και $\eta\mu\hat{B}=0,8$. Να βρεθούν :

Α. Το μήκος της πλευράς ΑΓ.

Μονάδες 8

Β. Το μήκος της πλευράς ΑΒ.

Μονάδες 8

Γ. Τα $\sin\hat{B}$, $\varepsilon\varphi\hat{B}$

Μονάδες 9

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Β' ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό

Μονάδες 2

A2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

Εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο λέγεται η γωνία που η κορυφή της είναιτου κύκλου και οι πλευρές της τον κύκλο.

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το της επίκεντρης που έχει το Αντίστοιχο τόξο.

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Το ισοσκελές τρίγωνο είναι κανονικό

β) Η κεντρική γωνία ω κανονικού n -γώνου ισούται με $\frac{360}{n}$

γ) Το τετράγωνο είναι κανονικό πολύγωνο

δ) Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει γωνία $\hat{\varphi}=120^{\circ}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

B1. Ποια ποσά λέγονται ανάλογα.

Μονάδες 2

B2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

Η γραφική παράσταση της $y=ax$ διέρχεται από Των αξόνων.

Η συνάρτηση $y=ax+\beta$, $\beta \neq 0$ έχει γραφική παράσταση μια που διέρχεται από τοσημείοκαι είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση

Μονάδες 4

B3. Να χαρακτηρίσετε **Σωστό(Σ)** ή **Λάθος(Λ)** τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η κλίση της ευθείας $\epsilon_1: y = -x + 3$ είναι -1.

β) Η ευθεία $\epsilon_1: y = 2x - 5$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο 2.

γ) Οι ευθείες $\epsilon_1: y = 2x - 5$ και $\epsilon_2: y = 2x$ είναι παράλληλες.

δ) Η ευθεία $\epsilon_1: y = x$ δεν διέρχεται από τη αρχή των αξόνων

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$4 - 5(x-2) \geq 13 - 3(x+1) \text{ και } \frac{x-1}{2} > 1 + x$$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ Δ

Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει βάση ΒΓ=8cm και περίμετρο 18cm. Να βρεθούν:

Δ1. το ύψος του

Μονάδες 8

Δ2. το εμβαδό του

Μονάδες 8

Δ3. οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\widehat{B}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Ε

Δίνεται η ευθεία $y=2x-6$

Ε1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της

x	0	1		
y			0	-2

Μονάδες 12

Ε2. Να τη σχεδιάσετε σε ένα σύστημα αξόνων.

Μονάδες 13

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Β' ΤΑΞΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑΑ

A1. να σημειώσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις:

Η επιμεριστική ιδιότητα είναι $a(b+c)=ab+ac$		
Στη διαδικασία λύσης μιας εξίσωσης ,πρώτα χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους		
Αν $a < b$ τότε $ac < bc$, $c < 0$		
Αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο θετικό αριθμό ,η φορά της ανίσωσης δεν αλλάζει		
Αν $a = b$ τότε $a + c = b + c$		
Το εμβαδόν του ορθογωνίου παρ/μου είναι $E = \frac{ab}{2}$		
Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $E = \frac{1}{2}(B + b)h$		
Το αντίστροφο του πυθαγόρειου θεωρήματος μας βοηθάει να εξετάσουμε αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή όχι.		
Το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρά $a=7cm$ είναι $49m^2$		
Ένα στρέμμα είναι ίσο με 100.000 τετραγωνικές παλάμες		

Μονάδες 30

A2. Επιλέξτε τη σωστή απάντηση :

α) η αλγεβρική παράσταση $3x(2x - \frac{2}{3})$ μετά τις πράξεις γίνεται :

$5x-6x$	$6x^2-6x$	$6x^2-2x$	$5x-5$
---------	-----------	-----------	--------

β) η εξίσωση $0x=0$

είναι ταυτότητα	είναι αδύνατη	Έχει μοναδική λύση $x=0$	Είναι λάθος
-----------------	---------------	--------------------------	-------------

γ) η εξίσωση $3x=0$

είναι ταυτότητα	είναι αδύνατη	Έχει μοναδική λύση $x=0$	Είναι λάθος
-----------------	---------------	--------------------------	-------------

δ) αν α, β, γ πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την πλευρά α τότε ισχύει

$\alpha = \beta + \gamma$	$\beta^2 - \gamma^2 = \alpha^2$	$\beta^2 + \alpha^2 = \gamma^2$	$\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$
---------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

ε) τα 325mm^2 είναι ίσα με

325000 cm^2	$0,325\text{ dm}^2$	$0,000325\text{m}^2$	$0,0325\text{ m}^2$
----------------------	---------------------	----------------------	---------------------

στ) το εμβαδόν ενός ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα $\alpha = 5$ και κάθετη πλευρά $\beta = 4$ είναι :

6 τ.μ.	10 τ.μ.	20 τ.μ.	12 τ.μ.
--------	---------	---------	---------

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ Β

Να λυθούν οι εξισώσεις-ανισώσεις :

B1. $x - 2(x - 1) + 3 \leq 5 - (2x + 5)$

Μονάδες 12

B2. $\frac{x-2}{3} + \frac{2x-1}{2} - 1 = \frac{1}{4}x - \frac{x-2}{12}$

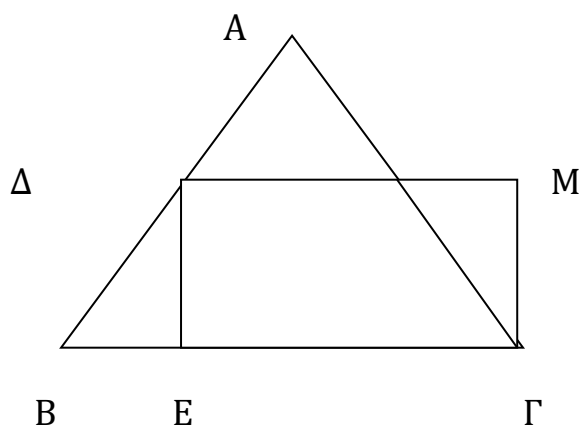
Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές $\alpha=6\text{cm}$, $\beta=8\text{cm}$, $\gamma=10\text{cm}$ είναι ορθογώνιο Στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του σε mm^2 .

Μονάδες 14

Γ2. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο με πλευρά 20cm . Τα σημεία Δ και Z είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν $\Delta E = 5\sqrt{3}\text{cm}$ να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων ΔEB , $\Delta M\Gamma E$ και $\Delta Z\Gamma E$.



Μονάδες 13

προτεινόμενα διαγωνίσματα

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε το πυθαγόρειο θεώρημα σχεδιάζοντας ένα σχετικό σχήμα.

B. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με τις κατάλληλες λέξεις, ώστε να προκύψει αληθής πρόταση:

Αν το της πλευράς ενός τριγώνου είναι ίσο με το.....των

των δύο άλλων πλευρών του τριγώνου, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμόζεται σε όλα τα τρίγωνα.

β. Αν για τις πλευρές a , b , g ενός τριγώνου $ABΓ$ ισχύει $g^2 = a^2 + b^2$, τότε το τρίγωνο $ABΓ$ έχει $\hat{A} = 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να διατυπώσετε τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού a .

B. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψει αληθής πρόταση:

Αν $\sqrt{x} = a$, τότε πρέπει ο a να είναιαριθμός, ο x να είναι..... αριθμός και να ισχύει $a^2 = \dots$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $\sqrt{a} = b$, με $a, b > 0$, τότε $a^2 = b$

β. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, ($a, b > 0$)

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. α. Να λύσετε την ανίσωση:

$$-2(y - 3) + y^3 \geq 3y + 1$$

β. Ποιός είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος αριθμός y που επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση;

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x+1}{5} - \frac{x-2}{3} = \frac{x}{5} + \frac{11}{15}$$

ΘΕΜΑ 2°

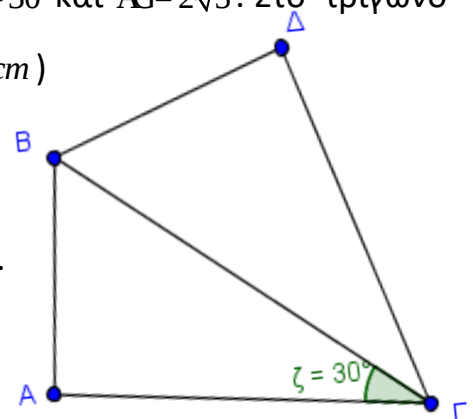
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ έχει $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{AGB} = 30^\circ$ και $AG = 2\sqrt{3}$. Στο τρίγωνο BΔΓ είναι $BD = \sqrt{5}$ και $DG = 11$ (όλα με μονάδα μέτρησης cm)

A. Να αποδείξετε ότι $AB = 2$ και $BG = 4$

B. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BΔΓ είναι ορθογώνιο.

Ποιά είναι η ορθή γωνία του;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ καθώς και

το ύψος AE του τριγώνου $AB\Gamma$.

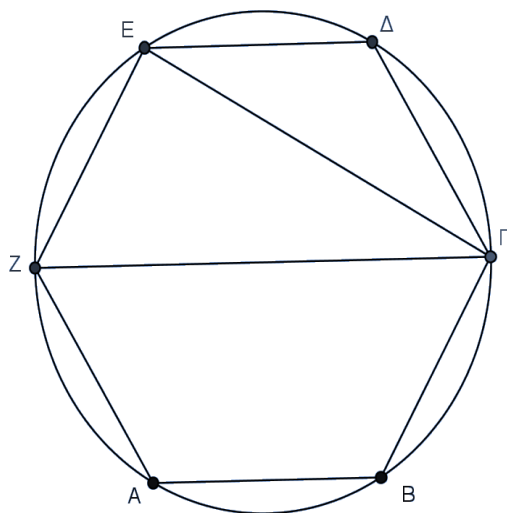
ΘΕΜΑ 3^ο

Στο επόμενο σχήμα ο κύκλος έχει μήκος $L = 12\pi \text{ cm}$ και το $AB\Gamma\Delta EZ$ είναι κανονικό εξάγωνο.

A. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κύκλου είναι $r = 6 \text{ cm}$.

B. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ZE\Gamma$ είναι ορθογώνιο καθώς και ότι $\widehat{EZG} = 60^\circ$.

Γ. Να υπολογίσετε τις πλευρές και εμβαδόν του τριγώνου $ZE\Gamma$.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $y = \sqrt{x}$, τότε ο x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

β. Ισχύει η σχέση $\sqrt{0,4} = 0,2$

γ. Ισχύει η σχέση $\sqrt{a^2} = |a|$, για κάθε πραγματικό αριθμό a

δ. Ισχύει η σχέση $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για $a, b > 0$

Γ. Στις επόμενες προτάσεις (1-2) να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό της πρότασης και

δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Αν $\sqrt{x-5} = 0$, τότε ο αριθμός x είναι:

α. 1 **β.** 0 **γ.** 5 **δ.** 10

2. Αν $x^2 = a$ τότε:

α. πάντα $\sqrt{a} = x$ **β.** $\sqrt{a} = x$ όταν $x, a > 0$ **γ.** $\sqrt{x} = a$ όταν $x, a > 0$ **δ.** Τίποτα

από τα προηγούμενα.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Πότε ένα πολύγωνο ονομάζεται κανονικό;

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν σ' ένα κύκλο μία επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε τα αντίστοιχα τόξα είναι ίσα.

β. Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πενταγώνου είναι 72° .

γ. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου, τότε το μήκος του κύκλου εννιπλασιάζεται.

δ. Η επίκεντρη γωνία είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης εγγεγραμμένης που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Γ. Στις επόμενες προτάσεις (1-2) να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό της πρότασης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1. Σε ένα κανονικό εξάγωνο οι γωνίες τους είναι ίσες:

α. 30° **β.** 120° **γ.** 60° **δ.** 100°

2. Μια εγγεγραμμένη γωνία $\hat{AOB}$ βαίνει σε ένα τόξο AB μ° μοιρών. Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο ίδιο τόξο είναι ίση με

α. μ° **β.** $\frac{\mu^{\circ}}{2}$ **γ.** $2\mu^{\circ}$ **δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3-x}{5} + \frac{x-2}{2} = \frac{2x-3}{10}$$

B. Να λύσετε την ανίσωση:

$$3(x-1) > x-2$$

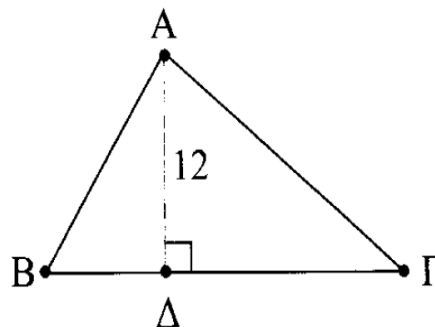
και να παραστήσετε τις λύσεις της στην ευθεία των πραγματικών αριθμών .

ΘΕΜΑ 2°

Στο επόμενο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται ΑΒ=10cm, ΑΓ=17cm και ΔΓ=15cm. Να υπολογίσετ

A. Το ύψος ΑΔ και την πλευρά ΒΔ.

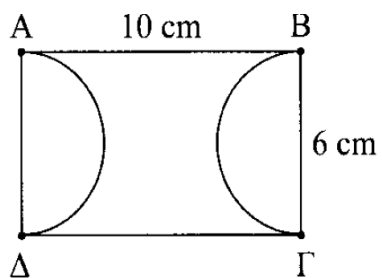
B. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.



Γ. Το ημΒ και το συνΓ

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο επόμενο σχήμα οι πλευρές ΒΓ και ΑΔ είναι διάμετροι ημικυκλίων. Να υπολογίσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμου σχήματος ΑΒΓΔ.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να διατυπώσετε το πυθαγόρειο θεώρημα και να σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα γράφοντας την αντίστοιχη σχέση.
- B.** Ποιόν τύπο για το εμβαδό τριγώνου γνωρίζετε; Να σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα και να γράψετε την αντίστοιχη σχέση.

ΘΕΜΑ 2^ο

- A.** Πότε δυο ποσά X και Y ονομάζονται ανάλογα; Να γράψετε την αντίστοιχη σχέση. Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής τι μορφή έχει;
- B.** Πότε δυο ποσά X και Y ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα; Να γράψετε την αντίστοιχη σχέση. Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής τι μορφή έχει;

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις:

$$-2X(x+1)+7x-3=3X(x-2)-9 \text{ και } \frac{x-1}{2}+\frac{2-3Xx}{6}=-\frac{1}{12}$$

- B.** Να λύσετε την επόμενη ανίσωση:

$$-3-4X(x-2)-10Xx>2X(1-x)+7$$

Ποια από τις λύσεις των εξισώσεων του ερωτήματος (A) αποτελεί και λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (B); Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $y=2Xx+b$, $b \in \mathbb{R}$

- A.** Εάν η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό b .

B. Για $b = 1$

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

β. Να βρείτε ευθεία η οποία να είναι παράλληλη στην (ε) και να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Το σημείο $B(2, 6)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 3^ο

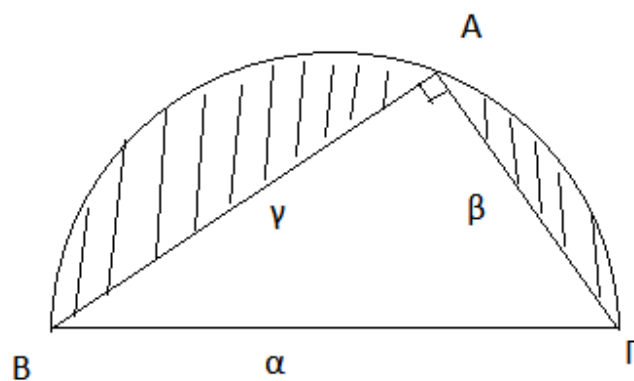
Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ του επόμενου σχήματος. Αν $a = 10$ και $b = 6$, να υπολογίσετε:

A. Την πλευρά γ .

B. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

Γ. Το εμβαδόν του ημικυκλίου.

Δ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος που φαίνεται στο σχήμα.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Τι ονομάζεται εφαπτομένη μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου;

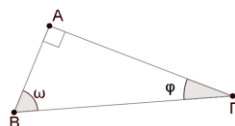
B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Στο επόμενο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) ισχύουν:

A. $hmj = \frac{AB}{AG}$

B. $hnf = sunw$

Γ. $hmw = \frac{AG}{BG}$



Γ. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με κατάλληλες λέξεις ή σχέσεις, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται συνημίτονο της γωνίας ω .

β. Οι τιμές του συνημιτόνου μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι πάντα μικρότερες από και μεγαλύτερες από

ΘΕΜΑ 2°

A. Τι γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$; Διέρχεται από την αρχή των αξόνων; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Κλίση της ευθείας $y = ax$ λέγεται ο λόγος $\frac{x}{y} = a$ για $y \neq 0$.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 3x + 5$ προκύπτει από τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $y = 3x$, αν τη μετατοπίσουμε παράλληλα στον άξονα $y'y$ κατά 5 μονάδες προς τα πάνω.

Γ. Στον επόμενο πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α) Η ευθεία $y = -3x + 2$	1) είναι ο άξονας $x'x$
β) Η ευθεία $y = 2x - 1$	2) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 2$
γ) Η ευθεία $y = 0$	3) έχει κλίση 2
	4) διέρχεται από το σημείο (0, 2)

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x+1}{2} - x = \frac{6x-4}{7}$$

B. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{4x+2}{5} \geq \frac{5x-4}{3}$$

Γ. Αν $a=3$ η λύση της εξίσωσης του (A) ερωτήματος, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$P = \sqrt{5 - \sqrt{25 - a^2}}$$

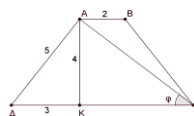
και να εξετάσετε αν αυτή είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (B).

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό τραπέζιο ABΓΔ (AB//ΓΔ) δίνονται:

AB=2cm, AD=5cm, ΔΚ=3cm, AK=4cm

και γωνία $\hat{A} = \hat{K}$ με $\cos \hat{A} = 0,8$.



A. Να δείξετε ότι το AK είναι το ύψος του τραπέζιου ABΓΔ.

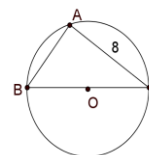
B. Να βρείτε το μήκος του τμήματος ΚΓ καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΚΓ.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο διπλανό σχήμα η πλευρά $ΑΓ=8\text{cm}$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 24cm^2 .

Α. Να υπολογίσετε την εγγεγραμμένη γωνία $\hat{BAG}$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Β. Να υπολογίσετε την πλευρά ΑΒ.

Γ. Να υπολογίσετε την ακτίνα $\rho=BO=GO$ του κύκλου.

Δ. Να βρείτε το μήκος (L) του κύκλου (O, ρ) καθώς και το εμβαδόν (E) του κυκλικού δίσκου

(O, ρ).

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Πότε δύο ποσά x, y ονομάζονται ανάλογα; Να δώσετε ένα παράδειγμα αναλόγων ποσών από την καθημερινή ζωή.

B. Πότε δύο ποσά x, y ονομάζονται ανάλογα; Να δώσετε ένα παράδειγμα αναλόγων ποσών από την καθημερινή ζωή.

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό σχήμα:

A. Στο διπλανό σχήμα να χαρακτηρίσετε τις γωνίες δ και

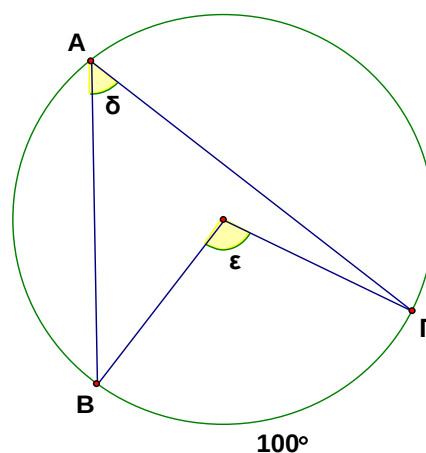
ϵ . Αν το τόξο $\widehat{BG} = 100^\circ$, να βρείτε τις γωνίες δ

και ϵ .

B. Πότε ένα πολύγωνο ονομάζεται κανονικό;

Γ. Να γράψετε τη σχέση των γωνιών και των

κεντρικών γωνιών ενός κανονικού n -γώνου



Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται η επόμενη ανίσωση (1) και η εξίσωση (2):

$$x+2-3(x-2)^3 \geq 2+x \quad (1), \quad \frac{x+2}{3} + \frac{2x+1}{2} = \frac{2x+1}{6} \quad (2)$$

A. Να λύσετε την ανίσωση (1) .

B. Να λύσετε την εξίσωση (2) .

Γ. Να εξετάσετε εάν η λύση της εξίσωσης ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης.

ΘΕΜΑ 2^ο

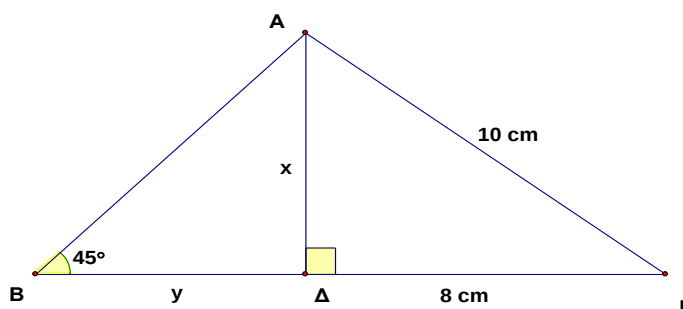
Στο παραπάνω τρίγωνο ABΓ

δίνεται ΑΓ = 10cm,

ΔΓ = 8 cm και B = 45° .

A. Να υπολογίσετε το ύψος

AD = x του τριγώνου.



B. Να υπολογίσετε το μήκος BD = y στο τρίγωνο.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

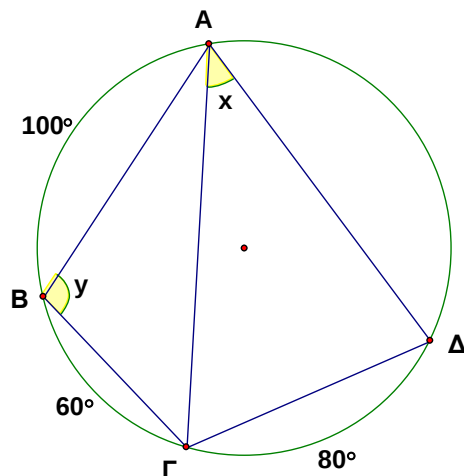
Δίνονται : $\eta\mu 45^\circ = 0,7$, $\sigma\upsilon\nu 45^\circ = 0,7$, $\epsilon\phi 45^\circ = 1$.

ΘΕΜΑ 3°

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος (O, ρ) με τα τόξα $AB = 100^\circ$, $B\Gamma = 60^\circ$ και $\Gamma\Delta = 80^\circ$

A. Να βρείτε το μέτρο του τόξου $A\Delta$ και να υπολογίσετε τις γωνίες x , y .

B. Αν $\rho = 5 \text{ cm}$ είναι η ακτίνα του κύκλου, να υπολογίσετε το μήκος L του κύκλου (O, ρ) και το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Πως ορίζεται η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ;
- Β. Να εξηγήσετε γιατί δεν ορίζεται η τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού.
- Γ. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, με τους κατάλληλους αριθμούς, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

$$\sqrt{0} = \dots$$

$$(\sqrt{7})^2 = \dots$$

$$\sqrt{(-5)^2} = \dots$$

ΘΕΜΑ 2^ο

- Α. Να διατυπώστε το αντίστροφο του πυθαγόρειου θεωρήματος.
- Β. Να εξετάστε αν το τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=8$, $\beta=13$, $\gamma=9$ είναι ορθογώνιο.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- Α. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+1}{5} - x = \frac{4-3x}{2}$$

- Β. Να εξετάστε αν η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι και λύση της ανίσωσης:

$$2(x+1) - 4x > -1.$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα 10 cm . Το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διάμετρος του κύκλου και παίρνουμε τόξο $AG = 60^\circ$.

A. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABG .

B. Να υπολογίσετε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου.

Γ. Να υπολογίσετε τα μήκη των AB και AG .

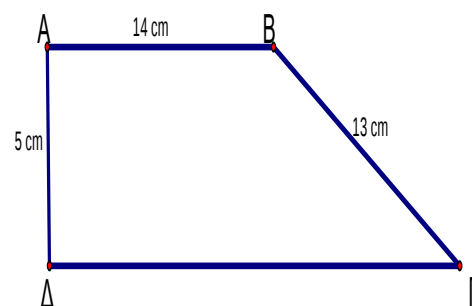
ΘΕΜΑ 3ο

Στο τραπέζιο που δίνεται στο επόμενο σχήμα οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{D}$ είναι ορθές και επίσης $AB=14$, $BG=13$, $AD=5$. Να υπολογίσετε:

A. Το μήκος της $\Delta\Gamma$

B. Το εμβαδό του τραπεζίου

Γ. Η πλευρά ενός τετραγώνου που έχει ίδιο εμβαδό με το τραπέζιο.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $3x + x = x$ είναι ταυτότητα.

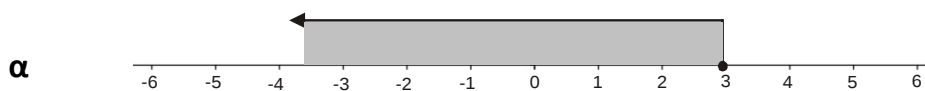
β. Αν μια εξίσωση είναι ταυτότητα, τότε κάθε αριθμός είναι λύση της.

γ. Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ είναι αδύνατη .

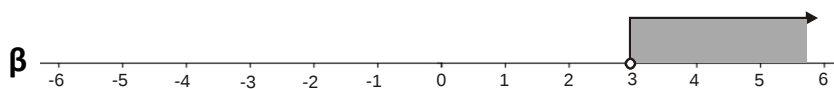
δ. Αν μια εξίσωση δεν είναι αδύνατη, θα είναι ταυτότητα.

ε. Η εξίσωση $8 \cdot x = 0$ είναι αδύνατη.

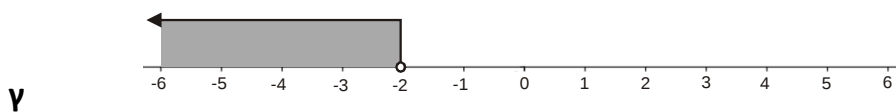
B. Να αντιστοιχίσετε τον αριθμό σε κάθε μία από τις επόμενες ανισωτικές σχέσεις (1-5) με το αντίστοιχο γράμμα της παράστασής της στον άξονα των πραγματικών αριθμών (α-ε), ώστε να προκύψει αληθής αντιστοιχία.



1. $x > 3$



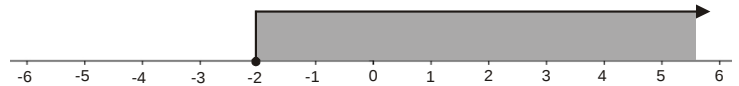
2. $x \geq -2$



3. $0 \cdot x \geq -2$

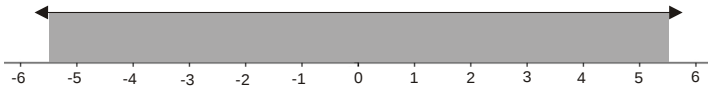
4. $3 \geq x$

δ



5. $x < -2$

ε



ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να διατυπώσετε το πυθαγόρειο θεώρημα. Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε ένα

ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και να γράψετε τον αντίστοιχο τύπο.

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

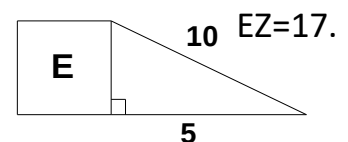
α. Το πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμόζεται μόνο στα ορθογώνια τρίγωνα.

β. Το τρίγωνο $H\Theta M$ με πλευρές $H\Theta = \sqrt{5}$, $HM = \sqrt{8}$ και $\Theta M = \sqrt{3}$ είναι ορθογώνιο.

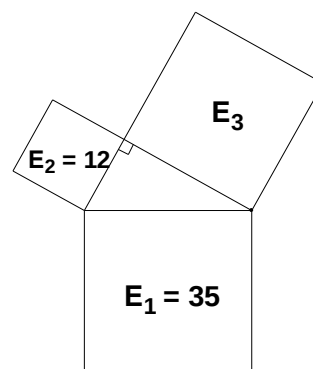
γ. Το ορθογώνιο τρίγωνο ΔEZ με κάθετες πλευρές $\Delta E = 8$ και $\Delta Z = 15$ έχει

υποτείνουσα

δ. Το τετράγωνο του διπλανού σχήματος έχει εμβαδόν $E = 50$



ε. Στο διπλανό σχήμα, το εμβαδόν $E_3 = 23$



Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$\alpha = \sqrt{(-6)^2} + \sqrt{(3-5)^2} - \sqrt{5^2} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{21 + \sqrt{14 + \sqrt{4}}}$$

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 5$

B. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y = ax + \beta$, όπου a, β είναι οι αριθμοί που βρήκατε από το ερώτημα (A).

α. Ποια είναι η κλίση της ευθείας αυτής ;

β. Σε ποιο σημείο η παραπάνω ευθεία τέμνει τον άξονα $y'y$;

γ. Να εξετάσετε αν το σημείο $A(-2, 1)$ ανήκει στην ευθεία ε

δ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία ε και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η εξίσωση:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{x+2}{3} = \frac{x+3}{2} \quad (1)$$

A. Να λύσετε την εξίσωση (1) και να αποδείξετε ότι $x = 4$.

B. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει υποτείνουσα $B\Gamma = 3x - 2$, όπου x είναι η λύση της παραπάνω εξίσωσης. Δίνεται επίσης ότι $\eta\mu B = \frac{4}{5}$.

Να υπολογίσετε :

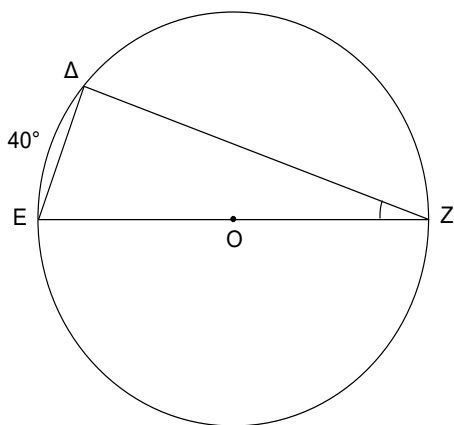
α. Την υποτείνουσα ΒΓ και την πλευρά ΑΓ.

β. Την πλευρά ΑΒ.

γ. Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ.

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, ρ) με εμβαδόν 314 cm^2 και ΕΖ μια διάμετρος αυτού. Δίνεται επίσης ότι το τόξο $\widehat{DE} = 40^\circ$.



α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου.

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία ίση σε μοίρες με τη γωνία Ζ του τριγώνου.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

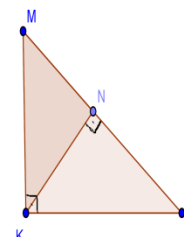
Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε το πυθαγόρειο θεώρημα.

B. Το διπλανό τρίγωνο ΚΛΜ είναι ορθογώνιο με γωνία $K=90^0$ και

ΚΝ το ύψος του. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες, ώστε να είναι αληθείς:



α. $ML^2 = \dots + \dots$ β. $MK^2 = \dots - \dots$ γ. $NL^2 = \dots - \dots$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Πότε δύο ποσά ονομάζονται ανάλογα;

B. Να αναφέρετε τα κύρια χαρακτηριστικά για την γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

$$y = ax \text{ και } y = ax + b \text{ (} b \neq 0 \text{)}$$

Γ. Τι σχέση έχουν οι γραφικές παραστάσεις των δύο παραπάνω συναρτήσεων ;

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

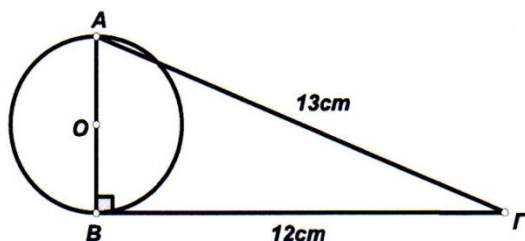
ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να λύσετε τις επόμενες εξισώσεις (1) και (2):

$$3(x+1) + 6x = 2(2x+3) + 12 \text{ (1) και } 6 - (2x+1) = 5 - 2x \text{ (2)}$$

B. Να εξετάσετε αν οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν κοινή λύση .

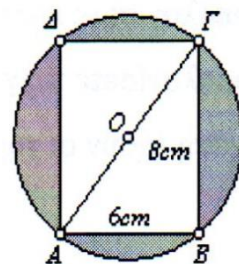
ΘΕΜΑ 2°



- A.** Στο παραπάνω σχήμα να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$.
- B.** Να βρείτε το μήκος του κύκλου και το εμβαδό του κυκλικού δίσκου που έχει διάμετρο AB .
- Γ.** Να βρείτε το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Δίνονται ότι το μήκος $B\Gamma=12$ cm και $A\Gamma=13$ cm.

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παραπάνω σχήμα το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει διαστάσεις $AB=6$ cm, $B\Gamma=8$ cm και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ .



- A.** Να υπολογίσετε την διάμετρό του AG .
- B.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του κυκλικού δίσκου.
- Γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο :

- A.** Ποια γωνία ονομάζεται εγγεγραμμένη σε κύκλο;
- B.** Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με κατάλληλες λέξεις, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- α.** Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι γωνία
- β.** Δυο εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι μεταξύ τους
- γ.** Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το της επίκεντρης γωνίας που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο.
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- Μια εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{AOB}$ βαίνει σε ένα τόξο AB μ^ο μοιρών.
- α.** Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με μ^ο.
- β.** Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με $\frac{\mu^{\circ}}{2}$.
- γ.** Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με 2μ^ο.

ΘΕΜΑ 2^ο :

- A.** Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ο $\sqrt{1}$ είναι άρρητος αριθμός .

β. Η τετραγωνική ρίζα του 0 δεν ορίζεται .

γ. $\sqrt{a^4} = a^2$ για κάθε πραγματικό αριθμό a .

δ. Ο $\sqrt{5}$ είναι άρρητος αριθμός.

ε. $\sqrt{a^2} = a$ για κάθε πραγματικό αριθμό a .

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων

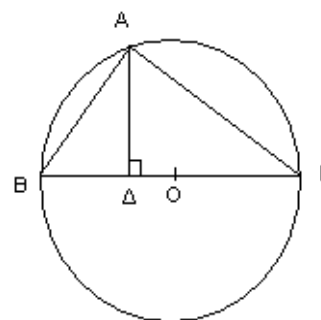
$$x - (4 - 3x) + 2 - (x - 1) \leq 2(x + 1) \quad \text{και} \quad \frac{2x - 4}{6} - \frac{3x - 1}{3} \leq \frac{4x - 1}{3}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Ένας πατέρας είναι σήμερα 43 ετών και ο γιος του 7 ετών. Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια ο πατέρας θα έχει τριπλάσια ηλικία από το γιο του.

ΘΕΜΑ 3^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $AB=1\text{cm}$, $AG=\sqrt{3}\text{cm}$, η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου και η $A\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$.



α. Να εξηγήσετε γιατί η γωνία $\widehat{BAG}$ είναι ορθή.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

γ. Να υπολογίσετε τη διάμετρο του κύκλου.

δ. Να υπολογίσετε το ύψος AD .

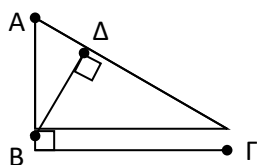
ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε το πυθαγόρειο θεώρημα.

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη (με βάση το επόμενο σχήμα).



α. $(AB)^2 = (AΓ)^2 + (BΓ)^2$

β. $(AB)^2 = (AΓ)^2 - (AΔ)^2$

γ. $(AB)^2 = (AΔ)^2 + (BΔ)^2$

δ. $(BΔ)^2 = (BΓ)^2 - (ΓΔ)^2$

ΘΕΜΑ 2

A. Πως ορίζεται η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $\sqrt{0} = 0$

β. $\sqrt{a^2} = a$, για κάθε πραγματικό αριθμό a .

γ. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ($a, b > 0$)

δ. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)

Β. Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

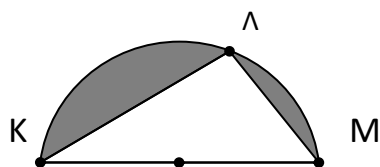
ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

$$-5(4-3x) - x < -3(-1-x) + 13x - 5 \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{-3+5x}{6} - 1 \leq -\frac{1-2x}{4} + \frac{x}{8} \quad (2)$$

B. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2)

ΘΕΜΑ 2^ο



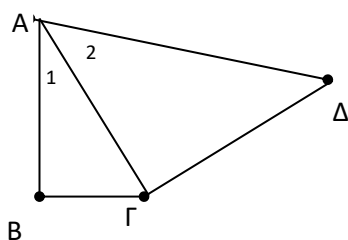
Στο διπλανό ημικύκλιο ακτίνας $(OK) = 10 \text{ cm}$.

Επίσης δίνεται ότι $(ML) = 12 \text{ cm}$

A. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς KL .

B. Να υπολογίσετε το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν.

ΘΕΜΑ 3^ο



Αν στο διπλανό σχήμα, $\hat{A}_1 = 30^\circ$, $(BG) = 8 \text{ cm}$ και $(\Gamma\Delta) = 16 \text{ cm}$.

A. Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AG

B. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}_2$

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 11

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να διατυπώσετε το πυθαγόρειο θεώρημα, να σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα και να γράψετε την αντίστοιχη σχέση.

B. Ποιες από τις παρακάτω τριάδες αριθμών είναι δυνατόν να αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου.

α. 3, 4, 6

β. 6, 10, 8

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν $-5\beta > 15$, τότε $\beta > -3$

β. Το γινόμενο δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

γ. Η λύση της εξίσωσης $2x = 2 - 2$ είναι $x = 1$.

δ. Ισχύει $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ

B. Πότε μία εξίσωση 1ου βαθμού έχει άπειρες λύσεις και πότε είναι αδύνατη;

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. Δίνεται η παράσταση:

$$K = 3x(2x) - 2(x+3) + 1$$

α. Να αποδείξετε ότι $K = 4x - 5$

β. Να βρείτε την τιμή της K για $x = 1$

B. α. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-10}{2} - \frac{x}{3} = 0$$

β. Να επαληθεύσετε τη λύση της εξίσωσης που βρήκατε στο ερώτημα (Βα).

ΘΕΜΑ 2°

A. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισοτήτων:

$$3(x+1) + 2x > 10 + (5-x) \text{ και } \frac{x+8}{3} - x > 0$$

B. Να κάνετε και παράσταση της λύσης στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) με $A\Gamma=12\text{cm}$ και $B\Gamma=13\text{cm}$.

Να υπολογίσετε :

A. Την πλευρά AB .

B. Το εμβαδόν του τριγώνου .

Γ. Το $\eta\mu B$.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a και πως συμβολίζεται;

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $\sqrt{a^2} = a$

β. Ο αριθμός $\sqrt{5}$ είναι άρρητος.

γ. $(\sqrt{25})^2 = 5$

δ. $\sqrt{\frac{49}{36}} = \frac{6}{7}$

ε. $\sqrt{25+9} = 5+3$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Πως ορίζεται το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω ενός

ορθογωνίου τριγώνου;

B. Να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα:

	30°	45°	60°
ημίτονο			
συνημίτονο			
εφαπτομένη			

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις:

$$4(3x - 1) - (5 - 2x)^3 - 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{3(x+2)}{5} - x^3 - \frac{2x+9}{10} + \frac{x}{2} \quad (2)$$

Β. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των παραπάνω ανισώσεων (1) και (2).

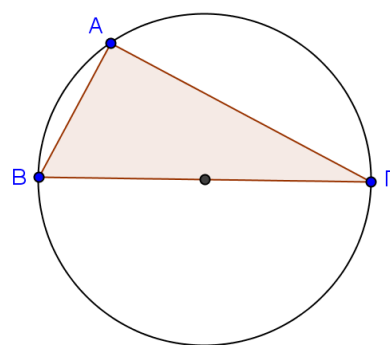
Γ. Αν α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ είναι οι τρεις ακέραιες λύσεις, να υπολογίσετε την τιμή της παρακάτω παράστασης:

$$A = 2(a - b) - 3(g - a) - (-b - 8g)$$

αφού πρώτα την απλοποιήσετε.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το διπλανό σχήμα με διάμετρο την AB και την Χορδή AB.



Α. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας Α

Β. Να βρεθεί το μήκος της πλευράς AB,

όπου $AB = \sqrt{140 + \sqrt{13 + \sqrt{11 - \sqrt{4}}}}$ cm

Γ. Αν $AB = 12$ cm και $ΑΓ = 16$ cm, να βρεθεί το μήκος της ΒΓ.

Δ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

Ε. Να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

ΣΤ. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας Β.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η ευθεία (ε) : $y = \frac{2}{3}x + 4$, η οποία διέρχεται από το σημείο (-3,4)

Α. Να δείξετε ότι $\lambda = 2$

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής Α, Β της ευθείας (ε) : $y = \frac{4}{3}x + 8$ με τον άξονα x και y αντίστοιχα.

Γ. Αν $A(-6, 0)$ και $B(0,8)$, να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

Ε. Να βρείτε το ύψος ΟΚ του τριγώνου ΟΑΒ το οποίο αντιστοιχεί στην πλευρά ΑΒ.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;

B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις :

α. $(\sqrt{a})^2 = \dots\dots\dots$

β. $\sqrt{0} = \dots\dots\dots$

γ. $\sqrt{a^2} = \dots\dots\dots$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Ισχύει $\sqrt{0,49} = 0,7$.

β. Αν $\sqrt{x} = 5$, τότε $x = 25$.

γ. Η εξίσωση $x^2 = 9$ έχει μοναδική λύση την $x = 3$.

δ. Ισχύει $\sqrt{(-7)^2} = -7$.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να διατυπώσετε το πυθαγόρειο θεώρημα , να σχεδιάσετε ένα σχετικό σχήμα και να γράψετε την αντίστοιχη σχέση.

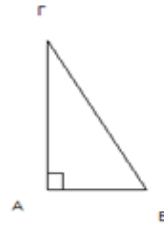
Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $AB^2 = BG^2 + AG^2$

β. $BG^2 = AG^2 + AB^2$

γ. $AB^2 = AG^2 - BG^2$

δ. $AB^2 = BG^2 - AG^2$.



Γ. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με τις κατάλληλες λέξεις, ώστε να προκύψει αληθής πρόταση:

Αν σ' ένα τρίγωνο το τετράγωνο της

.....

πλευράς ισούται με τοτων

δύοπλευρών, τότε η γωνία που

βρίσκεται..... από την.....πλευρά είναι

.....

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

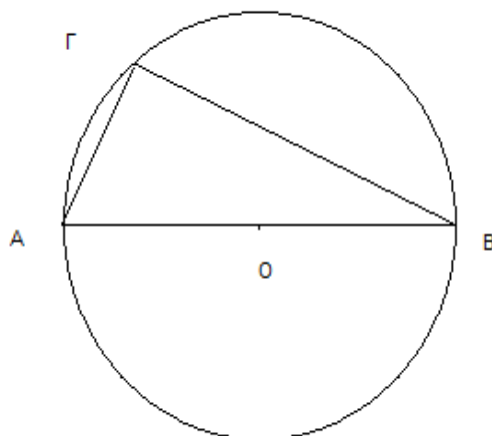
ΘΕΜΑ 1^ο

Στο παρακάτω σχήμα είναι $AG=4$ και $\widehat{AG}=60^\circ$ και η AB είναι διάμετρος του κύκλου .

Α. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{G}$ και $\hat{B}$ του τριγώνου ABΓ.

Β. Να υπολογίσετε τις πλευρές AB και BG του τριγώνου ABΓ.

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.



Δίνονται : $\eta\mu 30^\circ = 1/2$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\epsilon\phi 30^\circ = \sqrt{3}/3$.

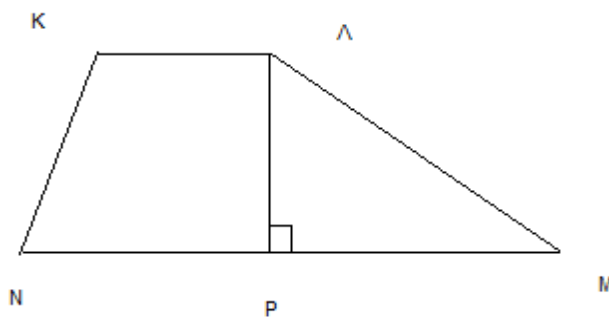
ΘΕΜΑ 2°

A. Να λύσετε την εξίσωση :

$$x - \frac{5x - 8}{4} = 3 - \frac{x}{2}$$

B. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ με πλευρές $AB=x+2$, $B\Gamma=3x-2$ και $A\Gamma=2x$ είναι ορθογώνιο, αφού αντικαταστήσετε το x με τη λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Γ. Στο επόμενο τραπέζιο KΛMN (KΛ//NM), να βρείτε το ύψος ΛΡ όπου $K\Lambda=6$, $NM=10$ και το εμβαδόν του ισούται με το διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ABΓ του προηγούμενου ερωτήματος.



ΘΕΜΑ 3°

A. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων :

$$2(4-x) - (x-7)^3 \geq 11-x \quad \text{και} \quad \frac{2x-19}{5} < x-2$$

B. Δίνεται η συνάρτηση $y = -x + b$, b πραγματικό αριθμό. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(x, -1)$, όπου x η μεγαλύτερη από τις παραπάνω λύσεις, να δείξετε ότι $b = 1$ και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 14

A. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ;
- B.** Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι;

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{25}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

- A.** Ποια γωνία ονομάζεται εγγεγραμμένη;
- B.** Ποια είναι η σχέση μεταξύ μιας εγγεγραμμένης γωνίας και του αντίστοιχου τόξου που βαίνει; Τι ισχύει για τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα;

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ όπου ΒΓ = 15cm, ΑΓ = 12cm και ΑΒ = 9cm.

A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.

B. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

ΘΕΜΑ 2°

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$2(x+3)=13 \text{ και } x - \frac{3(x+1)}{4} = \frac{2x-1}{3}$$

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι αριθμοί:

$$9, 11, 13, 9, 15, 18, 16, 20, 17.$$

A. Να βρείτε την μέση τιμή (Μ.Τ.) των παραπάνω αριθμών.

B. Να βρείτε τη διάμεσο των παραπάνω αριθμών.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Στην ευθεία $y = ax$ ο λόγος $\frac{y}{x} = a$, για $x \neq 0$ λέγεται κλίση της ευθείας $y = ax$.

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι μία ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή $O(0,0)$ του συστήματος συντεταγμένων.

γ. Η ευθεία $y = x$ έχει κλίση τον αριθμό 1.

B. Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει τις τρεις παράλληλες ευθείες

της στήλης Α του επόμενου πίνακα. Να βρείτε ποια από τις

ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 μπορεί να έχει εξίσωση $\psi=2x$.

Με δεδομένο την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα,
να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία της στήλης Α με την εξίσωσή
της στη στήλη Β με βάση το διπλανό σχήμα.

Στήλη Α	Στήλη Β
ε_1	$y = 2x$
ε_2	$y = 2x - 4$
ε_3	$y = 2x + 4$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Β. Ποια είναι η σχέση που συνδέει την γωνία ϕ ενός κανονικού n -γώνου με την κεντρική γωνία ω του n -γώνου;

Γ. Να συμπληρώσετε, στην κόλλα σας, τα επόμενα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν, ώστε αυτές να είναι αληθείς, με βάση το επόμενο σχήμα:

α. Η γωνία $\hat{A}$ λέγεται και το μέτρο της είναι

γιατί βαίνει σε

β. Το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$ είναι

β. Η επίκεντρη γωνία $\hat{BOC}$ είναι διπλάσια από την γωνία γιατί έχουν το αντίστοιχο τόξο.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{3x}{4} - \frac{2x-5}{3} \leq x - \frac{1}{6}$$

και να παραστήσετε τις λύσεις της στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

B. Να υπολογίσετε τους αριθμούς :

$$\sqrt{10+26}, \quad \sqrt{\frac{9}{4}}, \quad \sqrt{(-5)^2}, \quad (\sqrt{2})^2, \quad -(\sqrt{3})^2$$

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα δίνονται ότι:

Το τμήμα $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου (O, OB) ,

$AB=2\text{cm}$, $\hat{A}GB=30^\circ$ και τόξο $\widehat{AD}=60^\circ$.

A. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}AG=90^\circ$ και $\hat{\phi}=30^\circ$.

B. Να υπολογίσετε τα τμήματα ΒΓ, ΑΓ και ΑΕ.

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος L του κύκλου (O, OB) και το εμβαδόν E του κυκλικού δίσκου (O, OB) .

ΘΕΜΑ 3°

A. Να υπολογίσετε την πλευρά AD και το εμβαδόν E_β το

ορθογωνίου $AB\Gamma$ του $1^{\text{ου}}$ σχήματος, όταν δίνονται:

$AB=4\text{cm}$ και $BD=5\text{cm}$.

B. Αν το ορθογώνιο του $1^{\text{ου}}$ σχήματος

είναι η βάση του ορθογωνίου

παραλληλεπιπέδου (του $2^{\text{ου}}$ σχήματος)

με ύψος $u=3,5\text{cm}$, να υπολογίσετε το

ολικό εμβαδόν $E_{\text{ολ}}$ και τον όγκο V του

ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 16

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Τι λέγεται συνάρτηση;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax$ είναι μία ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Η ευθεία $y = 2x$ έχει κλίση -2 .

γ. Ο άξονας x είναι η ευθεία $y = 0$.

δ. Το σημείο $M(2, 5)$ έχει τετμημένη 5 και τεταγμένη 2.

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Τι λέγεται ημίτονο μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογώνιου τριγώνου;

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω ισχύουν : $0 < \eta\mu\omega < 1$ και $0 < \sigma\upsilon\nu\omega < 1$.

β. Το $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

γ. Αν $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\theta$, όπου θ οξεία γωνία, τότε $\theta = 45^\circ$.

δ. Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται εφαπτομένη της γωνίας ω .

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

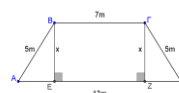
$$2(x - 3) - 4(x - 2) > 8(x - 1) \quad \text{και} \quad \frac{2x}{3} - \frac{2x - 3}{4} > \frac{5}{12}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το παρακάτω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με πλευρές: ΓΔ=ΑΒ=5m, ΒΓ=7m και ΑΔ=13m.

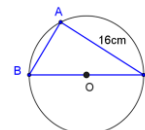
Α. Να υπολογίσετε το ύψος x του τραpezίου.

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου ΑΒΓΔ.



ΘΕΜΑ 3^ο

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΓ είναι η διάμετρος του κύκλου, η πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ είναι $ΑΓ=16\text{cm}$ και το μήκος του κύκλου είναι $L=62,8\text{cm}$.



A. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου.

B. Να εξηγήσετε γιατί η γωνία $\widehat{BAG}$ είναι ορθή και στη συνέχεια να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ του τριγώνου ΑΒΓ.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 16

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α ;

B. Για τους πραγματικούς αριθμούς x , α ισχύει $\sqrt{\alpha} = x$.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το α είναι αρνητικός αριθμός.

β. Το x είναι θετικός αριθμός ή μηδέν

γ. Ισχύει η σχέση $x^2 = \alpha$

Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε αριθμό της στήλης Α με τον ίσο του αριθμό από την στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
i) $\sqrt{64}$	α) 2
ii) $\sqrt{25-9}$	
iii) $\sqrt{(-8)^2}$	β) 4
iv) $(\sqrt{4})^2$	γ) 8
v) $\sqrt{4}$	
	δ) -8

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Τι ονομάζεται εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου ;

B. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ορθή την γωνία Β.



Αν οι πλευρές του είναι $\alpha=16$, $\beta=20$ και $\gamma=12$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση .

	A	B	Γ	Δ
--	---	---	---	---

ημω	$\frac{12}{16}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{16}{12}$
συνθ	$\frac{16}{20}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{16}{12}$	$\frac{3}{5}$
εφω	$\frac{4}{3}$	$\frac{16}{20}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{16}$

Γ. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο και έστω ω μια οξεία γωνία του.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε οξεία γωνία ω ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $\sin \omega < 1$

β. Για κάθε οξεία γωνία ω ορθογωνίου τριγώνου ισχύει $\cos \omega < 1$

γ. Αν το ορθογώνιο τρίγωνο είναι και ισοσκελές τότε ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega$

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

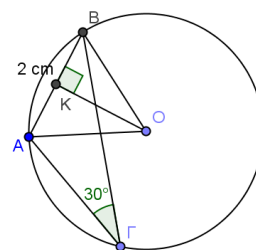
A. Να λύσετε την ανίσωση $8 - 2 \cdot (3x - 1) > 4 \cdot (x - 5)$

B. Να λύσετε την ανίσωση $x - \frac{3x(x+1)}{4} \leq \frac{2x-1}{3}$

Γ. Ποιοι από τους αριθμούς $-2, -1, 2, 3,$ είναι κοινή λύση των παραπάνω ανισώσεων . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό σχήμα η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}GB$ είναι 30° και η χορδή $AB=2\text{cm}$.



A. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AOB$ είναι ισόπλευρο

B. Να αποδείξετε ότι το ύψος του είναι $OK=\sqrt{3}\text{ cm}$

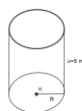
Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AOB$

ΘΕΜΑ 3^ο

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια δεξαμενή νερού σε σχήμα κυλίνδρου, κλειστή από πάνω με χωρητικότητα $200\pi\text{ m}^3$ και ύψος 8 m

A. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης του κυλίνδρου

B. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα της βάσης είναι 5 m και να υπολογίσετε την περίμετρο της βάσης του κυλίνδρου



Γ. Η δεξαμενή θα κατασκευαστεί από λαμαρίνα που κοστίζει 4€ το m^2 . Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής. ($\pi=3,14$)

