

Περιεχόμενα

3. .ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ.....	3
3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα.....	3
1.1 Ορισμένο ολοκλήρωμα	18
1.2 Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού	22
1.3 Ανισοτικές σχέσεις στο ορισμένο ολοκλήρωμα	27
1.4 Κανόνες ολοκλήρωσης στο ορισμένο ολοκλήρωμα	33
1.5 Η συνάρτηση <i>axftdt</i>	42
1.6 Υπολογισμός εμβαδού επίπεδου χωρίου.....	55
1.7 Γενικές ασκήσεις στα ολοκληρώματα	66
Επαναληπτικά θέματα	69
Ερωτήσεις θεωρίας – αποδείξεις – ορισμοί.....	87
Ερωτήσεις Σωστού -Λάθους.....	93
Θέματα τύπου Β.....	101
Θέματα τύπου Γ	105
Θέματα τύπου Δ.....	113
Ασκήσεις στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων.....	119

3. ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

3.1 Αόριστο ολοκλήρωμα

Σύμβολο το $f(x)dx$ (δεν είναι
πολλαπλασιασμός)

Θεώρημα : έστω μια συνάρτηση f
διάστημα Δ τότε

παραγωγίσιμη σε ένα

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

Παρατήρηση :

Η παραγωγή και η ολοκλήρωση είναι αντίστροφες διαδικασίες

Πίνακας βασικών ολοκληρωμάτων

1) $\int 0dx = c$	7) $\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$
2) $\int 1dx = x + c$	8) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + c$
3) $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	9) $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$
4) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$	10) $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$
5) $\int e^x dx = e^x + c$	11) $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \epsilon\phi x + c$
6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	12) $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\phi x + c$

Ιδιότητες του αόριστου ολοκληρώματος

Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν παράγουσες και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$1) \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

$$2) \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$3) \int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx$$

Παραδείγματα

$$1) \int (x^3 + \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx = \int x^3 dx + \int \eta\mu x dx + \int \sigma\upsilon\nu x dx = \frac{x^4}{4} - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$$

$$2) \int \frac{x^2 + x + 1}{x} dx = \int \frac{x^2}{x} dx + \int \frac{x}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx = \int x dx + \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| + c$$

$$3) \int 3x \cdot \sqrt{x} dx = 3 \int x \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = 3 \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{3x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{6}{5} \sqrt{x^5} + c$$

$$4) \int \frac{x^3 + 8}{x + 2} dx = \int \frac{(x + 2)(x^2 + 2x + 4)}{x + 2} dx = \int (x^2 + 2x + 4) dx = \dots$$

$$= \frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + c$$

$$5) \int \frac{x + 3}{x + 2} dx = \int \frac{x + 2 + 1}{x + 2} dx = \int \frac{x + 2}{x + 2} dx + \int \frac{1}{x + 2} dx = x + \ln|x + 2| + c$$

Εύρεση ολοκληρώματος με χρήση αρχικής συνθήκης

Αν $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ με $f(9) = 1$ Να βρεθεί το $\int f'(x) dx$

Λύση:

$$\int f'(x) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$\text{Άρα } f(x) = 2\sqrt{x} + c \Rightarrow f(9) = 1 \Rightarrow 2\sqrt{9} + c = 1 \Rightarrow 6 + c = 1 \Rightarrow c = -5$$

$$\text{Επομένως } f(x) = 2\sqrt{x} - 5$$

Ασκήσεις στο αόριστο ολοκλήρωμα

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \alpha) & \int (x^3 - 6x^2 + x - 1) dx \quad \beta) \int (x^4 + \sqrt{x}) dx \\ \gamma) & \int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \delta) \int \left(3\eta\mu x - 2 \sigma\upsilon\nu x + \frac{4}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \right) dx \end{aligned}$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \alpha) & \int (x+3)(x-1)^2 dx \quad \beta) \int (1-x)(x-1)^2 dx \quad x \geq 0 \\ \gamma) & \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx, x > 0 \quad \delta) \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^3 dx, x > 0 \end{aligned}$$

3. Να υπολογίσετε τα επόμενα ολοκληρώματα :

$$\begin{aligned} \alpha) & \int \frac{x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^2} dx \quad \beta) \int \frac{(x-1)^3}{x} dx, x > 0 \quad \gamma) \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx, x > 0 \\ \delta) & \int \frac{(2x+1)^3}{x^4} dx \end{aligned}$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int \sqrt{x}^3 \sqrt{x} dx, x \geq 0 \quad \beta) \int \frac{x^4 \sqrt{x^3}}{x^5} dx, x > 0 \quad \gamma) \int \sqrt{x^3 \sqrt{x}} dx, x \geq 0$$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int 2^x \cdot (3^x + 5^x) dx \quad \beta) \int 5^x \cdot 3^{2x} \cdot 2^{3x} dx \quad \gamma) \int \frac{2^x - 3^{3x}}{3^x} dx$$

6. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int x^2 y^3 dx \quad \beta) \int x^2 y^3 dx \quad \gamma) \int x^5 y dt$$

7. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} + \varepsilon\varphi x \right), \quad \mu\epsilon x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

a) Να αποδείξετε ότι :

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$$

b) Να βρείτε το ολοκλήρωμα :

$$\int \left(\frac{\eta\mu^4 x}{\sigma\upsilon\nu x} + 2\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^3 x \right) dx$$

Ολοκληρώματα σύνθετων συναρτήσεων

$$1. \int f'(x) dx = f(x) + c$$

$$2. \int f'(x) f^a(x) dx = \frac{f^{a+1}(x)}{a+1} + c$$

$$3. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$4. \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$$

$$5. \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

$$6. \int f'(x) \eta \mu f(x) dx = -\sigma \nu \nu f(x) + c$$

$$7. \int f'(x) \sigma \nu \nu x dx = \eta \mu f(x) + c$$

$$8. \int f'(x) e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

$$9. \int f'(x) a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c$$

$$10. \int \frac{f'(x)}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = \varepsilon \varphi f(x) + c$$

$$11. \int \frac{f'(x)}{\eta \mu^2 x} dx = -\sigma \varphi f(x) + c$$

Βασικά παραδείγματα :

Παρατηρούμε ότι $(x^2 + 1)' = 2x$

$$1) \int \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{(x^2 + 1)'}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = 2\sqrt{x^2 + 1} + c$$

$$2) \int \varepsilon \varphi x dx = \int \frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu x} dx = - \int \frac{(\sigma \nu \nu x)'}{\sigma \nu \nu x} dx = -\ln|\sigma \nu \nu x| + c$$

Παρατήρηση:

$$1) \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx = \int (f(x)g(x))' dx = f(x)g(x) + c$$

$$2) \int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} dx = \int \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' dx = \frac{f(x)}{g(x)} + c$$

$$3) \int f'(g(x)) g'(x) dx = \int [f(g(x))]' dx = f(g(x)) + c$$

Παραδείγματα :

$$1) \int (\eta \mu x + x \cdot \sigma \nu \nu x) dx = \int (x \cdot \eta \mu x)' dx = x \eta \mu x + c$$

$$2) \int e^x \cdot \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) dx = \int \left(e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x} \right) dx = \int (e^x \cdot \ln x)' dx = e^x \cdot \ln x + c$$

$$3) \int \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{x^2} dx = \int \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)' dx = \frac{\eta\mu x}{x} + c$$

Παράγουσες συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Να βρείτε τις παράγουσες της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \frac{1}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$$

Λύση:

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο 0, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x - x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\eta\mu x + \frac{1}{x+1} \right) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Επομένως ισχύει ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0. Επίσης η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

Ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων, άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Βρίσκουμε τις παράγουσες του κάθε κλάδου ξεχωριστά :

Για $x \leq 0$ έχουμε :

$$\int (e^x - x) dx = e^x - \frac{x^2}{2} + c_1$$

Για $x > 0$ έχουμε :

$$\int \left(\eta\mu x + \frac{1}{x+1} \right) dx = -\sigma\upsilon\nu x + \ln |x+1| + c_2$$

Επομένως είναι :

$$F(x) = \begin{cases} e^x - \frac{x^2}{2} + c_1, & x \leq 0 \\ -\sigma\upsilon\nu x + \ln |x+1| + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Όμως η F είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο 0, οπότε ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x - \frac{x^2}{2} + c_1 \right) = 1 + c_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sin x + \ln|x+1| + c_2) = -1 + c_2$$

Επομένως ισχύει ότι: $1 + c_1 = -1 + c_2 \Rightarrow c_2 = c_1 + 2$

$$F(x) = \begin{cases} e^x - \frac{x^2}{2} + c_1, & x \leq 0 \\ -\sin x + \ln|x+1| + c_1 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

Ασκήσεις στα ολοκληρώματα

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int (\eta \mu x + x \sigma \nu \nu x) dx \quad \beta) \int x^2 e^x (x+3) dx \quad \gamma) \int x(x \eta \mu x - 2 \sigma \nu \nu x) dx \quad \delta) \int \left(\ln x \cdot \sigma \nu \nu x + \frac{\eta \mu x}{x} \right) dx$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int \frac{2x \eta \mu x - x^2 \sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} dx, \quad \mu \epsilon x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \beta) \int \frac{e^x (\sigma \nu \nu x + \eta \mu x)}{\sigma \nu \nu^2 x} dx, \quad \mu \epsilon x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\gamma) \int \left(\frac{\sigma \nu \nu x}{x} - \frac{\eta \mu x}{x^2} \right) dx \quad \mu \epsilon x > 0 \quad \delta) \int \frac{2e^x - xe^x}{x^3} dx \quad \mu \epsilon x > 0$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int \frac{e^x (1 + x \ln x)}{x} dx, \quad x > 0 \quad \beta) \int \frac{(x \ln x - 1)e^x}{x \ln^2 x} dx, \quad x > 1$$

$$\gamma) \int \frac{\sigma \nu \nu x - \eta \mu x}{e^x} dx \quad \delta) \int \frac{1 - \ln x}{x^2} dx, \quad x > 0$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int (\chi^2 + 3\chi + 5)^6 (2\chi + 3) d\chi \quad \beta) \int (x^3 - 1)^5 x^2 dx \quad \gamma) \int \eta \mu x \cdot e^{\sigma \nu \nu x} dx \quad \delta) \int x e^{x^2+1} dx$$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$α) \int 2x \sin x^2 dx \quad b) \int x^2 \eta \mu x^3 dx \quad c) \int \frac{3x^2}{\sin^2 x} dx \quad d) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x e^x + e^x & \text{αν } x \geq 0 \\ \eta \mu x + x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις παράγουσες της f

7. Δίνονται τα ολοκληρώματα :

$$I = \int \frac{\eta \mu x}{\eta \mu x + \sin x} dx \quad \text{και} \quad J = \int \frac{\sin x}{\eta \mu x + \sin x} dx, \quad \mu \epsilon \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να υπολογίσετε τα :

i) $I+J, I-J$

ii) $I \text{ και } J$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \sin x - \eta \mu x}{x^2} + 1, & \text{αν } x > 0 \\ a e^{2x} - 2x - 3, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α

b) Τις παράγουσες της f

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

1^η μέθοδος «παραγοντική ολοκλήρωση»

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Παραδείγματα :

$$\begin{aligned} 1) \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \int (x)' \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot (\ln x)' \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \ln x - x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int x^2 \ln x \, dx &= \int \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} (\ln x)' \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c \end{aligned}$$

Παρατήρηση :

1. Η παραπάνω μέθοδος χρησιμοποιείται για υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής :

$$\int \overset{\text{↙}}{P(x)} \ln(ax) \, dx \quad , \quad \int \overset{\text{↙}}{P(x)} e^{ax} \, dx \quad , \quad \int \overset{\text{↙}}{P(x)} \eta\mu(ax) \, dx \quad , \quad \int \overset{\text{↙}}{P(x)} \sigma\upsilon\nu(ax) \, dx$$

(το βέλος δείχνει από πού ξεκινάμε)

1^ο Παράδειγμα :

$$\int x e^{2x} \, dx = \int x \left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' \, dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int (x)' \frac{e^{2x}}{2} \, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c$$

2^ο Παράδειγμα :

$$\begin{aligned} \int x^2 \sigma\upsilon\nu x \, dx &= \int x^2 (\eta\mu x)' \, dx = x^2 \eta\mu x - \int 2x \eta\mu x \, dx = x^2 \eta\mu x - 2 \int x (-\sigma\upsilon\nu x)' \, dx \\ &= x^2 \eta\mu x + 2x \sigma\upsilon\nu x - 2 \int \sigma\upsilon\nu x \, dx = x^2 \eta\mu x + 2x \sigma\upsilon\nu x - 2 \eta\mu x + c \end{aligned}$$

2. Επίσης χρησιμοποιείται στα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx \quad \text{ή} \quad \int e^{ax} \cos(bx) dx$$

Θέτοντας :

$$I = \int e^{ax} \sin(bx) dx$$

Κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση μέχρι να ξαναεμφανιστεί το I

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

$$I = \int e^x \eta \mu x \, dx$$

Λύση:

Θέτω

$$I = \int e^x \eta \mu x \, dx$$

Τότε

$$I = \int e^x \eta \mu x \, dx = \int (e^x)' \eta \mu x \, dx = e^x \eta \mu x - \int e^x \sigma \upsilon \nu x \, dx = e^x \eta \mu x - \int (e^x)' \sigma \upsilon \nu x \, dx$$

$$I = e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x - \int e^x \eta \mu x \, dx$$

$$I = e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x - I$$

$$2I = e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x$$

$$I = \frac{e^x \eta \mu x - e^x \sigma \upsilon \nu x}{2}$$

2η μέθοδος ολοκλήρωσης «η μέθοδος της αντικατάστασης»

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

Θέτω $g(x) = u$ οπότε $g'(x) dx = du$

Παράδειγμα:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$$

Θέτω $x^2 + 1 = u \Rightarrow (x^2 + 1)' dx = du \Rightarrow 2x dx = du$

3η μέθοδοςΟλοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{kx + \lambda}{ax^2 + \beta x + \gamma} dx = \int \frac{kx + \lambda}{a(x - x_1)(x - x_2)} dx = \int \left(\frac{A}{a(x - x_1)} + \frac{B}{x - x_2} \right) dx$$

- ✎ Όταν ο αριθμητής είναι μικρότερου βαθμού, του βαθμού του παρονομαστή ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία
- ✎ Όταν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού ή ίσου βαθμού, με τον παρονομαστή τότε κάνουμε την ευκλείδεια διαίρεση και ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία για το υπόλοιπο

Παράδειγμα 1°

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Λύση :

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 3)} dx = (*)$$

Έχουμε :

$$\frac{2x + 1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \Leftrightarrow 2x + 1 = A(x - 3) + B(x - 2)$$

Για $x=3$ έχουμε $B=7$

Για $x=2$ έχουμε $A=-5$

$$(*) = \int \left(\frac{7}{x-2} - \frac{5}{x-3} \right) dx = 7 \int \frac{1}{x-2} dx - 5 \int \frac{1}{x-3} dx = 7 \ln|x-2| - 5 \ln|x-3| + c$$

2ο παράδειγμα

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int \frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} dx$$

Λύση:

$x^2 + 3x + 7$	$x^2 - 5x + 6$
$-x^2 + 5x - 6$	1
$8x+1$	

$$\text{Άρα } x^2 + 3x + 7 = 1(x^2 - 5x + 6) + 8x + 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{1(x^2 - 5x + 6) + 8x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx = \int \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x + 6} dx + \int \frac{8x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx \\ &= \int 1 dx + \int \frac{8x + 1}{(x-2)(x-3)} dx = \dots \\ &= x - 17 \ln|x-2| + 25 \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

Ασκήσεις στις μεθόδους ολοκλήρωσης

Παραγοντική ολοκλήρωση:

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$α) \int x e^x dx \quad b) \int (x^2 - 3x) e^x dx \quad c) \int x^2 e^{3x} dx \quad d) \int \frac{x^2 + x}{e^x} dx \quad e) \int x \cdot 5^x dx \quad f) \int \frac{x^2}{2^x} dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$α) \int x \eta \mu x dx \quad b) \int x \sigma \nu \nu x dx \quad c) \int x^2 \eta \mu x dx \quad d) \int x \sigma \nu \nu^2 x dx \quad e) \int x^2 \eta \mu^2 x dx \quad f) \int \frac{x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx \quad g) \int x e^{\varphi^2}$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$α) \int x^3 \ln x dx \quad b) \int x^2 \ln 3x dx \quad c) \int (x^2 - 3x + 5) \ln x dx \quad d) \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad e) \int \ln x^5 dx \quad f) \int \ln^2 x dx$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$α) \int e^x \sigma \nu \nu x dx \quad b) \int e^{2x} \eta \mu x dx \quad c) \int e^{4x} \sigma \nu \nu 3x dx \quad d) \int \frac{\eta \mu 2x}{e^x} dx \quad e) \int e^x \eta \mu \frac{x}{2} dx$$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$α) \int x e^{2x + \ln x} dx \quad b) \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx \quad c) \int \eta \mu(\ln x) dx \quad d) \int \frac{x^2 e^x}{(x + 2)^2} dx$$

6. Θεωρούμε τα ολοκληρώματα :

$$I = \int e^x \sigma \nu \nu^2 x dx \quad \text{και} \quad J = \int e^x \eta \mu^2 x dx$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

i) $I + J$ και $I - J$

ii) I και J

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση :

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$α) \int x(x + 1)^7 dx \quad b) \int x^2(x - 2)^5 dx \quad c) \int (2x - 1)^2(x + 2)^9 dx \quad d) \int (4x - 2)^2(2x - 3)^5 dx$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$α) \int x \sqrt{x + 2} dx \quad b) \int \frac{x}{\sqrt{x + 1}} dx \quad c) \int \frac{x - 1}{\sqrt{x + 4}} dx \quad d) \int \frac{\sigma \nu \nu(\ln x)}{x} dx \quad e) \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 2} dx$$

9. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$α) \int \frac{\ln x}{x} dx \quad b) \int \frac{1}{x \sin^2(\ln x)} dx \quad c) \int \frac{\eta \mu \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Συνδυασμός μεθόδων ολοκλήρωσης

10. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$α) \int \eta \mu x \cdot \sigma \nu \nu x \cdot \eta \mu(\sigma \nu \nu x) dx \quad b) \int \sigma \nu \nu(\ln x) dx \quad c) \int \eta \mu \sqrt{x} dx \quad d) \int e^{\sqrt{x}} dx \quad e) \int 2x^5 e^{x^2} dx$$

11. Έστω $I_v = \int x^2 (\ln x)^v dx$, με $v \in \mathbb{N}^*$.

a) Να αποδείξετε ότι :

$$I_v = \frac{x^3}{3} (\ln x)^v - \frac{v}{3} I_{v-1}$$

b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int x^2 (\ln x)^3 dx$$

12. Έστω $I_v = \int \frac{x^v}{x^2+3} dx$, με $v \in \mathbb{N}^*$

a) Να αποδείξουμε ότι

$$I_v = \frac{x^{v-1}}{v-1} - 3I_{v-2} \quad \text{για κάθε } v \geq 3$$

b) Να υπολογίσετε το

$$\int \frac{x^5}{x^2+3} dx$$

13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση :

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Για την οποία ισχύει : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και :

$$x f'(x) - f(x) = x^3 \eta \mu x \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε :

a) Τον τύπο της f

b) Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)+1}{x^3}$

14. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση :

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Για την οποία ισχύει $f(e) = 4e^{-1}$ και

$$x^2 f'(x) + x f(x) = \frac{2 \ln^2 x + 3 \ln x + 1}{\ln x} \quad \text{για κάθε } x > 1$$

Να βρείτε :

a) Τον τύπο της f

b) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν :

$$f'(\pi) = -\pi ,$$

$$f(\pi) = \pi^2 - 3 \text{ και } f''(x) \cdot x - f'(x) = x^3 \text{ συν} x \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f$$

Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

16. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int \frac{2x-5}{x^2-3x+2} dx \quad b) \int \frac{2}{x^2-2x-3} dx \quad c) \int \frac{1}{x^2-4} dx \quad d) \int \frac{1}{9x^2-1} dx \quad e) \int \frac{2x-3}{x^2-x} dx$$

17. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int \frac{2x^2+6x+4}{x^2+2x-3} dx \quad b) \int \frac{x^2-13}{x^2-x-2} dx \quad c) \int \frac{x^2}{x^2-4} dx \quad d) \int \frac{3x^2-3x-1}{3x^2-x} dx$$

18. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int \frac{3x-1}{x-1} dx \quad b) \int \frac{2x}{x+2} dx \quad c) \int \frac{4x-5}{2x-3} dx \quad d) \int \frac{x+4}{x+1} dx \quad e) \int \frac{x-2}{x+3} dx$$

19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int \frac{x^3-3x^2+5x-5}{x^2-3x+2} dx \quad b) \int \frac{2x^3-5x^2-16x+22}{x^2-2x-8} dx \quad c) \int \frac{x^4-4x^3-x^2+3x+3}{x^2-1} dx$$

20. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int \frac{2x^2-15x+7}{x^3-2x^2-5x+6} dx \quad b) \int \frac{x^3-5x-2}{x^3-x} dx$$

Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

21. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$a) \int \sin 3x \cdot \eta\mu 2x dx \quad b) \int \sin 5x \cdot \sin 3x dx \quad c) \int \eta\mu 4x \cdot \eta\mu 8x dx \quad d) \int \sin^3 x \cdot \eta\mu^2 x dx$$

22. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$a) \int \eta\mu^5 x \cdot \sin^2 x dx \quad b) \int \frac{\eta\mu^3 x}{\sin^4 x} dx \quad c) \int \eta\mu^7 x dx$$

23. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$a) \int \frac{16x}{x^4+4x^2+3} dx \quad b) \int \frac{6\sin x}{\eta\mu^2 x - 6\eta\mu x + 8} dx \quad c) \int \frac{e^x - 2}{e^x + 3} dx$$

24. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 - 2x + 13}{x^2 - 2x - 3}, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν η C_f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 1$, τότε να βρείτε

- a) Τους αριθμούς α και β
- b) Το $\int f(x)dx$, με $x > 3$

25. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1 + e^x}{1 + e^{x+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)} dx$
- c) Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι :

$$f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$$

1.1 Ορισμένο ολοκλήρωμα

Ορισμός: Ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β ονομάζουμε το όριο

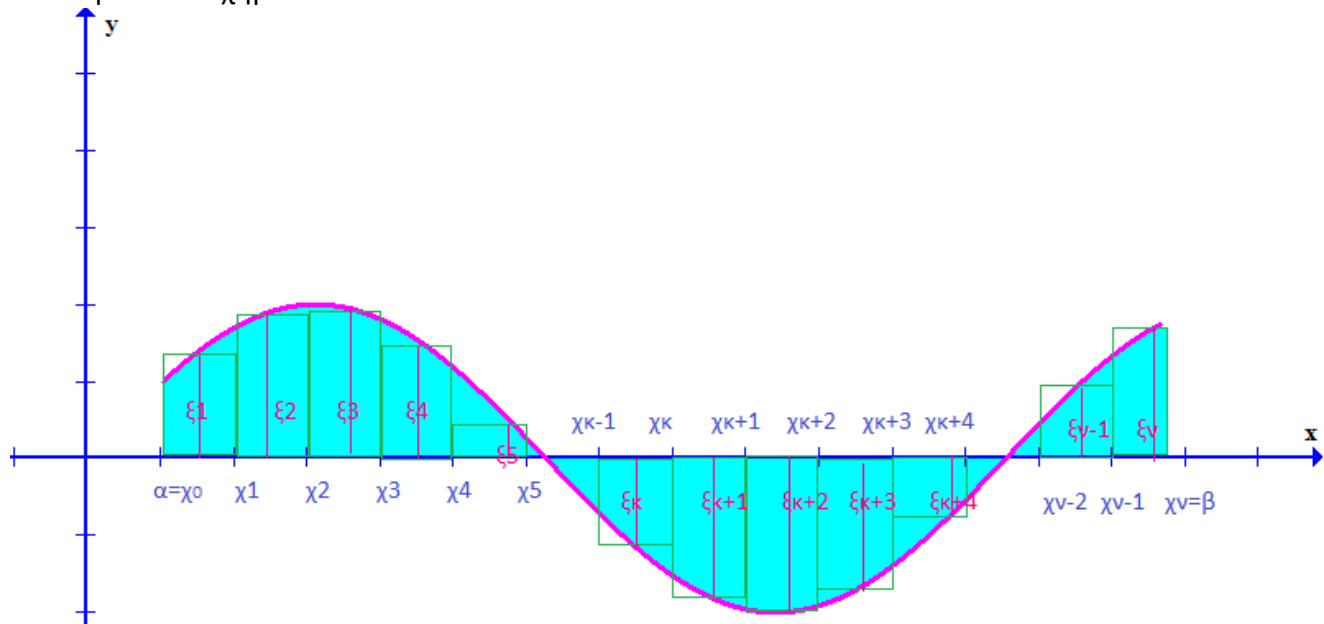
$$\lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k) \cdot \Delta x \right)$$

Δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{v \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^v f(\xi_k) \cdot \Delta x \right)$$

Μέθοδος υπολογισμού

Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{v}$ το καθένα, χρησιμοποιώντας τους αριθμούς :

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = \alpha + \Delta x, \quad x_2 = x_1 + \Delta x, \dots, \quad x_v = \beta$$

Σε καθένα από τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, με $k \in \{1, 2, \dots, v\}$, επιλέγουμε αυθαίρετα έναν αριθμό ξ_k

Σχηματίζουμε το παρακάτω άθροισμα

$$S_v = f(\xi_1) \cdot \Delta x + f(\xi_2) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_k) \cdot \Delta x + \dots + f(\xi_v) \cdot \Delta x$$

Το οποίο ονομάζεται άθροισμα Riemann και συμβολίζεται ως εξής

$$S_v = \sum_{k=1}^v f(\xi_k) \cdot \Delta x$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x \right)$$

Υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k

Παρατήρηση:

1. Οι αριθμοί α και β ονομάζονται όρια της ολοκλήρωσης
2. Ένα ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Είναι πραγματικός αριθμός σε αντίθεση με το αόριστο το οποίο είναι ένα σύνολο συναρτήσεων

3. Στην έκφραση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Το x είναι μια μεταβλητή και μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο γράμμα .

Για παράδειγμα, οι εκφράσεις

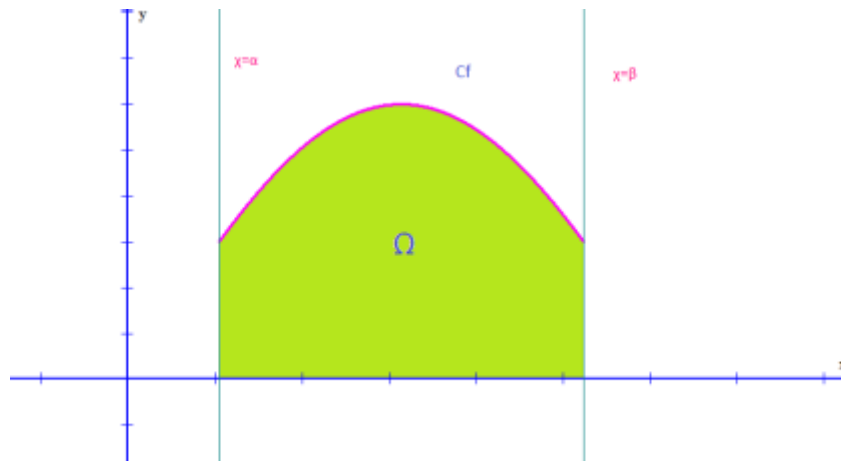
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \int_{\alpha}^{\beta} f(y) dy, \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

Εκφράζουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα

4. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ τότε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f τον άξονα x και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$



5. Ο ορισμός του ορισμένου ολοκληρώματος επεκτείνεται και στις περιπτώσεις που το $\alpha > \beta$ και $\alpha = \beta$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος

Θεώρημα 1

Έστω f και g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Θεώρημα 2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

Παρατήρηση:

Αν $f(x) \geq 0$ και $\alpha < \gamma < \beta$ τότε το

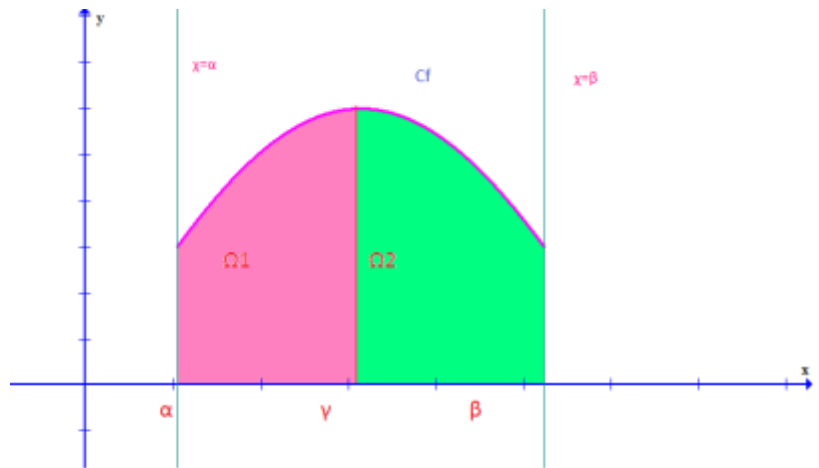
Θεώρημα 2 δηλώνει ότι :

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

Το θεώρημα 2 ισχύει για τυχαία

$\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ και όχι απαραίτητα

για $\alpha < \gamma < \beta$



Παράδειγμα : (άσκηση 1 σελ . 333 σχ.βιβλίο)

Δίνονται τα ολοκληρώματα :

$$\int_1^4 f(x)dx = 9, \int_3^4 f(x)dx = 11, \int_1^8 f(x)dx = 13$$

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα:

$$i) \int_4^3 f(x)dx \quad ii) \int_4^8 f(x)dx \quad iii) \int_1^3 f(x)dx \quad iv) \int_3^8 f(x)dx$$

Λύση:

$$i) \int_4^3 f(x)dx = - \int_3^4 f(x)dx = -11$$

$$ii) \int_4^8 f(x)dx = \int_1^8 f(x)dx - \int_1^4 f(x)dx = 13 - 9 = 4$$

$$iii) \int_1^3 f(x)dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_3^4 f(x)dx = 9 - 11 = -2$$

$$iv) \int_3^8 f(x)dx = \int_3^4 f(x)dx + \int_4^8 f(x)dx = 11 + 4 = 15$$

Η συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$

Θεώρημα έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Είναι μια παράγουσα της $f(x)$. **ΔΗΛΑΔΗ**

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Παρατήρηση :

1. Η ολοκλήρωση έχει έννοια σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων
2. Τα άκρα του ολοκληρώματος $\int_a^x f(t)dt$ πρέπει να ανήκουν στο ίδιο πεδίου ορισμού, στο πεδίο ορισμού της $f(x)$

1.2 Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$ να αποδείξετε ότι :

$$\int_a^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(a)$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με προηγούμενο θεώρημα η συνάρτηση

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$. επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$ θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $G(x) = F(x) + c$ (1)

Από την (1) για $x=a$ έχουμε $G(a) = F(a) + c = \int_a^a f(t)dt + c = c$ άρα $G(a) = c$ επομένως $G(x) = F(x) + G(a)$

Από την (1) για $x=\beta$ έχουμε : $G(\beta) = F(\beta) + c = \int_a^\beta f(t)dt + G(a)$ άρα

$G(\beta) = \int_a^\beta f(t)dt + G(a)$ δηλαδή :

$$\int_a^\beta f(x)dx = G(\beta) - G(a)$$

Βασική εφαρμογή 1

Ορισμένο ολοκλήρωμα μέσα σε ολοκλήρωμα

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α) Αν ισχύει ότι $\int_1^2 t^2 \left(\int_1^2 f(x) dx \right) dt = 14$, τότε να βρείτε το $\int_1^2 f(x) dx$

β) Αν επιπλέον ισχύει ότι: $\int_0^3 g(x) dx = 2$ τότε να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int_0^3 \left(\int_1^2 f(t) g(x) dt \right) dx$

Λύση:

α) θέτω $\int_1^2 f(x) dx = \lambda$ οπότε $\int_1^2 t^2 \lambda dt = 14 \Leftrightarrow \lambda \int_1^2 t^2 dt = 14 \Leftrightarrow \lambda \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^2 = 14 \Leftrightarrow \lambda \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = 14$

$$\Leftrightarrow \lambda = 6 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx = 6$$

β) $\int_0^3 \left(\int_1^2 f(t) g(x) dt \right) dx = \int_0^3 g(x) \left(\int_1^2 f(t) dt \right) dx = \int_0^3 6g(x) dx = 6 \int_0^3 g(x) dx = 6 \cdot 2 = 12$

Βασική εφαρμογή 2

Προσδιορισμός τύπου συνάρτησης

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = 12x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

Λύση:

Θέτω

$$\int_0^1 f(t) dt = \lambda \in \mathbb{R}$$

Τότε $f(x) = 12x^2 - 2\lambda x$

$$\int_0^1 f(t) dt = \lambda \Leftrightarrow \int_0^1 (12t^2 - 2\lambda t) dt = \lambda \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \lambda = 2 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t) dt = 2$$

Επομένως $f(x) = 12x^2 - 4x$

Ασκήσεις στα ολοκληρώματα

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$i) \int_0^1 (x^2 + 2x + 3) dx$$

$$ii) \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2} dx$$

$$iii) \int_0^{\pi/2} (\sin x + 1) dx$$

$$iv) \int_0^1 x e^x dx$$

$$v) \int_1^e x \ln x dx$$

$$vi) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$vii) \int_0^2 \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 3x + 2} dx$$

$$viii) \int_0^2 \frac{5x + 6}{x^2 + 3x + 2} dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

$$i) \int_0^1 (e^x + x) dx \quad ii) \int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx \quad iii) \int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx$$

3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$i) I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$$

$$ii) I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$$

$$iii) I = \int_0^{\pi/2} \eta \mu^2 x dx$$

$$iv) I = \int_0^{\pi/2} \eta \mu^3 x dx.$$

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 1 \\ 3x^2 - 6x + 8, & x > 1 \end{cases}$$

i) Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής

ii) Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int_{-4}^{-2} f(x) dx \quad b) \int_2^4 f(x) dx \quad c) \int_{-1}^3 f(x) dx$$

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 + ax, & x \leq 1 \\ \frac{4}{x} + 6x + 2a, & x > 1 \end{cases}, a \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε :

i) Τον αριθμό α

ii) Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^2 f(x) dx$$

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 3 \\ \beta x + 2, & x > 3 \end{cases}, a, \beta \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

i) Τις τιμές των a και β

ii) Το ολοκλήρωμα $\int_1^4 f(x) dx$

7. Αν ισχύει ότι: $\int_4^5 f(x) dx = 4$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_1^3 \left(\int_4^5 x f(t) dt \right) dx$$

8. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$a) I_1 = \int_1^2 \left(\int_3^x 4 dt \right) dx \quad b) I_2 = \int_{-1}^2 \left(\int_1^x 6y^2 dy \right) dx$$

9. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^2 f(t) \sin x dt \right) dx = 2$$

Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int_1^2 f(t) dt \quad b) \int_{-2}^0 \left(\int_1^2 3t^2 f(x) dx \right) dt$$

10. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$i) \int_{-1}^3 (2|x-2| + 1) dx \quad ii) \int_{-2}^2 (|x+1| + x - 4) dx \quad iii) \int_{-2}^4 (3|x^2 - 2x - 3| + 4) dx$$

11. Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) e^{f(x)} dx = 0$$

Όπου $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι :

a) $f(\alpha) = f(\beta)$

b) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (α, β)

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = 5$ και :

$$\int_1^2 (xf'(x) + f(x))dx = 1$$

Να βρείτε :

i) την τιμή $f(2)$

ii) το ολοκλήρωμα $\int_1^2 x^2(3f(x) + xf'(x))dx$

13. (2003) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

a) Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$

c) Να αποδείξετε ότι: $f'(x)\sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

d) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

1.3 Ανισοτικές σχέσεις στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Θεώρημα 1°

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$$

Θεώρημα 2°

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Και δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$$

Πρόταση:

Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει ότι : $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Τότε ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Απόδειξη:

Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι : $f(x) - g(x) \geq 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$h(x) = f(x) - g(x), \text{ με } x \in [\alpha, \beta]$$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε είναι :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx \geq 0 &\Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \\ &\geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx \end{aligned}$$

Παρατήρηση:

1. Η παραπάνω πρόταση , όποτε χρησιμοποιείται πρέπει να αποδεικνύεται
2. Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει ότι : $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Και υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) > g(x_0)$ Τότε ισχύει ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

Εφαρμογή

Να αποδείξετε ότι :

$$i) \sqrt{x+1} \leq \frac{x+2}{2} \quad ii) \int_0^1 \sqrt{x^3+1} dx \leq \frac{9}{8}$$

Λύση:

$$i) \sqrt{x+1} \leq \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - \frac{x+2}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - x - 2 \leq 0, \text{ Για κάθε } x \geq -1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x - 2, \text{ Με } x \in [-1, +\infty)$$

Για κάθε $x \geq -1$ είναι

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

Οι ρίζες , το πρόσημο της f' καθώς και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\ominus$	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0) = 0$

Άρα για κάθε $x \geq -1$ ισχύει ότι:

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \leq \frac{x+2}{2}$$

- ii) Αν στη σχέση του ερωτήματος (i) θέσουμε όπου x το x^3 προκύπτει :

$$\sqrt{x^3+1} \leq \frac{x^3+2}{2} \text{ για κάθε } x \in [0,1]$$

Επομένως ισχύει ότι :

$$\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{x^3 + 2}{2} dx$$

Όμως είναι

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 2}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8} + x \right]_0^1 = \frac{1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$$

Άρα

$$\int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} dx \leq \frac{9}{8}$$

Παρατήρηση

1. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και m, M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε ισχύει ότι: $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ οπότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} m dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} M dx$$

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

2. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$$

Τότε $f(x)=0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιος ώστε $f(x_0) > 0$

Τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. θα είναι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0 \text{ Άτοπο !!!}$$

Ασκήσεις στις ανισοτικές σχέσεις στα ολοκληρώματα

1. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση να αποδείξετε ότι :

$$\int_1^3 f^2(x) dx \geq \int_1^3 6f(x) dx - 18$$

2. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $\int_1^4 x^2 dx$

β) Να αποδείξετε ότι : $\int_1^4 (f^2(x) - 2xf(x)) dx \geq -21$

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_0^2 f(x) dx = 5$$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f^2(x) + 16 \geq 8f(x)$ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) $\int_0^2 f^2(x) dx \geq 8$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι

$$\int_{-1}^2 e^{x^2} dx \geq 6$$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2$

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^1 \ln(x^2 + 1) dx < \frac{1}{3}$$

6. Να αποδείξετε ότι:

α) $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$

β) $\int_1^2 x^x dx \geq e - 1$

7. Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ για κάθε $x > 1$

$$b) 1 < \int_2^{e+1} \frac{1}{\ln x} dx < e$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 6$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

b) Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 6} dx \leq \frac{2}{5}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι $f(1) = \frac{7}{3}$ και

$$(x^2 + 2)f'(x) + 2xf(x) = 4x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

a) Να βρείτε τον τύπο της f

b) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

c) Να αποδείξετε ότι :

$$6 \leq \int_{-2}^4 f(x) dx \leq 15$$

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$$\int_1^e f^2(x) dx = 4 \int_1^e x(f(x) + x) dx$$

Να βρείτε:

a) Τον τύπο της f

b) το ολοκλήρωμα :

$$\int_1^e \frac{1}{f(x)} dx$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει

$f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, με $\alpha < \beta$, τότε να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta]$$

$$\beta) 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-vx}$ με $x \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}^*$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

b) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

c) Να αποδείξετε ότι :

$$2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x e^{-vx} dx \leq e$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(1)=e$ και

$$f(x) = e^x - x f'(x) \text{ Για κάθε } x > 0$$

- a) Να βρείτε τον τύπο της f
- b) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
- c) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$
- d) Να αποδείξετε ότι :

$$\int_1^2 f(x) dx \leq \frac{3e^2}{8}$$

1.4 Κανόνες ολοκλήρωσης στο ορισμένο ολοκλήρωμα

Παραγοντική ολοκλήρωση

Αν f', g' συνεχείς συναρτήσεις τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$

Παράδειγμα :

$$\int_1^e \ln x dx = \int_1^e (x)' \ln x dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x (\ln x)' dx = e - \int_1^e 1 dx = e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Αν f', g' συνεχείς συναρτήσεις τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u)du$$

Όπου $u = g(x), du = g'(x)dx, u_1 = g(a), u_2 = g(\beta)$

Παράδειγμα :

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{\eta \mu(\ln x)}{x} dx$$

Θέτω $\ln x = u$

$$\text{Οπότε } \frac{1}{x} dx = du$$

Για $x=1$ έχω $u=\ln 1=0$

Για $x=e^{\pi}$ έχω $u=\ln e^{\pi} = \pi$

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{\eta \mu(\ln x)}{x} dx = \int_0^{\pi} \eta \mu u du = [-\sigma \nu \nu u]_0^{\pi} = -\sigma \nu \nu \pi + \sigma \nu \nu 0 = 2$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα άρτιας – περιττής συνάρτησης

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[-a, a]$

a) Αν η f είναι περιττή, τότε ισχύει

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

b) Αν η f είναι άρτια, τότε ισχύει

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Λύση:

a) Η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή, άρα για κάθε $x \in [-a, a]$ ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$

Στο ολοκλήρωμα :

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx \quad \text{θέτουμε } u = -x \text{ οπότε } du = -dx$$

Για $x = -a$ είναι $u = a$

Για $x = a$ είναι $u = -a$

Οπότε

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = \int_a^{-a} -f(-x) dx = \int_{-a}^a f(-u) du = - \int_{-a}^a f(x) dx = -I$$

$$\text{άρα } 2I = 0 \text{ Οπότε } I = 0$$

$$I = \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

b) Η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια, άρα για κάθε $x \in [-a, a]$ ισχύει ότι $f(-x) = f(x)$

Στο ολοκλήρωμα :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \quad \text{θέτουμε } u = -x \text{ οπότε } du = -dx$$

Για $x = -a$ είναι $u = a$

Για $x = a$ είναι $u = -a$

Οπότε

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_a^0 -f(-u) du = \int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) du = \int_0^a f(x) dx$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \int_{-\alpha}^0 f(x)dx + \int_0^{\alpha} f(x)dx \Leftrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x)dx$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, με $x \in \mathbb{R}$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$$

Λύση:

a) $f'(x) = e^x + 3x^2 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η f είναι 1-1

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f

$$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

b) Θέτω $f^{-1}(x) = u \Rightarrow x = f(u) \Rightarrow dx = f'(u)du$

για $x = 1$ είναι $f(u) = 1 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0$ (είναι 1-1)

για $x = e + 1$ είναι $f(u) = e + 1 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$

Επομένως έχουμε :

$$\int_0^1 f(f^{-1}(u))f'(u)du = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 u(e^u + 3u^2)du = \int_0^1 (ue^u + 3u^3)du = \dots = \frac{7}{4}$$

Ασκήσεις στον υπολογισμό ορισμένου ολοκληρώματος

Παραγοντική ολοκλήρωση

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \quad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \eta \mu x dx \quad c) \int_0^{\frac{\pi}{6}} (3x^2 + 2) \sigma \nu \nu 3x dx \quad d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sigma \nu \nu^2 x dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int_0^1 \ln x dx \quad b) \int_1^e (3x^2 - 2ex) \ln x dx \quad c) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx \quad d) \int_1^e 2x \ln^2 x dx$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$a) \int_0^1 x e^x dx \quad b) \int_0^2 (x^2 - 2x) e^x dx \quad c) \int_0^1 \frac{x^2}{e^x} dx \quad d) \int_0^2 (x e^x)^2 dx$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \eta \mu x dx \quad b) \int_0^{\pi} e^{2x} \sigma \nu \nu 4x dx \quad c) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx \quad d) \int_1^2 \ln \left(1 + \frac{2}{x} \right) dx$$

5. Δίνεται το ολοκλήρωμα :

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \ln x^3 dx \quad , \mu \epsilon \lambda > 0$$

- a) Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$

- b) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$

6. Δίνεται το ολοκλήρωμα :

$$I(\lambda) = \int_1^{\lambda} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{\ln x}{x^2} \right) dx \quad , \mu \epsilon \lambda > 1$$

- a) Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$

- b) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$

7. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1)=5$ και

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \quad \text{να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } I = \int_0^1 x f'(x) dx$$

8. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της

$A(1,2)$ και $B(3,9)$ τέμνονται στο σημείο $\Gamma(4,11)$. Να βρείτε :

- a) Τις τιμές $f'(1)$ και $f'(3)$
 b) Το ολοκλήρωμα $\int_1^3 x f''(x) dx$

Αναγωγικοί τύποι

9. Δίνεται το ολοκλήρωμα :

$$I_v = \int_0^{\pi} x^v \cdot \sin x dx, \quad \mu\epsilon \ v \in \mathbb{N}^*$$

a) Να αποδείξετε ότι :

$$I_v = -v\pi^{v-1} - v(v-1)I_{v-2}, \quad \text{για κάθε } v \geq 4$$

b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^{\pi} x^5 \cdot \sin x dx$$

10. Δίνεται το ολοκλήρωμα :

$$I_v = \int_0^2 \frac{x^v}{x^2 + 1} dx, \quad \mu\epsilon \ v \in \mathbb{N}^*$$

a) Να αποδείξετε ότι :

$$I_{v+2} + I_v = \frac{2^{v+1}}{v+1} \quad \text{για κάθε } v \in \mathbb{N}^*$$

b) Να υπολογίσετε το άθροισμα :

$$S = I_1 + I_2 + 2I_3 + I_4 + I_5$$

Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

11. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_{-2}^{-1} (x-1)(x+2)^4 dx \quad \text{b)} \int_1^6 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx \quad \text{c)} \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx \quad \text{d)} \int_2^5 \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}} dx$$

12. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_1^3 \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \quad \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(\eta\mu x + 1)^2 dx \quad \text{c)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1-\sin x}} dx \quad \text{d)} \int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx$$

13. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_1^2 x\sqrt{2-x} dx \quad \text{b)} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}+1} dx \quad \text{c)} \int_1^{e^5} \frac{1}{x\sqrt{4+\ln x}} dx \quad \text{d)} \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

14. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$α) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \eta\mu^4 x dx \quad b) \int_0^{\pi} \eta\mu^3 x dx \quad c) \int_0^{\pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu x} dx \quad d) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \quad e) \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

15. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό $\alpha > -3$ για τον οποίο ισχύει :

$$\int_{-3}^{\alpha} \frac{x}{\sqrt{x+4}} dx = \frac{22}{3}$$

16. (τριγωνομετρική αντικατάσταση) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$α) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad b) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$$

17. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$$\int_4^9 f(x) dx = 6$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_2^3 x f(x^2) dx$$

18. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$\int_0^5 f(x) dx = 6, \int_1^5 f(x) dx = 10 \quad \text{και} \quad \int_0^7 f(x) dx = 11$$

Να βρείτε το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^2 f(3x+1) dx$$

Άρτιες – Περιττές-Περιοδικές

19. α) Αν η συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και περιττή, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$i) \int_{-2}^2 \frac{x^{15} \eta\mu^2 x}{2 + \sigma\upsilon\nu x} dx \quad ii) \int_{-1}^1 \frac{\sigma\upsilon\nu x (1 - e^x)}{1 + e^x} dx$$

20. α) Αν η συνάρτηση $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu^2 x} dx$$

21. Δίνεται η παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f' είναι άρτια

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)\sigma\upsilon\nu x}{x^2 + 1} dx + \int_{-2}^2 \frac{f'(x)\eta\mu x}{|x| + 2} dx$$

Ορισμένο ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x^3 + 2x + 3$

a) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

b) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^6 f^{-1}(x) dx$$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e}) = 2$ και :

$$xf'(x) \ln x + f(x) = 0, x > 1$$

a) Να βρείτε τον τύπο της f

b) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

c) Να ορίσετε την f^{-1}

d) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_e^{e^2} \frac{1}{\ln x} dx + \int_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{x}} dx$$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \sqrt{x^3 + 8}$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

b) Να ορίσετε την f^{-1}

c) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_1^2 \left(\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[3]{x^2 + 4x - 4} \right) dx$$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x^2}$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

b) Να ορίσετε την f^{-1}

c) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x+e^{x^2}} dx + \int_1^e \frac{1}{1+x+\sqrt{\ln x}} dx$$

26. (Η αντικατάσταση $x=\alpha+\beta-u$)

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int_{-1}^1 \frac{x^4 + e^x}{e^x + 1} dx \quad b) \int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

Συνδυαστικά θέματα

27. Δίνεται το ολοκλήρωμα :

$$I(\lambda) = \int_0^\lambda x^2 e^x dx, \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Να υπολογίσετε το $I(\lambda)$

b) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$, $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} I(\lambda)$

c) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda_0 \in (1,2)$, ώστε $I(\lambda_0) = 6$

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

a) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

c) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$$

29. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία υποθέτουμε ότι :

$f(0) = 0$ και ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

a) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f(x) = x f'(\xi)$

b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x} + e^x$ είναι συνάρτηση 1-1 στο διάστημα $(0, +\infty)$

c) Αν $h(x) = e^x + x^5 + x$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_1^{e-1} f(x+1) dx$$

30. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

a) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$

b) Αν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x) dx, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

c) Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

31. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g'(x) \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (g(x) - 2) \eta \mu x dx \text{ και } g'(x) = g(x) - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

a) Να αποδείξετε ότι $g(0)=2$

b) Να βρείτε τον τύπο της g

c) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να αποδείξετε ότι :

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_0^a f(x) dx$$

1.5 Η συνάρτηση $\int_a^x f(t)dt$

(εντός ύλης είναι μόνο το π.ο)

Θεώρημα έστω μια συνάρτηση $f(x)$ συνεχής σε ένα διάστημα Δ τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Είναι μια παράγουσα της $f(x)$. **ΔΗΛΑΔΗ**

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta$$

Παρατήρηση :

1. Η ολοκλήρωση έχει έννοια σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων
2. Τα άκρα του ολοκληρώματος $\int_a^x f(t)dt$ πρέπει να ανήκουν στο ίδιο πεδίο ορισμού, στο πεδίο ορισμού της $f(x)$

Μεθοδολογία εύρεσης πεδίου ορισμού της

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ εργαζόμαστε ως εξής :

- ✎ Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f
- ✎ Βρίσκουμε το διάστημα Δ στο οποίο η f είναι συνεχής και ισχύει $a \in \Delta$
- ✎ Το παραπάνω διάστημα είναι το πεδίο ορισμού της F

Σημαντική εφαρμογή :

(εύρεση πεδίου ορισμού της $\int_a^x f(t)dt$)

Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}dt$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της F

Λύση :

Πρέπει : $t^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 1 \Rightarrow |t| \geq 1 \Rightarrow t \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ άρα $A_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Οπότε επειδή

$$\begin{cases} 1 \in [1, +\infty) \\ x \in [1, +\infty) \end{cases} \Rightarrow A_F = [1, +\infty)$$

Η συνάρτηση $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Εύρεση πεδίου ορισμού της $F(x)$

- ✎ Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $g(x)$
- ✎ Βρίσκουμε το σύνολο D_f στο οποίο η f είναι συνεχής
- ✎ Το πεδίο ορισμού της F αποτελείται από τα $x \in D_g$ για τα οποία $\alpha, g(x) \in D_f$

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{-1}^{\ln(x-1)} \frac{e^t}{t} dt$$

Να βρείτε :

Το πεδίο ορισμού της F

Λύση:

$$f(t) = \frac{e^t}{t}, D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$g(x) = \ln(x-1), \quad D_g = (1, +\infty), \quad x > 1$$

Επειδή $-1 \in (-\infty, 0)$ πρέπει $g(x) \in (-\infty, 0)$

άρα πρέπει $\ln(x-1) < 0 \Rightarrow x-1 < 1 \Rightarrow x < 2$

άρα $1 < x < 2$

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$$

Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$

- ✎ Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού D_g και D_h
- ✎ Βρίσκουμε το σύνολο D_f στο οποίο η f είναι συνεχής
- ✎ Το πεδίο ορισμού της F αποτελείται από τα $x \in D_g \cap D_h$ για τα οποία τα $g(x)$ και $h(x)$ ανήκουν στο ίδιο διάστημα του D_f

Η παράγωγος της $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$

$$\begin{aligned} (F(x))' &= \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)' = \left(\int_{g(x)}^a f(t) dt + \int_a^{h(x)} f(t) dt \right)' \\ &= \left(\int_a^{h(x)} f(t) dt - \int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = \\ &= f(h(x)) \cdot h'(x) - f(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Εφαρμογή :

Δίνεται η συνάρτηση :

$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2-4} \frac{\eta \mu t}{t} dt, \text{ Να βρείτε ;}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F

Λύση:

Η συνάρτηση $f(t) = \frac{\eta \mu t}{t}$, ορίζεται όταν $t \neq 0$

Οπότε $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και είναι συνεχής

Οι συναρτήσεις $g(x) = x - 1$ και $h(x) = x^2 - 4$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πρέπει να ανήκει στο ίδιο διάστημα του D_f . Δηλαδή πρέπει:

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(x) \in (-\infty, 0) \\ h(x) \in (-\infty, 0) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ h(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1 \end{aligned}$$

Ή

$$\begin{aligned} \begin{cases} g(x) \in (0, +\infty) \\ h(x) \in (0, +\infty) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ h(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \text{ ή } x < -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \\ &> 2 \end{aligned}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της F είναι το $D_F = (-2, 1) \cup (2, +\infty)$

Βασικές λυμένες ασκήσεις

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x t \cdot \eta\mu(x-t) dt$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε την F' .

Λύση:

Θέτουμε $x-t = u \Leftrightarrow t = x-u$ Οπότε $dt = -du$

Όταν $t=0$ το $u=x$

Όταν $t=x$ το $u=0$

$$F(x) = \int_0^x t \cdot \eta\mu(x-t) dt = - \int_x^0 (x-u) \eta\mu u du = x \int_0^x \eta\mu u du - \int_0^x u \eta\mu u du$$

Άρα

$$F(x) = x \int_0^x \eta\mu u du - \int_0^x u \eta\mu u du$$

Έχουμε ότι :

- 📁 Η συνάρτηση $\eta\mu$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η $\int_0^x \eta\mu u du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- 📁 Η συνάρτηση $u\eta\mu$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η $\int_0^x u\eta\mu u du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
- 📁 Η συνάρτηση x είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

Άρα η F είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} (F(x))' &= \left(x \int_0^x \eta\mu u du - \int_0^x u \eta\mu u du \right)' = \left(x \int_0^x \eta\mu u du \right)' - \left(\int_0^x u \eta\mu u du \right)' \\ &= (x)' \left(\int_0^x \eta\mu u du \right) + x \left(\int_0^x \eta\mu u du \right)' - x\eta\mu x = \int_0^x \eta\mu u du + x\eta\mu x - x\eta\mu x = [-\sigma\upsilon\nu u]_0^x \\ &= -\sigma\upsilon\nu x + 1 \end{aligned}$$

- 2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^t e^{y^2} dy \right) dt$$

Λύση:

Θέτουμε :

$$\int_1^t e^{y^2} dy = f(t)$$

Οπότε :

$$I = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (t)' f(t) dt = [tf(t)]_0^1 - \int_0^1 t f'(t) dt = 0 - \int_0^1 t e^{t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 2te^{t^2} dt = -\frac{1}{2} [e^{t^2}]_0^1 = \frac{1-e}{2}$$

3) Δίνεται η συνάρτηση :

$$F(x) = \int_{2-x}^{x+\frac{1}{2}} \ln t dt$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F

Λύση:

Η συνάρτηση $f(t)=\ln t$ έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$ και είναι συνεχής

Επίσης οι συναρτήσεις $g(x)=2-x$ και $h(x) = x + \frac{1}{2}$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση :

$$F(x) = \int_{2-x}^{x+\frac{1}{2}} \ln t dt$$

Ορίζεται όταν :

$$\begin{cases} 2-x > 0 \\ x + \frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 2 \text{ άρα } D_f = \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$$

a) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) = 2 + \int_1^x \frac{f(t)}{x} dt, \text{ για κάθε } x > 0$$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

b) Να βρείτε τον τύπο της f

Λύση :

a) Για κάθε $x > 0$, ο τύπος της f γίνεται :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \quad (1)$$

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα η $\int_1^x \frac{f(t)}{x} dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

b) Πρίν παραγωγίσουμε την f πρέπει να διώξουμε το $\frac{1}{x}$ μπροστά από το ολοκλήρωμα

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt \Leftrightarrow xf(x) = 2x + \int_1^x f(t) dt \Leftrightarrow (xf(x))' = \left(2x + \int_1^x f(t) dt \right)' \Leftrightarrow$$

$$f(x) + xf'(x) = 2 + f(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{x} \text{ (αφού } x > 0) \Leftrightarrow f(x) = 2 \ln x + c$$

Για $x=1$ η (1) δίνει $f(1)=2$ άρα $c=2$ οπότε $f(x) = 2 \ln x + 2$

Ασκήσεις στη συνάρτηση $\int_a^x f(t) dt$

Πεδίο ορισμού

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

$$a) F(x) = \int_{\frac{3}{x}}^x \sqrt{t^2 - 4} dt$$

$$b) F(x) = \int_1^x \frac{1}{(t+3)(t-2)^2} dt$$

2) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$a) F(x) = \int_{-2}^{2x+5} \ln(t^2 - 1) dt \quad b) F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^t}{t-4} dt$$

$$c) F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{\eta \mu t}{t-3} dt \quad d) F(x) = \int_{x^2-x}^5 \frac{\sqrt{t-2}}{1+\sqrt{12-t}} dt$$

3) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων :

$$a) F(x) = \int_{\frac{x+2}{x^3}}^{4-x} \sqrt{t^2 - 1} dt \quad b) F(x) = \int_{\ln x}^{5-x^2} \sqrt{t^2 - 1} dt$$

$$c) F(x) = \int_{x^2-1}^{\frac{\sigma \nu \eta t}{t-8}} dt \quad d) F(x) = \int_{x^2-4}^{\frac{e^t}{t}} dt$$

4) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$a) F(x) = \int_2^x \frac{x \eta \mu t}{t} dt \quad b) F(x) = \int_1^{\ln x} \frac{e^{x+1}}{t} dt \quad c) F(x) = \int_1^{e^x} t \ln \frac{x}{t} dt$$

5) (*δεν έχει πέσει) Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln x, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

b) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

6) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \mu x^2 dx \right) dy \quad b) \int_0^1 \left(\int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt \right) dx$$

Εύρεση τύπου συνάρτησης

7) Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$3x + \int_0^x f(t)dt = x^2$$

8) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) - \int_1^x f(t)dt = x + \ln x$$

Για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f

9) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) = 2 + \int_0^x f(t)dt$$

Να βρείτε τον τύπο της f

10)(θέμα) Δίνεται η συνάρτηση h συνεχής στο $[1, +\infty)$ που ικανοποιεί τη σχέση :

$$h(x) = 1999(x - 1) + \int_1^x \frac{h(t)}{t} dt$$

για κάθε $x \geq 1$. Να αποδείξετε ότι :

a) $h(x) = 1999x \ln x$, με $x \geq 1$

b) η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

11) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) - 2x^2 = 2x \ln x - \int_1^x \frac{xf(t)}{t^2} dt$$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

b) Να βρείτε τον τύπο της f

12) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση :

$$\int_0^x (1+t^2)f(t)dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t)dt$$

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$

b) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$

13) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_2^x e^{x-t} f(t) dt = 1 - e^{x-2} - f(x)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

14) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x) - \int_{\frac{1}{x}}^1 f(xt) dt = \frac{\ln x}{x} \text{ για κάθε } x > 0$$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

b) Να βρείτε τον τύπο της f

15) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x \int_0^1 f(xt) dt = f(x) + x^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

b) Να βρείτε τον τύπο της f

16) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2 + 1)f(x) = \int_0^x 2tf(t) dt + x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε :

a) Τον τύπο της f

b) Το ολοκλήρωμα :

$$\int_0^1 \left(\int_1^x f(t) dt \right) dx$$

17) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_{e^x}^{e^{2x}} \frac{t^2 f(t)}{x+1} dt = \ln(x+1), \text{ για } x > -1$$

Να βρείτε :

a) Την τιμή $f(1)$

b) Το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x (x-1)f(t)dt}{e^{x-1} - x}$$

Θεώρημα Bolzano

18) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\int_{x+2}^{x^2} f(t)dt = x - 1$$

Έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1, 2)$

19) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (2, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι η επόμενη εξίσωση :

$$\int_1^x 2f(t)dt = 3x - 2$$

Έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, 3)$

20) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [1, 2]$

Τέτοιο ώστε :

$$\int_1^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^2 f(t)dt$$

21) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

$$\int_1^2 f(3x)dx = -1 \quad \text{και} \quad \int_1^2 f(4x)dx = \frac{1}{2}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (3, 4)$ τέτοιο ώστε :

$$\int_{x_0}^{2010} f(t)dt = \int_{2x_0}^{2010} f(t)dt$$

22) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση:

$$g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2-5x} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι :

a) $g(-3) \cdot g(0) < 0$

b) Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία μονο ρίζα στο διάστημα $(-3,0)$

Θεώρημα Rolle

23) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt = 1$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε : $f(\xi) = \eta \mu \xi$

24) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\int_1^x f(t) dt + x f(x) = 0$$

Έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$

25) Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = 1$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi) + 2\xi$

26) Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $g(0) = 0$ και

$$\int_0^1 x f'(x) dx = \int_0^1 (f(1) - g'(x)) dx$$

Να αποδείξετε ότι :

a) $\int_0^1 f(x) dx = g(1)$

b) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$, ώστε $f(\xi) = g'(\xi)$

27) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_1^3 \left(\int_0^1 x f(t) dt \right) dx = 4$$

a) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(t) dt$

b) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3\xi^2$

28) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(1) = 5$, $f(1) =$

2 και :

$$\int_0^1 x^2 f''(x) dx = 1$$

a) Να βρείτε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 f(t) dt$

b) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^{\xi} f(t) dt = f(\xi)$$

29) Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$, τη συνεχή συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0$ και τη συνάρτηση:

$$g(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_a^x f(t) dt, \text{ με } x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε :

a) Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον x'

b) $g(x_0) = 2 + f(x_0)$

Θ.Μ.Τ

30) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύει :

$$\int_1^2 f(x) dx = 1 \text{ και } \int_1^3 f(x) dx = 5$$

Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση:

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt, x \in \mathbb{R}$$

a) Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία

b) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, τέτοιο ώστε : $f(\xi + 1) - f(\xi) = 3$

31) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

a) Να αποδείξετε ότι :

$$\int_0^3 f(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x) dx$$

b) Αν είναι :

$$4 \int_0^3 f(2x+1) dx = \int_1^7 f(x) dx + 2004$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,7)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 334$

32) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύουν :

$$f'(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } \int_0^2 (f'(x) + xf''(x)) = -2$$

a) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ με τον άξονα x'

b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \int_1^x f(t)dt$ είναι κοίλη

c) Να αποδείξετε ότι :

$$\int_1^3 f(x)dx < 2 \int_1^2 f(x)dx$$

Θεώρημα Fermat

33) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_1^x xf(t)dt \leq e^x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$a) \int_0^1 f(t)dt \quad b) \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

34) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(0)=1$ για την οποία ισχύει :

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$

35) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_x^{x+1} f(t)dt \leq x^2 + \int_0^1 f(t)dt \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

36) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_{2x}^{x^2} f(t)dt \leq 2x^2(e^{x-2} - 1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 1$

37) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο 0, με $f'(0) = 2$, για την οποία ισχύει :

$$\int_0^x f(t)dt \leq x^3 - x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε :

a) Την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$

b) Το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$$

Συνδυασμός θεωρημάτων

38) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει :

$$e^{2x} \leq 1 + \int_0^x f(t)dt \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

a) Να βρείτε την τιμή $f(0)$

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\int_1^x f(t)dt = 3 \int_x^2 f(t)dt$$

Έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$

39) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_1^x f(t)dt \leq x^3 - 3x + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

a) Να βρείτε την τιμή $f(1)$

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f^2(x) = f'(x) \int_x^0 f(t)dt$$

Έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$

1.6 Υπολογισμός εμβαδού επίπεδου χωρίου

- αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$

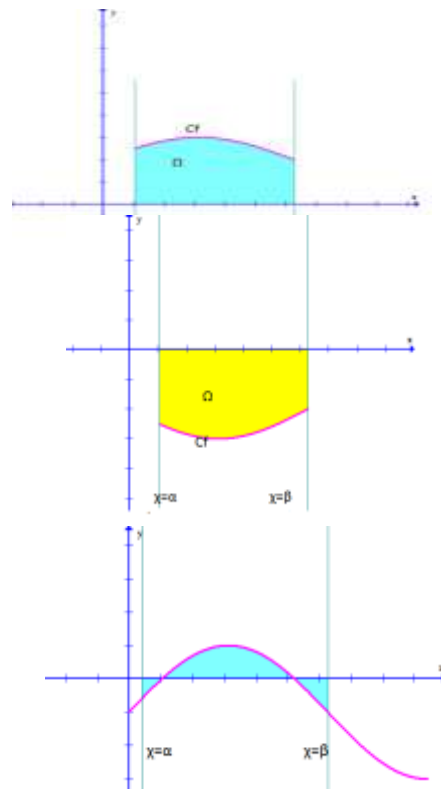
$$E = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

- αν $f(x) \leq 0$ στο $[\alpha, \beta]$

$$E = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

- αν η $f(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$$



Σε αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε το πρόσημο της $f(x)$ και σπάμε το ολοκλήρωμα, όπως στο παρακάτω παράδειγμα

Π.χ

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = 3x^2 - 6x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=4$

Λύση:

Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

Βρίσκω το πρόσημο της $f(x)$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$	

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^4 |f(x)| dx = - \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = - \int_0^2 (3x^2 - 6x) dx + \int_2^4 (3x^2 - 6x) dx = \dots$$

$$= 24$$

Σημείωση:

1. Αν στο χωρίο που ζητείται δίνεται η ευθεία $x=a$ και ο άξονας $y'y$ τότε η άλλη ευθεία είναι η $x=0$
2. Αν στο χωρίο που ζητείται δεν μας δίνουν καμία ευθεία, λύνουμε την $f(x)=0$ και οι ευθείες θα είναι $x=a$ και $x=b$ όπου a, b είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (οι δύο μικρότερες)
3. Το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g και των ευθειών $x=a$ και $x=b$ δίνεται από τον τύπο

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

4. Το εμβαδό είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός

Εμβαδό μεταξύ C_f και εφαπτομένης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$

- α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ευθεία (ϵ) και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Λύση :

- α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2$

$$f(2) = 2, f'(2) = 2$$

Η εφαπτομένη θα είναι : $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

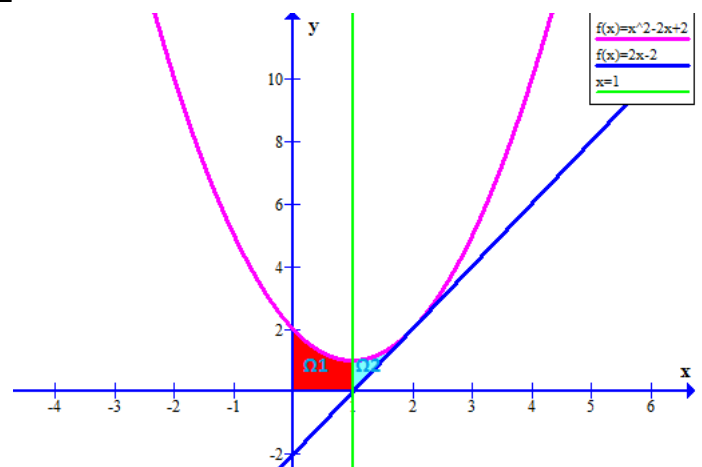
Άρα $y - 2 = 2(x - 2)$ οπότε $y = 2x - 2$

- β) Σύμφωνα με το διπλανό σχήμα

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = E(\Omega_1) + E(\Omega_2)$$

$$E = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 [f(x) - (2x - 2)] dx$$



$$E = \dots = \frac{5}{3}$$

Όριο εμβαδού

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 + 13x - 5}{x^2 - 3x + 2}$. Να βρείτε :

- a) Την ασύμπτωτη ευθεία (ε) της C_f στο $+\infty$
- b) Το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία (ε) και τις ευθείες με εξισώσεις $x=3$ και $x=\lambda$, $\lambda > 3$
- c) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(\lambda)$

Λύση:

a) η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

έχουμε :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 9x^2 + 13x - 5}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \dots = -3$

Άρα η ζητούμενη ασύμπτωτη είναι (ε) : $y = 2x - 3$

b) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \int_3^\lambda |f(x) - (2x - 3)| dx = \dots = \int_3^\lambda \left| \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right| dx = \int_3^\lambda \left| \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right| dx \\ &= (x > 3) = \int_3^\lambda \frac{1}{x-2} dx - \int_3^\lambda \frac{1}{x-1} dx = [\ln|x-2| - \ln|x-1|]_3^\lambda \\ &= \ln(\lambda - 2) - \ln(\lambda - 1) + \ln 2 \end{aligned}$$

c) Έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(\lambda - 2) - \ln(\lambda - 1) + \ln 2) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1} + \ln 2 \right) = \ln 2$$

Εμβαδόν που περικλείεται από τρεις ή περισσότερες γραφικές παραστάσεις

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$, με $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x}$, με $x \geq 0$ και $h(x) = \frac{3x-4}{4}$, $x \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g, C_h

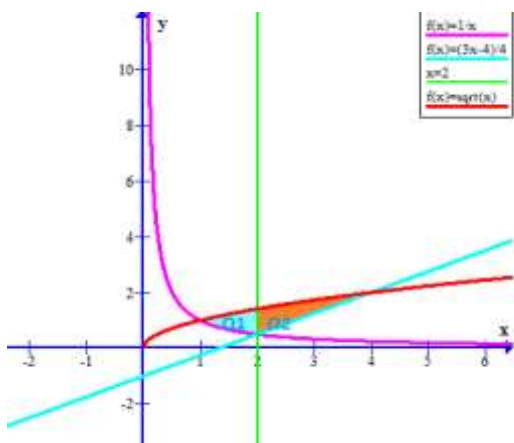
Λύση:

Λύνουμε τις εξισώσεις: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1$

$g(x) = h(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = \frac{4}{9}$ (απορ)

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -\frac{2}{3}$ (απορ)

Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα το ζητούμενο εμβαδόν είναι :



Μεθοδολογία :

Για να βρούμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που σχηματίζεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών συναρτήσεων :

- Βρίσκουμε τα σημεία που τέμνονται ανά δυο
- Σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις στο ίδιο σύστημα αξόνων
- Χωρίζουμε το χωρίο Ω με ευθείες κάθετες στον x' σε επιμέρους χωρία τα οποία σχηματίζονται από δύο μόνο γραφικές παραστάσεις
- Υπολογίζουμε το εμβαδόν καθενός από τα παραπάνω χωρία και το άθροισμά τους είναι το ζητούμενο εμβαδόν

$$\begin{aligned}
 E &= E(\Omega_1) + E(\Omega_2) \\
 &= \int_1^2 (g(x) - f(x)) dx + \int_2^4 (g(x) - h(x)) dx \\
 &= \dots = \frac{13}{6} - \ln 2
 \end{aligned}$$

Διαχωρισμός χωρίου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y=4$. Να βρείτε οριζόντια ευθεία $y = \lambda^2, \lambda > 0$, που να χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία

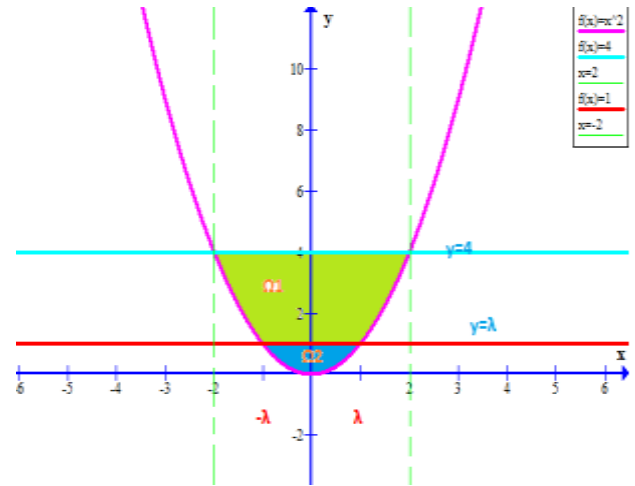
Λύση:

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα το Ω είναι η ένωση των Ω_1 και Ω_2

$$\text{Πρέπει } E(\Omega_2) = \frac{E(\Omega)}{2} \quad (1)$$

$$E(\Omega) = \int_{-2}^2 [4 - x^2] dx = \dots = \frac{32}{3}$$

$$E(\Omega_2) = \int_{-\lambda}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2) dx = \frac{4\lambda^3}{3}$$



Λόγω της (1) έχουμε

$$\frac{4\lambda^3}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow \lambda = \sqrt[3]{4}$$

Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι :

$$y = \sqrt[3]{16}$$

Εμβαδόν και αντίστροφη συνάρτηση

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Η f είναι και 1-1, οπότε ορίζεται η f^{-1}

- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον x' x και τις ευθείες $x=f(\alpha)$ και $x=f(\beta)$

$$E = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} |f^{-1}(x)| dx$$

Αν θέσουμε $x = f(u)$, προκύπτει ότι :

$$E = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} |f^{-1}(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} |f^{-1}(f(u))| f'(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} |u| f'(u) du = \dots$$

- Επειδή οι $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$, το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται μεταξύ των $C_f, C_{f^{-1}}$, είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και της ευθείας $y=x$

$$E(\Omega) = 2 \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - x| dx$$

Εφαρμογή

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \sin x$

- a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
- b) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x και τις ευθείες $x=-1$ και $x=\pi+1$
- c) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f , $C_{f^{-1}}$

Λύση:

- a) Για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ είναι $f'(x) = 1 + \eta\mu x \geq 0$

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = \frac{3\pi}{2}$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2\pi]$.

Συνεπώς η f είναι

1-1

- b) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_{-1}^{\pi+1} |f^{-1}(x)| dx$$

Θέτουμε $x = f(u)$ οπότε $dx = f'(u)du$

- Για $x=-1$ είναι $f(u) = -1 \Leftrightarrow f(u) = f(0) \Leftrightarrow u = 0$
- Για $x=\pi+1$ είναι $f(u) = \pi + 1 \Leftrightarrow f(u) = f(\pi) \Leftrightarrow u = \pi$

Επομένως :

$$E = \int_0^{\pi} |f^{-1}(f(u))| f'(u) du = \int_0^{\pi} |u| (1 + \eta\mu u) du = \int_0^{\pi} (u + u\eta\mu u) du = \dots = \frac{\pi^2}{2} + \pi$$

- c) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=x$ έχουμε :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x - \sin x = x \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{3\pi}{2}$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |f(x) - x| dx = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |-\sin x| dx = \dots = 4$$

Ασκήσεις στο εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Εμβαδόν μεταξύ C_f και $x'x$

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=-1$ και $x=2$
- 2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 e^x$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$
- 3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$
- 4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1, x \in \mathbb{R}$
 - a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 - b) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$
- 5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$
- 6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 3) \ln x, x > 0$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον άξονα $x'x$
- 7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - 3x^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται :
 - a) Από τη C_f και τον άξονα $x'x$
 - b) Από τη C_f , την ευθεία $x=2$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- 8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x}$, με $x > 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται :
 - i) Από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$
 - ii) Από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=4$
- 9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 4)e^{-x}$, με $x \in \mathbb{R}$, Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία είναι $-1 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq f(x)$
- 10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$
 - a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
 - b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2$ και $x=5$
- 11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}, x > 0$
 - a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

- b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=4$

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x - 1$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$

13) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής
b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=e$

14) Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & \text{αν } x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$$

- a) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι: $\alpha = -\frac{1}{9}$
b) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(4, f(4))$
c) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$

15) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 2(\ln x)^2 - 5 \ln x + 2$

- a) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
b) Να μελετήσετε την f προς την μονοτονία και τα ακρότατα
c) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
d) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τον $x'x$.

16) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $x=1$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

Εμβαδόν μεταξύ C_f και C_g

17) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4x - 5$ και $g(x) = x + 1$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τη C_g και τις ευθείες $x=-2$ και $x=2$

- 18) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 2x - 1$ και τον άξονα $y'y$
- 19) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^3 - 2x$ και $g(x) = 2x - x^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g
- 20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 1)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $y = \ln 3$
- 21) α) Να αποδείξετε ότι $e^{3x} \geq x + 1$ για κάθε $x \geq 0$
 β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-2x}(x + 1)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τη C_g τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$

Εμβαδόν μεταξύ C_f και εφαπτομένης

- 22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 - x + 2$
 α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο $M(-1, f(-1))$
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την (ϵ) και τον άξονα $x'x$
- 23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 5$
 α) Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): $x - 2y + 11 = 0$
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία (ϵ) και τον άξονα $y'y$
- 24) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
 α) Να βρείτε την εφαπτομένη της (ϵ) της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$
 β) Να αποδείξετε ότι η (ϵ) τέμνει τη C_f σε σημείο N , το οποίο και να βρείτε
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία (ϵ)
- 25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, όπου $x \in \mathbb{R}$
 α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(0, f(0))$ της γραφικής παράστασης της f
 β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$ και $y=1$

- c) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει η ανισότητα $\eta\mu x > x - \frac{3}{2}x^2$

Περισσότερες από δύο συναρτήσεις

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x, x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $y'y$ και τις ευθείες $y=2$ και $y=4$.

27) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x - 2$ και $h(x) = -x + 2$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, με $x \geq 0$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $y = 1$ και $y = -x + 3$

Διαχωρισμός χωρίου

29) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$, και έστω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x = e^2$. Να βρείτε ευθεία $x=\lambda$ η οποία να χωρίζει το Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία

30) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2}, x > 0$

- a) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη (ε) στο $+\infty$, την οποία να βρείτε
b) Θεωρούμε το ορθογώνιο που σχηματίζεται από τις ευθείες (ε), $y=2$, $x=2$ και $x=\lambda$, με $\lambda > 2$.

Να βρείτε για ποια τιμή του λ η C_f χωρίζει το παραπάνω ορθογώνιο σε δυο ισοεμβαδικά χωρία

Όριο εμβαδού

31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$, με $x > 0$. Να βρείτε :

- a) Το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\lambda$, $\lambda > 0$ και $\lambda \neq 1$
b) Τα όρια $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$ και $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$

32) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{6x^3+1}{2x^2}$

- a) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ασύμπτωτη την ίδια ευθεία (ε), την οποία και να βρείτε
b) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία (ε) και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$, $x=\alpha$ με $\alpha > 1$
c) Να βρείτε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$

33) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$ με $\lambda > 0$

- a) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

- b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y=lex$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M
- c) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου το οποίο περικλείεται μεταξύ της C_f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$ είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$
- d) Να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$

Εμβαδόν και αντίστροφη συνάρτηση

34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 3$

- a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
- b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$, την ευθεία $x=-6$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1
- b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$

- a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
- b) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και $C_{f^{-1}}$

1.7 Γενικές ασκήσεις στα ολοκληρώματα

- 1) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2e}{x} + 2\ln x, x > 0$.
 - i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - ii. Να αποδείξετε ότι $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq e^{x-e}$ για κάθε $x > 0$.
 - iii. Αν ισχύει $\left(\frac{x}{e}\right)^x \geq \lambda^{x-e}$ για κάθε $x > 0$ και $\lambda > 0$ τότε να αποδείξετε ότι $\lambda = e$.
 - iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x = e^2$.
- 2) Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x - 1$.
 - i. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e$ και $x=\lambda > 0$.
 - ii. Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$
 - iii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(e^2, f(e^2))$.
 - iv. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τον άξονα $x'x$.
- 3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$.
 - i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 - ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
 - iv. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x) dx$
- 4) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{e}{x} + \ln x + 1, x > 0$.
 - i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .
 - ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
 - iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3^{\xi-1}$.
 - iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e^2$

5) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \lambda x + 3$, $x > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση

$$\varepsilon: y=3x \text{ να υπολογίσετε το } \lambda.$$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x=1$ και $x=e$.

6) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = -2 + \frac{2}{x}$ και $g(x) = 3 \ln x$, όπου $x \in (0, +\infty)$.

i. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) - g(x)$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 1$ και $x = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

iv. Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

7) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3 \ln(x \cdot e^{1-x}) + 2$, $x > 0$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3f(x) + 2011 = 0$.

iv. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2x^4 + 3 \ln x + 2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\lambda^4 = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - 1$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda > 0$.

iv. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^4 f^{-1}(t) dt$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

Επαναληπτικά θέματα

1) Θεωρούμε τη συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη για $x > 0$, για την οποία ισχύει:

$$x(f'(x) - 2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{e^x - e} = \alpha \in \mathbb{R}$$

A. Ναδειχθεί ότι: $f(x) = \ln x + 2x$

B. Ναδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και ναλυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 1$

2) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{8}{x^2}$.

A. Ναμελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B. Ναδειχθεί ότι: $\frac{9}{2} \leq \int_1^4 f(x) dx \leq 27$, χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα.

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

Δ. Να προσδιορίσετε κάθετη στον x' ευθεία, η οποία να χωρίζει το χωρίο του ερωτήματος Γ, σε δύο ίσα μέρη.

3) Δίνεται η παρ/μη συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι :

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

B. Ναδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της f στο $[0, 1]$ και να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον x' και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$.

Δ. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

Ε. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και να βρεθεί η εφαπτομένη της στο $x_0=1$.

ΣΤ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την παραπάνω εφαπτομένη και τις ευθείες $x=1$ και $x=\ln 3$.

4) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$

A. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x-1)=x$

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(t) dt$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^x}$

A. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B. Να δειχθεί ότι ισχύει: $e^{x-1} \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$

Γ. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=a, a < 0$, έχει ακριβώς μια ρίζα κ , η οποία είναι μικρότερη του 1.

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον x' και τις ευθείες $x=\kappa$ και $x=1$, με $0 \leq \kappa \leq 1$.

Ε. Αν $E(\kappa)$ το παραπάνω εμβαδό, να υπολογίσετε το κ για ο οποίο το εμβαδό μεγιστοποιείται.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, που ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f'(x) - f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = \ln 2.$$

A. Να δειχθεί ότι: $f(x) = e^x \ln(e^x + 1)$

B. Σημείο M κινείται πάνω στο θετικό ημιάξονα Ox , με ταχύτητα $U=2\text{cm/sec}$ και η θέση του δίνεται από τη συνάρτηση $g(t)=ut, t \in [0,1]$. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=0$ και $x=g(t)$.

Γ. Ποια χρονική στιγμή ο εμβαδό γίνεται μέγιστο και ποια η μέγιστη τιμή του;

Δ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{2}$ sec.

7) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

B. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1} της f

Δ. Να βρείτε την συνάρτηση g αν ισχύει $f'(x) = f(x)g(x)$

E. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

8) Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \int_1^x f(t) dt + ex - e$$

A. Να δειχθεί ότι: $f(x) = e^x - e$

B. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να δειχθεί ότι $f^{-1}(x) = \ln(x+e), x > -e$

Γ. Να δειχθεί ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον x' και τις ευθείες $x=t$, $x=1-e$, με $t < 1-e$ είναι:

$$E(t) = (t+e)(\ln(t+e)-1)+1$$

Δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{t \rightarrow -e} E(t)$

9) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, με $f(1) = 5$ και $f(3) = -1$.

A. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}[-2 + f^{-1}(x^2 + x + 3)] = 3$.

B. Να λυθεί η ανίσωση $f^2(x) \leq 4f(x) + 5$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(\ln(x+1)) = f(x)$.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν που ορίζεται από την γραφική παράσταση της $g(x) = \ln(x+1) - x$, τον x' και την ευθεία $x=e-1$.

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

β. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$

γ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη $C_{f^{-1}}$ τον άξονα x' και την ευθεία $x = e$.

11) Έστω μία συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$$

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της

B. Να βρείτε την εφαπτόμενη ε της C_f στο σημείο καμπής της

Γ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f την ε και την ευθεία $x = e$.

12) A. Να δείξετε ότι $\ln x < \sqrt{x}$ για κάθε $x > 0$.

B. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

α. Να βρείτε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g , τον άξονα x' και την ευθεία $x = \lambda$, $\lambda > 1$

β. Να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$

13) Έστω $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

A. Να δειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f^{-1}(x)$

Γ. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη ε της C_f στο $+\infty$.

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από: $C_f, \varepsilon, x=2, x=\alpha > 2$.

Ε. Αν το α αυξάνει με ρυθμό μεταβολής 2μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του $E(\alpha)$ όταν $\alpha=3$.

14) Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x \ln x + \frac{x}{2}$.

A. Να εξετάσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, $\alpha > 0$.

B. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

Γ. Να υπολογιστεί το εμβαδό που ορίζεται από την C_f , την παραπάνω εφαπτομένη και την ευθεία $x=\kappa$, $\kappa>1$.

Δ. Αν $E(\kappa)$ το παραπάνω εμβαδό, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} \frac{E(\kappa)}{\kappa}$.

15) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f'(x) - f(x))(x^2 + 1) = 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση έχει στο σημείο $A(0, f(0))$ εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -x + 3$.

A. Να αποδείξετε ότι η f έχει τύπο $f(x) = (x^2 + 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να αποδείξετε ότι δεν μπορεί η ευθεία ε να έχει με τη C_f δύο κοινά σημεία.

Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(t) = \int_0^t f(x)dx$ με $t \geq 0$. Να βρείτε το $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g'(t)}{e^{2t}}$.

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον x' και τις ευθείες $x=0$ και $x=\alpha>0$.

16) Έστω f συνεχής με τον τύπο της f είναι $f(x) = \frac{2x+6}{x+1}$, $x \geq 0$.

A. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον x' και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

B. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f στο διάστημα $[1, 3]$.

Γ. Να αποδείξετε ότι $9e < \int_1^3 e^t f(t)dt < 32e$.

17) Έστω f συνεχής με τον τύπο της f να είναι $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

A. η f παρουσιάζει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο στο $x_0=1$, του οποίου να βρείτε το είδος.

B. ισχύει $x^{\frac{1}{x+1}} \geq e^{1-x}$ για κάθε $x \geq 1$.

Γ. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον x' και τις ευθείες $x=e$ και $x=1$ είναι $E = \frac{e^2}{2} - 1$.

18) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x-\lambda)}{x-\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B. Να βρείτε τη παράγωγο της συνάρτησης $g(x) = [\ln(x-\lambda)]^2$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \lambda+1$, $x = \lambda+4$.

Δ. Να προσδιορίσετε το $\mu \in (1, +\infty)$ ώστε να είναι: $\int_{\lambda+1}^{\lambda+\mu} f(x) dx = 2$

19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + e^x, & \dots\dots x \leq 0 \\ x \ln x, & \dots\dots x > 0 \end{cases}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

A. Να υπολογίσετε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

B. Αν $\alpha = -1$,

i) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

20)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$

A. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{4-x}\right)$

Γ. Να βρεθούν τα όρια της f για $x \rightarrow -\infty$ και $x \rightarrow +\infty$.

Δ. Να μελετηθεί ως προς την κυρτότητα.

21)

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = e^x$ και $\sigma(x) = -x^2 + (2 + e)x - 1$.

A. Να δείξετε ότι το σημείο $A(1, e)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των φ και σ .

B. Να δείξετε ότι ισχύει $\varphi(x) \geq \sigma(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_φ , C_σ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 2$.

Δ. Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(x)}{\varphi(x)}$

22) A. Να αποδείξετε τις ανισώσεις:

- i. $e^x > x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x και
- ii. $\ln x < x$, για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x .

B. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e - x(\ln x - 1)$, $x > 0$

α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

β. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ ώστε

$$f(x_0) = 0$$

γ. Να δείξετε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = e^x$, $h(x) = \ln x$ και τις ευθείες $x = x_0$ και $x = 1$, όπου x_0 ο αριθμός του β ερωτήματος, είναι ίσο με 1 τ.μ.

23) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x^2+1}$.

A. Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει

$$f(x_0) = 2008$$

B. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και την ευθεία $x = 1$.

Γ. Δείξτε ότι $\int_{-1}^0 |f(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx$.

Δ. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

Ε. Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f την εφαπτομένης της στο σημείο $A(1, f(1))$ και τον άξονα $y'y$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1}{|x|}, & \dots x \neq 0 \\ 0, & \dots x = 0 \end{cases}$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Β. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδό $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, $\lambda > 0$.

Δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

25)

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$$f(1) = 0 \text{ και } xf'(x) - 2f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Β. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 - x$

26) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με $f'(x) = g'(x) + 2$ και $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμη ότι οι ευθείες $y = 2x + 5$ και $y = -5$ είναι ασύμπτωτες των C_f και C_g αντίστοιχα όταν $x \rightarrow +\infty$.

Α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 5}{f(x) - 2x - 5}$.

Β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ. Να δείξετε ότι $f(x) = g(x) + 2x + 10$.

Δ. Αν $g(x) = e^{-x} - 5$ να βρεθεί το ολοκλήρωμα $K = \int f(x)e^x dx$.

27)

Έστω η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - e^{-x^2}$

Α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της .

Γ. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Δ. Έστω $g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)$

Να δείξετε ότι $g(x) = 0$, για κάθε $x > 0$.

28) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$, η $g(x)$ γίνεται ελάχιστη στο σημείο $A\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$.

Να δείξετε ότι:

A. $g'(x)g(x) - f'(x)f(x) = x$ για κάθε $x > 0$.

Β. Η εφαπτομένη ευθεία (ε) της γραφικής παράστασης της f στο A είναι κάθετη στην ευθεία OA , όπου O η αρχή των αξόνων.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) του β ερωτήματος.

Δ. Αν επιπλέον ισχύει

$$f'(x) \cdot e^{e \cdot f(x) + 1} = c$$

για κάθε $x > 0$ και c κάποιο σταθερό πραγματικό αριθμό τότε:

i. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{e}$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f την ευθεία (ε) του β ερωτήματος, την $x = 1$ και τον x' .

29) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in [0, 1]$ να ισχύει

$$f^{2007}(x) + 2006f(x) = 2007x$$

A. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f .

B. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$

Δ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = \frac{x^{2007} + 2006x}{2007}$, για κάθε πραγματικό αριθμό x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Ε. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $f^{-1}(x) = u$ να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 f^{-1}(x) dx = 1 - \int_0^1 f(x) dx$$

ΣΤ. Να δείξετε ότι $f(x) > x$, για κάθε πραγματικό αριθμό $x \in (0, 1)$.

Ζ. Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} να δείξετε ότι:

$$E(\Omega) = \frac{1001}{1002 \cdot 2003}$$

30) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \in (1, +\infty)$

A. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

B. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2009$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Δ. Έστω

$$\Pi = \int_2^e f(x) dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x) dx$$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \Pi - 2 \ln 2$.

31) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f^2(t)} dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι ισχύει $f'(x) = f(x)$.

B. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = (f(x) + f'(x)) e^{-x} \text{ και } h(x) = (f(x) - f'(x)) e^x$$

Να δείξετε ότι οι φ και h είναι σταθερές στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τους τύπους τους.

Γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Δ. Ένα κινητό κινείται πάνω στη C_f . Τη χρονική στιγμή $t_0 > 0$ που διέρχεται από το σημείο $A(1, f(1))$, η τεταγμένη του μειώνεται με ρυθμό 5 μονάδες/second. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 .

32) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + x - 1$

A. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$.

Δ. Με δεδομένο ότι η $f^{-1}(x)$ είναι συνεχής, να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_1^3 f^{-1}(x) dx$$

33) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 2008$, για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

A. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

B. Να δείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_x^{x+m} f(t) dt = mf(x) + \int_0^m f(t) dt$$

Γ. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = f'(0)$.

Δ. Να βρείτε την f .

34) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2 \ln(x+1)$

A. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(x+1)^{x+1} = \frac{x}{2}$ στο $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τους άξονες και την ευθεία $x = 1$.

35) Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι:

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x g(t)dt + x^2 - 2x + 1$$

A. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

B. Αν η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες x_1, x_2 , με

$x_1 < 1 < x_2$, να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (x_1, x_2)$.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 2$.

36) Έστω $f(x) = e^x - \alpha x - 1, \alpha > 1, x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο $(0, f(0))$

B. Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο το οποίο είναι αρνητικό.

Γ. Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις $C_f, (\varepsilon)$ και $x = \alpha > 1$.

i) Να δειχθεί ότι $2E(\alpha) = 2e^\alpha - \alpha^3 - \alpha - 1$

ii) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} E(\alpha)$

37) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και ισχύει $\ln f(x) + e^{f(x)} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

B. Αποδείξτε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = 1$ και $f(x) = e$.

Δ. Υπολογίστε το άθροισμα

$$I = \int_1^e f^{-1}(x)dx + \int_e^{e^e+1} f(x)dx.$$

38) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, +\infty)$ με $f(x) \geq 1$ και $f(x) - \ln f(x) = x$, για κάθε $x \geq 1$

A. Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

B. Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = e$

Γ. Να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ. Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της f .

Ε. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της $C_{f^{-1}}$, της διχοτόμου του πρώτου τεταρτημορίου και της ευθείας $x = e$.

39) Δίνονται οι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν

$$f(x) = 3e^{3e^x - 1 + x - f(x)}, x \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 2 \quad \text{και} \quad g'(x) = 2g(x) - 2, x \in \mathbb{R}$$

και η γραφική παράσταση της g τέμνει τον y στο ίδιο σημείο που τέμνει και η f , ενώ βρίσκεται όλη πάνω από την ευθεία $y=1$.

A. Ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες.

B. Ναδειχθεί ότι $f(x) = 3e^x - 1$ και $g(x) = e^{2x} + 1$

Γ. Ναδειχθεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο κοινά σημεία.

Δ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g .

40) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x \ln x, x > 0$ και έστω $\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$.

Δίνεται ακόμη η τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ συνάρτηση g , με θετικές τιμές στο διάστημα $(0,1)$, για την οποία ισχύουν

$$\int_0^2 g(x) dx < 0, \quad g(\alpha) = 0 \quad \text{και} \quad g'(0) = 0$$

Δίνεται ακόμη συνάρτηση $f: [\alpha, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e x^2} \int_0^x g(t) dt & x > \alpha \\ 0 & x = \alpha \end{cases}$$

A. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f .

B. Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\rho \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$.

Γ. Ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

Δ. Ναδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

41) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(R) = R$ για την οποία ισχύει

$$f^5(x) + f^3(x) = 5, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Ναδειχθεί ότι η f είναι 1-1.

Β. Να βρεθεί η αντίστροφη της f .

Γ. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f .

Δ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Ε. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ΣΤ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

42) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t)=2t+\mu$, $t \in \mathbb{R}$ και $\mu \in \mathbb{R}$. Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε χιλιάδες € με τύπο $E(t)=(t-1)\varphi(t)$, $t \geq 0$, όπου t ο χρόνος σε έτη. Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ της επιχείρησης δίνεται από τον τύπο $K(t)=\varphi(t+4)$, $t \geq 0$.

Α. Να βρείτε τη συνάρτηση του κέρδους $P(t)$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίαζε ζημιά δώδεκα χιλιάδες €.

Β. Ποια χρονική στιγμή η επιχείρηση αρχίζει να παρουσιάζει κέρδη;

Γ. Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συν του κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

Δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος

$$I = \frac{111}{2} \int_0^6 P(t) dt$$

43) Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

i) $f(1)=0$

ii) $2f(x)-xf'(x)=x$, $x>0$

Α. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Β. Να βρείτε τον τύπο της f .

Γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt}{\ln^2 x}$

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{2}$ και $x = 2$.

44) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

i) είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

ii) $f(x) = e^{-f(x)}(e^x - 1)$

iii) $f(0) = 0$

A. Να δειχθεί ότι:

α) $e^x > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 e^{-x} f'(x) e^{f(x)} dx$$

45) Έστω f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις, με f γνησίως αύξουσα και g γνησίως φθίνουσα και $\int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 g(t) dt$.

Αν $\int_0^x f(t) dt + \int_2^{2-x} g(t) dt \geq x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

A. Δείξτε ότι οι C_f και C_g τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη στο $(0, 2)$.

B. Να δειχθεί ότι $f(0) + f(2) = g(0) + g(2)$.

Γ. i) Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_1 \in (0, 2)$: $f(x_1) = g(2 - x_1)$.

ii) Να δειχθεί ότι υπάρχει $x_2 \in (0, 2)$: $f(x_2) + g'(2 - x_2) = 2$.

46) Δίνεται ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x - x \ln x & \dots \dots \dots x > 0 \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h - \alpha}{2} \varepsilon \phi \frac{\pi h}{2\alpha} \right) & \dots \dots x = 0, \alpha \neq 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

A. Να βρεθεί ο αριθμός α .

B. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η f και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Γ. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f του $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = e$.

47) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε το $f(0)$

B. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Γ. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$

Δ. Να βρείτε την αντίστροφη της f

E. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{x-1}{2}\right) = x - 1$

ΣΤ. Να βρείτε το εμβαδόν που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

48) Για τις συνεχές συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνωστό ότι

$$f^2(x) + 1 \leq 2f(x) \sin x + \eta \mu^2 x$$

$$g(x) = x^2 + \eta \mu^2 x + 1 + f^2(x)$$

A. Να δειχθεί ότι $f(x) = \sin x$ και $g(x) = x^2 + 2$

B. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

Γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

49) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - \eta \mu x$

A. Να δείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

B. Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f^{-1}(x) dx$.

Γ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{x^2 + 1}$.

50) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$2f^3(x) + 3f(x) = x + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- A.** Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
B. Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η f^{-1}
Γ. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1} .
Δ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-5, 0)$.
E. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0 = 1$

51) Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x+y) = e^y f(x) + e^x f(y) \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Να δείξετε ότι :

A. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$ εφάπτεται και στην C_g , όπου $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

B. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = f(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$.

52) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(0) = 0 \text{ και } f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να δειχθεί ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι δεν έχει σημεία καμπής.

Δ2. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$.

Δ3. Να δειχθεί ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x < f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Δ4. Αν E το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τις ευθείες $x'x, y'y$ και $x = 1$, να δειχθεί ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1)$.

53) Αν $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^v x}{\eta\mu^v x + \sigma\upsilon\nu^v x} dx$ και $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^v x}{\eta\mu^v x + \sigma\upsilon\nu^v x} dx, v \in \mathbb{N}^*$, τότε :

- i) Να αποδείξετε ότι $A=B$
 ii) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $A+B, A, B$

54) Έστω το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\phi^v x} dx, \mathbb{N}^*$

- i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $v > 2$ ισχύει $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$
 ii) Να υπολογίσετε το I_5

55) Έστω η συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ συνάρτηση f

- i) Να αποδείξετε ότι θα υπάρχουν m, M ώστε :

$$m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq M(\beta - \alpha)$$

- ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

- iii) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$, με $x > 0$

Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f

56) Δίνεται η ορθή γωνία $\chi O \gamma$ και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m του οποίου τα άκρα ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές $o\gamma$ και $o\chi$ αντιστοίχως

Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $u=2\text{m/sec}$ και η θέση του πάνω στον άξονα $O\chi$ δίνεται από τη συνάρτηση $s(t)=ut$ με $t \in [0,5]$, όπου t ο χρόνος σε sec

- i) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB σαν συνάρτηση του χρόνου
 ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OA είναι 6m

57) Ένα κινητό κινείται σε ελλειπτική τροχιά με εξίσωση $4x^2 + y^2 = 4$. Καθώς περνάει από το σημείο $A(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ η τετμημένη του χ ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y , τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

58) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$

- i) Να βρείτε το σημείο τομής A της εφαπτομένης ϵ της C_f στο $M(\alpha, f(\alpha))$ με τον άξονα $\chi'\chi$
 ii) Έστω ότι ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της C_f . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ του M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=2\alpha(t)$ να βρείτε:

A. το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου τομής A της εφαπτομένης της C_f στο M με τον άξονα $\chi'\chi$ τη χρονική στιγμή που το M έχει τετμημένη e

B. Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον $\chi'\chi$ την ίδια χρονική στιγμή με το ερώτημα A.

Ερωτήσεις Θεωρίας

Ερωτήσεις θεωρίας – αποδείξεις – ορισμοί

- 1) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A (x_0, f(x_0))$.
- 2) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- 3) Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0 .

Στήλη Α συναρτήσεις	Στήλη Β εφαπτόμενες
α. $f(x) = 3x^3, \quad x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x) = \eta\mu 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$	2. $y = \frac{1}{4}x + 1$
γ. $f(x) = 3 x , \quad x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

- 4) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$
- 5) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$.
- 6) Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- 7) Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;
- 8) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$
- 9) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- 10) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν
 - η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
 - $f(\alpha) \neq f(\beta)$
 δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.
- 11) Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;
- 12) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

Να αποδείξετε ότι:

 - Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
 - Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
- 13) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;
- 14) Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
- 15) Πότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;
- 16) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση, $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- 17) Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;
- 18) Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

19) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

20) Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$

21) Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

22) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

23) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

24) Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

25) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

26) Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

27) Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

28) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού(Θ.Μ.Τ.)

29) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;

30) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

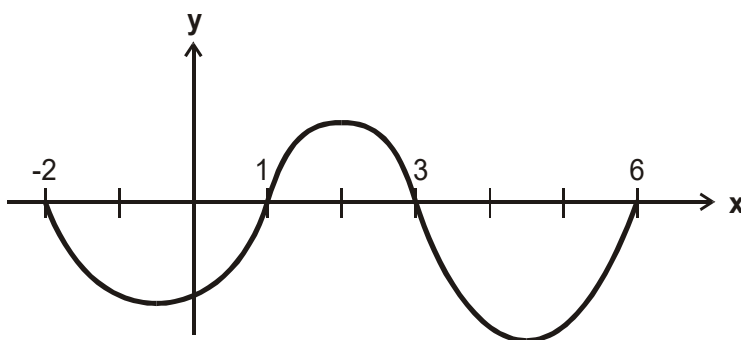
Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ

31) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;

32) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A .. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

33) Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

- 34) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;
- 35) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
- 36) Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;
- 37) Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
- 38) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .
- Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .
 - Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f ;
- 39) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[-2, 6]$.



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

- 40) Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

- $\int_a^b \lambda f(x) dx = \dots$
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \dots$
- $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \dots$
όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$

41) Να βρείτε τη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f''(x) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της $A(0,3)$ έχει κλίση 2.

42) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\alpha) \int_0^1 (e^x + x) dx =$$

$$\beta) \int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) dx =$$

43) Πότε μία ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

44) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

45) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

46) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται “1-1”;

47) Να αποδείξετε ότι: $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$.

48) Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

49) Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

50) Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

51) Έστω μία συνεχής συνάρτηση f σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$

- 52) Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;
- 53) Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;
- 54) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.
- 55) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ του πεδίου ορισμού της;
- 56) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;
- 57) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
- 58) Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- 59) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.
- 60) Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;
- 61) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (a, b) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, b)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (a, b)
- 62) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.
- 63) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;
- 64) Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Ερωτήσεις Σωστού Λάθους

Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος

- 1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0
- 2) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- 3) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0
- 4) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$ τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή
- 5) Κάθε συνάρτηση που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη
- 6) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
- 7) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε

$$\int f(x) dx = x \cdot f(x) - \int x \cdot f'(x) dx$$
- 8) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- 9) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ
- 10) Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ισχύει $\int f'(x) dx = f(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
- 11) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση
- 12) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0
- 13) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$
- 14) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0)$
- 15) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
- 16) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$
- 17) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$ τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$
- 18) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))$
- 19) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}

- 20) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = +\infty$
- 21) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(a)$ για κάθε $x \in \Delta$
- 22) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- 23) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- 24) Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$
- 25) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .
- 26) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0
- 27) Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε $\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.
- 28) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = 0$
- 29) Αν μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει :
 $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$
- 30) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- 31) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x
- 32) Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$
- 33) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- 34) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$
- 35) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη σε αυτό
- 36) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$ και τον άξονα x' είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- 37) Έστω η συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .

- 38) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$
- 39) $(\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$
- 40) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
- 41) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 42) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right) = 1$
- 43) Οι γραφικές παραστάσεις C και $C_{f^{-1}}$ των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς τις γωνίες χ ογ και χ ’ογ’
- 44) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
- 45) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x .
- 46) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$
- 47) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- 48) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- 49) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$
- 50) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sin x)' = \cos x$.
- 51) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.
- 52) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ τότε η παράγωγος της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ
- 53) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει :
- $$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$
- 54) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι και το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
- 55) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

- 56) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- 57) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- 58) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- 59) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
- 60) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
- 61) $(\sigma \varphi x)' = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x | \eta \mu x \neq 0\}$
- 62) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .
- 63) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
- 64) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$
- 65) Για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon \varphi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- 66) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$
- 67) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0
- 68) $(\sin x)' = \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$
 Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$
- 69) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ .
- 70) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- 71) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- 72) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$
- 73) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- 74) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$
- 75) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- 76) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- 77) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$

- 78) Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.
- 79) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .
- 80) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
- 81) Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.
- 82) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .
- 83) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.
- 84) Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.
- 85) Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 86) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- 87) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.
- 88) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (g(x))$.
- 89) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y = x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} .
- 90) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι ένα σημείο του Δ , τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) - f(\alpha)$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 91) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- 92) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$.
- 93) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
- 94) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- 95) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
- 96) Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- 97) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- 98) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$
- 99) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
- 100) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.
- 101) Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
- 102) Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2\eta\mu x + \frac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$, όπου $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
- 103) Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
- 104) Αν $\int_a^b f(t) dt \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- 105) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- 106) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- 107) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.
- 108) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
- 109) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- 110) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ και ορίζονται οι συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες. Μονάδες 2
- 111) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\angle O\gamma$ και $\angle O\gamma'$.
- 112) Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$, εφόσον $f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0 , με $k \in \mathbb{N}$ και $k \geq 2$.
- 113) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- 114) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- 115) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.
- 116) Αν η συνάρτηση f έχει παράγουσα σε ένα διάστημα Δ και $\lambda \in \mathbb{R}^*$, τότε ισχύει:

$$\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$$

117) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

118) Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

119) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

120) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a)$$

121) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

122) Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g'(x) dx$$

123) Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε $\left(\int_a^x f(t) dt\right)' = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

124) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου $A = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

125) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

126) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

127) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαιπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

128) Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t) dt$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

129) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ και ξ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

130) Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

131) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

132) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \epsilon \phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο

$$\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\} \text{ και ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

133) Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει

$\int f'(x)dx = f(x) + c, x \in \Delta$ όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

- 134) Αν $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$
- 135) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof , τότε πάντοτε ισχύει $\text{fog} = \text{gof}$
- 136) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
- 137) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \geq 0$
- 138) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$
- 139) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.
- 140) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- 141) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- 142) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .
- 143) Αν είναι $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = 0$
- 144) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- 145) Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
- 146) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$
- 147) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- 148) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .
- 149) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ ισχύει η ισοδυναμία $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$
- 150) Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0$.
- 151) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .
- 152) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
- 153) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- 154) Υπάρχει πολωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

Θέματα Β

Θέματα τύπου Β

- 1) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:
- α. η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.
- β. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$
- γ. υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.
- 2) Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:
- $$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$
- α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$.
- β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.
- 3) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.
- α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.
- 3) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.
- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
- β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

d) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

4) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να 10βρείτε τα σημεία καμπής.

γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

5) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

α. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

β. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45 \text{ και } g(0) = g'(0) = 1, \text{ τότε}$$

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

6) Δίνεται η συνάρτηση $x, f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}, x \in \mathbb{R}$

B1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f .

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

B4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1, B2, B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό)

7) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

8) Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

9) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \cdot \ln(x-1), & x \in (1, 2] \end{cases}$$
 όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-e^{-x+1}}{x-1}$

β. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

γ. Για $\alpha=-1$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα x' .

10) Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο $(0, +\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, \quad x > 0$$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$, $x=e$

11) Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{\frac{1}{2}}^1 f^{-1}(x) dx$

12) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$

Όπου $m \in \mathbb{R}, m > 0$

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

13) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$f(x) = e^x - (x + 1).$$

α. Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

β. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{x+1}}, x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο $\mathbb{R}$.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{f(x)} dx$

γ. Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^x) + f(7^x) < f(6^x) + f(8^x)$

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$

β. Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι

$\alpha = \beta = 3$.

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x) dx$

16) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2 - x) \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

Θέματα Γ

Θέματα τύπου Γ

1. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

- α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση: $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

- α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.
- β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των
- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

- α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.
- β. Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha) = \int_{\alpha}^0 g(x) dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} I(\alpha)$

4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

- α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

- γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι

$$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$$

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$. Όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι $\alpha = e$

B. Για $\alpha = e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ $\beta, \gamma \in$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{\beta-1} + \frac{f(\gamma)-1}{\gamma-2} = 0$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

a) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

b) Να λύσετε την εξίσωση: $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x-2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$

c) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi'\psi$.

d) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 x f(x) dx$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + x \cdot f''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$

b) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

c) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

d) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x - x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1) \ln x - 1$, $x > 0$

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{\ln 2013}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

c) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος b, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2012$

- d) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x > 0$, τον άξονα x' και την ευθεία $x=e$.

9. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

a) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

b) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

10. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

- a) Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.
b) Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1}, x \in \mathbb{R}$$

c) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτη της στο $-\infty$

d) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα x' και την ευθεία $x=1$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.
b) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.
c) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, $x \in \mathbb{R}$
d) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
e) Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.
f) Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος c, να λυθεί η εξίσωση $f(|\eta\mu x + x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x + 3) - f(x)$ όταν $x \in [0, +\infty)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.
b) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
c) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α .

d) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

a) Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

b) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

c) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu 2\theta$.

d) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu 2\theta$.

14. Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει

$$\text{ότι: } f^3(x) + \beta \cdot f(x) + \gamma \cdot f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

a) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

b) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

c) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

15. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

β. υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$

γ. υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu 2x} = 5$$

α. Να βρείτε το $f(0)$.

- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.
- γ. Αν $h(x) = e^{-x} \cdot f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ αντίστοιχα είναι παράλληλες.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

- α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$
- γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$
- δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$

18. Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.
- β. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$
- γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e \cdot \ln x, x > 0$

- α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.
- β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x, x > 0$.

- α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.
- β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)}, & x > 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$
- i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.
- ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3, x > 0$

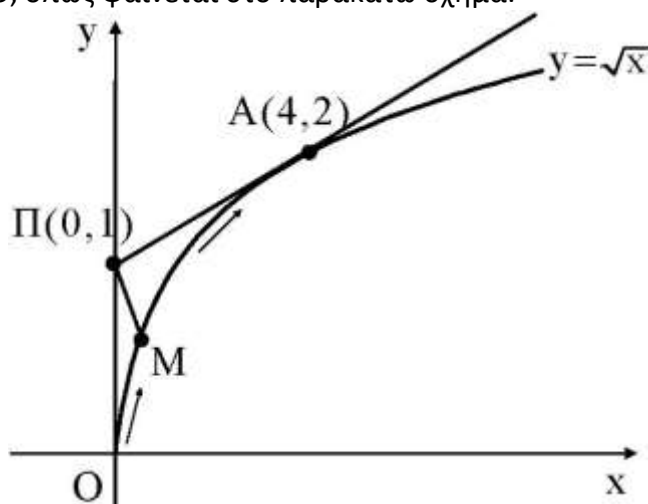
- a) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- c) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

- d) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος c με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$

και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

22. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0, 1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$.

- Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t) = 16t$
- Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4, 2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα PM του παρατηρητή από το σημείο O μέχρι το σημείο A .
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση $d = (PM)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

23. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x + 2), \quad x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός

- A. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

B. Έστω ότι $\lambda = -1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$

24. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

b) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

c) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία λύση.

d) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

25. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $f(1) = \frac{1}{2}$

a) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

b) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος α.

c) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$

d) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3 - \xi} f(t) dt = -\xi(3\xi^2 - 1) \cdot f(\xi^3 - \xi)$$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

a) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

b) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

c) i) Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$

d) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) \cdot \int_2^{\xi} f(t) dt = f(\xi) \cdot (\sqrt{2} - f(\xi))$$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

a) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

b) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x) = \int_1^{h(x)} \sqrt{t^2 - 1} dt$

όπου $h(x) = f(x^2 + 1) - f(2) + 1$

c) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

d) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος **c** ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει

μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο

σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Θέματα Δ

Θέματα τύπου Δ

- 1) Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) $f'(x) = -2f^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

β. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x) \ln 2x)$

- 2) Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_a^b h(x) > \int_a^b g(x)$

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1 \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0.$$

- i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .
- ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$ για κάθε $x > 0$.
- iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1)$

- 3) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) .
- β. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.
- γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

4) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση

$$2f'(x) = e^x - f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

β. Δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha, \ln \alpha)$ με $\alpha > 0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

6) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x, \quad f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x))^2 - 2xf(x)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή.

b. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$

c. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$

7) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

a. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

b. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0$$

Έχει ακριβώς μια λύση, η οποία είναι η $x=0$

- ii) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 < 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq x_0$ με $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$

8) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε και $x \in \mathbb{R}$
- $f(0)=0$.

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

b) i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

c) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right]$

d) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.

9) Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = \pi$
- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta \mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

a) Να δείξετε ότι $f(\pi) = \pi$ και $f'(0) = 1$

b) i) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

c) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x}{f(x)}$

10) Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

- α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .
- β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

11) Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \frac{t-6}{t^2 + \frac{25}{4}}$

- α. Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.
- β. Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.
- γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.
- δ. Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

12) Έστω η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

- α. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f .
- β. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα $[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)} dt = 1$

έχει μία μοναδική λύση στο διάστημα $[0,1]$.

13) Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
- β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

14) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-x}{x^2} = 2005$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0) = 0$

ii. $f'(0) = 1$.

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

ii. $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$

15) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ με $x > 0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

β. Να υπολογίσετε το. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε

$$(\alpha + 1)\alpha = a^{\alpha+1}.$$

16) Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$

a) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

b) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

17) Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και

iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- a) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.
- b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε:
- c) Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x g(x)}$
- d) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 2$
- e) Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι $E(\Omega) = e - \frac{5}{2}$ τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x) dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^\xi f(t) dt = 2$

18) Δίνεται μια συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$, $f'(0) = 2f(0)$

$f(2) = 2f(0) + 12e^4$, $f(1) = e^2$, όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4$

γ. Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$

19) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών

$$f(A) = \mathbb{R}, \text{ τέτοια, ώστε } e^{f(x)}(f^2(x) - 2f(x) + 3) = x$$

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα b και c δίνεται ότι $f^{-1}(x) = e^x(x^2 - 2x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$

b) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x = 1$

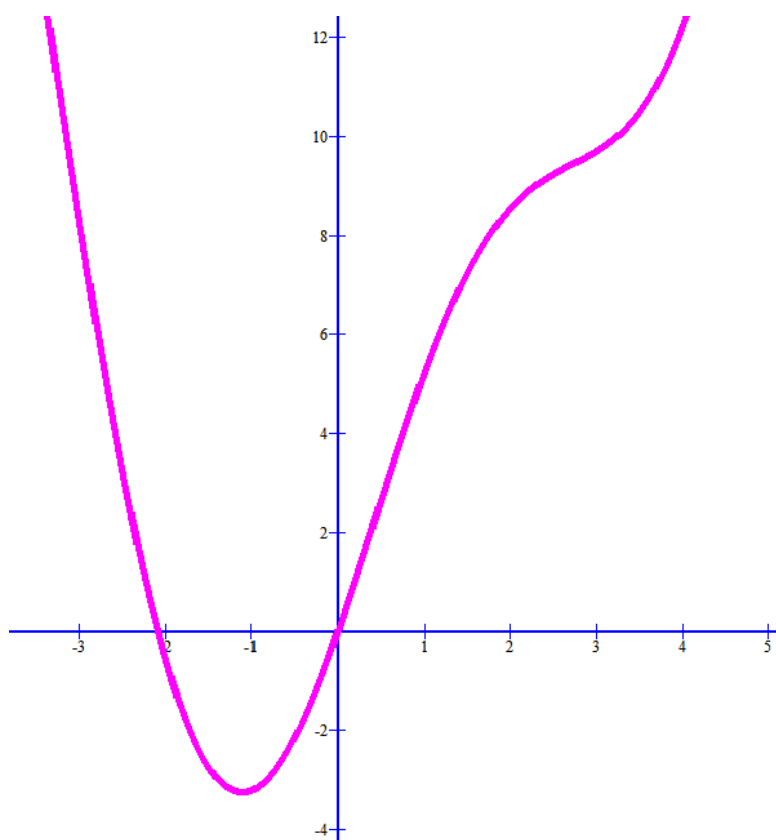
c) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1

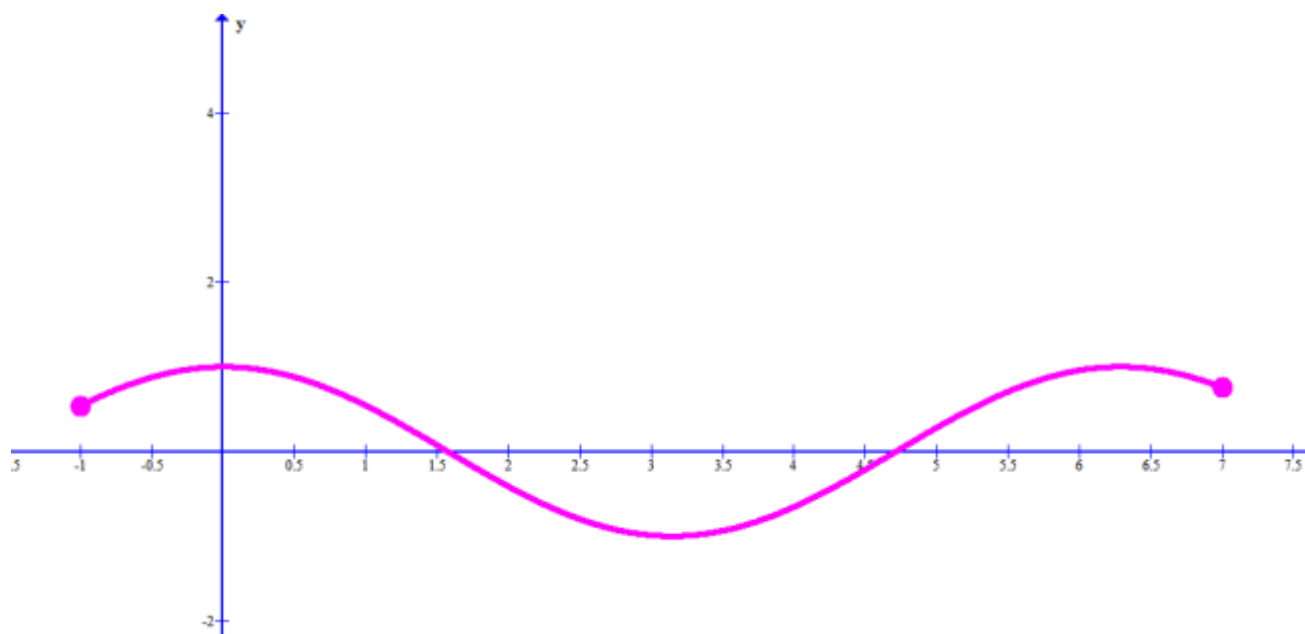
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

Ασκήσεις στην ερμηνεία γραφικών παραστάσεων

- 1) Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα . Να μελετήσετε τις f και g ως προς την μονοτονία τα ακρότατα , την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- i)

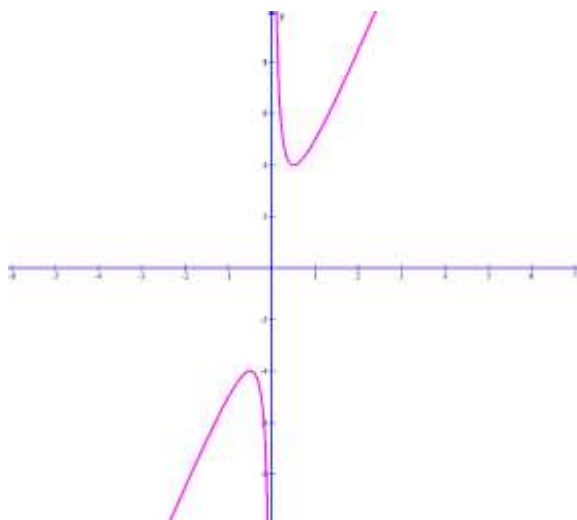
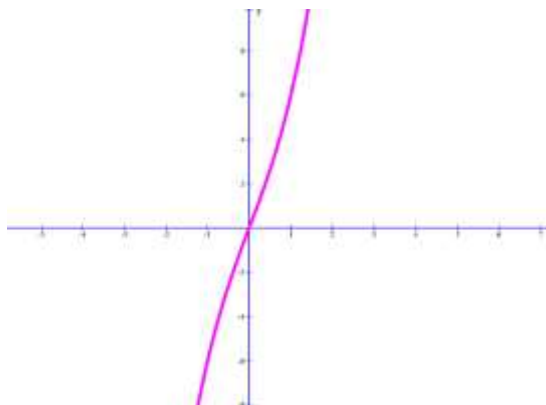
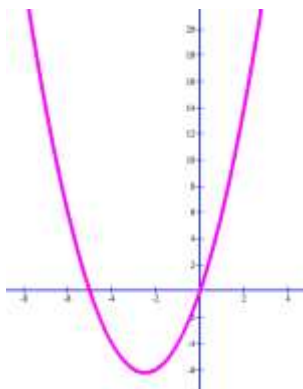


ii)



2) Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις της στήλης Α με τις γραφικές παραστάσεις των παραγώγων τους

Στήλη Α



Στήλη Β

