

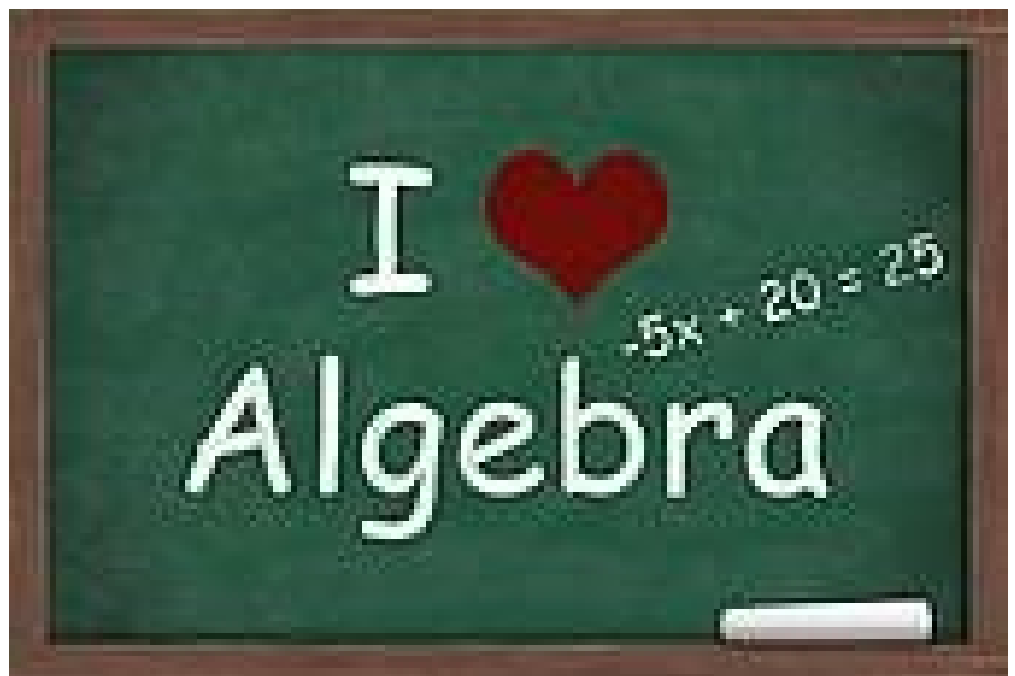
Περιεχόμενα

1. Επανάληψη στις βασικές γνώσεις της Άλγεβρας	9
1.1 Ρητοί αριθμοί	9
Ασκήσεις στις πράξεις Ρητών.....	12
1.2 Δυνάμεις ρητών αριθμών.....	14
Ασκήσεις στις δυνάμεις πραγματικών	15
1.3 Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού	17
Ασκήσεις στην τετραγωνική ρίζα.....	18
2. Πολυώνυμα – ταυτότητες.....	20
2.1 Μονώνυμα – πράξεις με μονώνυμα.....	20
Ασκήσεις στα μονώνυμα	23
2.2 Πολυώνυμα αναγωγή όμοιων όρων.....	26
Ασκήσεις στα πολυώνυμα	27
2.3 Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων	28
Ασκήσεις στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.....	29
2.4 Αξιοσημείωτες ταυτότητες	30
Ασκήσεις στις ταυτότητες.....	33
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	36
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	36
Μονάδες 92.5 Παραγοντοποίηση πολυωνύμων.....	37
2.5 Παραγοντοποίηση πολυωνύμων	38
Ασκήσεις στην παραγοντοποίηση πολυωνύμων	39
2.5 ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ :.....	42
2.6 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	44
ΑΣΚΗΣΕΙΣ :.....	44
2.7 Πρόσθεση – αφαίρεση κλασματικών παραστάσεων.....	45
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	47
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ	47

3. Εξισώσεις.....	49
3.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού.....	49
ΑΣΚΗΣΕΙΣ:	49
3.2 Εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού.....	51
Ασκήσεις στις εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	52
3.3 Τύπος εξισώσεων 2 ^{ου} βαθμού	56
Ασκήσεις στην δευτεροβάθμια εξίσωση.....	57
3.4 Κλασματικές εξισώσεις.....	59
Ασκήσεις στις κλασματικές εξισώσεις	61
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	65
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ	65
4. Συστήματα.....	67
Ασκήσεις στα γραμμικά συστήματα	69
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	71
ΕΝΟΤΗΤΕΣ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ.....	71
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	73
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	73
4. Γεωμετρία.....	77
4.1 Ισότητα τριγώνων.....	77
Ασκήσεις στην ισότητα τριγώνων	81
4.2 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων	84
Ασκήσεις στις αναλογίες.....	87
4.3 Θεώρημα του Θαλή.....	89
Ασκήσεις στο Θεώρημα Θαλή	91
4.4 Όμοια τρίγωνα – λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων	92
Ασκήσεις στα όμοια τρίγωνα.....	93
ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	94
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.....	94

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	96
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.....	96
5. τριγωνομετρία.....	101
5.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$	101
Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς.....	103
5.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών	104
Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών	105
5.3 Τριγωνομετρικές ταυτότητες.....	107
Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές ταυτότητες.....	109
6. Επαναληπτικές Ασκήσεις.....	111
7. Θέματα εξετάσεων	115

Άλγεβρα



1. Επανάληψη στις βασικές γνώσεις της Άλγεβρας

1.1 Ρητοί αριθμοί

Πρόσημα:

(+) συν

(−) μείον

Θετικοί : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο +.

Αρνητικοί : είναι οι αριθμοί που έχουν πρόσημο −.

Το μηδέν : δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός.

Ομόσημοι : είναι οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο .

Ετερόσημοι : είναι οι αριθμοί που έχουν διαφορετικό πρόσημο.

Απόλυτη τιμή : ενός αριθμού είναι ο αριθμός που εκφράζει την απόσταση της τετμημένης του σημείου που παριστάνει τον αριθμό πάνω στον άξονα από την αρχή Ο.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

Πρόσθεση ομόσημων αριθμών :

Για να προσθέσω δύο ομόσημους αριθμούς , γράφω το πρόσημό τους και προσθέτω τις απόλυτες τιμές τους .

Παράδειγμα :

$$(-3) + (-2) = -5$$

Πρόσθεση ετερόσημων αριθμών :

Για να προσθέσω δύο ετερόσημους αριθμούς , γράφω το πρόσημο του αριθμού με τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και αφαιρούμε από την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή την μικρότερη .

Παράδειγμα :

$$(-7) + (+3) = -4$$

Απαλοιφή παρενθέσεων

- Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (+) απαλείφουμε το (+) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς με τα πρόσημά τους
- Όταν μια παρένθεση έχει απέξω (−) τότε απαλείφουμε το (−) μαζί με την παρένθεση ξαναγράφοντας τους αριθμούς με αλλαγμένα πρόσημα

Παράδειγμα :

$$-(2 + 4 + 5) + (1 - 7 + 2) = -2 - 4 - 5 + 1 - 7 + 2 = -16 + 1 = -15$$

Γινόμενο ομόσημων αριθμών

Το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών είναι πάντα θετικός αριθμός

Γινόμενο ετερόσημων αριθμών

Το γινόμενο δύο ετερόσημων αριθμών είναι πάντα αρνητικός αριθμός

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Ένα γινόμενο πολλών παραγόντων είναι:

- Θετικός αριθμός όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι άρτιο.
- Αρνητικός αριθμός όταν το πλήθος των αρνητικών παραγόντων είναι περιττό

$$(+)(+) = + \quad (-)(-) = + \quad (+)(-) = - \quad (-)(+) = -$$

Οι ίδιοι κανόνες ισχύουν και για τη διαίρεση

<i>Ιδιότητες πρόσθεσης</i>		<i>Ιδιότητες πολλαπλασιασμού</i>
$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	<i>Αντιμεταθετική</i>	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	<i>Προσεταιριστική</i>	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
$\alpha + 0 = \alpha$	<i>Ουδέτερο στοιχείο</i>	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
$\alpha + (-\alpha) = 0$	<i>Αντίθετο στοιχείο</i>	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$

<i>Επιμεριστική ιδιότητα</i>
$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Ασκήσεις στις πράξεις Ρητών

1. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) (-2) + (-5) \quad ii) (-13) + (+8) \quad iii) (+14) + (-14) \quad iv) (+13) + (-4)$$

2. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) -13 + 5 + 5 + 13 - 19 \quad ii) -(13 + 4 - 15) + (-3 + 5 + 9) \quad iii) +12 + (-4 - 2 + 15) - 13 + (1 - 3)$$

3. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) (-2)(-3) \quad ii) (-3)(+4) \quad iii) (-1)(-3) + (-2)(+4) \quad iv) (-2)(+3) - (-4)(-5)$$

4. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) -\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) \quad ii) \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right)$$

5. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \quad ii) \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \quad iii) \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right)$$

6. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) (-15) : (+3) \quad ii) (-21) : (-7) \quad iii) (+125) : (-25) \quad iv) (-1024) : (+2)$$

7. Να γίνουν οι πράξεις :

$$i) \frac{\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right)}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} \quad ii) \frac{\left(-\frac{1}{7}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)}{\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(+\frac{2}{3}\right)}$$

8. Να κάνετε τις πράξεις :

$$i) 1 + (-4) - 7 \quad ii) 2 + (5 - 8) - 5 + 4 \quad iii) 1 - 2 + (1 - 4) \quad iv) 5 - 3[4 - (3 - 6)]$$

9. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\begin{array}{lll}
 i) 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) & ii) 1 - 3 \cdot \frac{5}{2} - 5\left(2 - \frac{1}{4}\right) & iii) 2 - \left(1 + \frac{1}{-2}\right) \\
 & & \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) : \left(-\frac{1}{6}\right)
 \end{array}$$

1.2 Δυνάμεις ρητών αριθμών

Ορισμός: ονομάζουμε δύναμη με βάση τον πραγματικό αριθμό α και εκθέτη τον φυσικό αριθμό n ένα γινόμενο από n παράγοντες ίσους με α

$$\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$$

Ιδιότητες:

1) $\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$ παράδειγμα $x^2 \cdot x^3 = x^5$

2) $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\nu-\mu}$ παράδειγμα $x^{12} : x^3 = x^8$

3) $(\alpha^\nu)^\mu = \alpha^{\nu \cdot \mu}$ παράδειγμα $(x^3)^5 = x^{15}$

4) $\alpha^\nu \cdot \beta^\nu = (\alpha\beta)^\nu$ παράδειγμα $10^2 \cdot (0,5)^2 = (10 \cdot 0,5)^2 = 1^2 = 1$

5) $\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$ παράδειγμα $\frac{(100)^2}{(25)^2} = \left(\frac{100}{25}\right)^2 = 4^2 = 16$

6) $\alpha^0 = 1$

7) $\alpha^1 = \alpha$

8) $1^\alpha = 1$

9) $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

10) $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

Παρατήρηση:

- Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός
- Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός
- Δύναμη με βάση αρνητικό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός

Προτεραιότητα πράξεων

1^{ov} προηγούνται οι πράξεις στις παρενθέσεις και τις αγκύλες

2^{ov} δυνάμεις

3^{ov} πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

4^{ov} προσθέσεις και αφαιρέσεις με τη σειρά που σημειώνονται

Ασκήσεις στις δυνάμεις πραγματικών

1. Να γράψετε κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη

$$i) 3^5 \cdot 3^{-7} \quad ii) 2^7 : 2^{-3} \quad iii) (2^{-5})^{-2} \quad iv) 2^5 \cdot 3^5 \quad v) \frac{12^5}{4^5}$$

2. Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης κάθε μια από τις παρακάτω παραστάσεις :

$$i) 8 \cdot 2^5 \quad ii) 9 \cdot 3^{-5} \quad iii) \frac{32}{2^{10}} \quad iv) 4^5 \cdot 7^{10} \quad v) (-3)^2 \cdot 3^5 \quad vi) (-2)^7 \cdot 16$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή κάθε παράστασης :

$$i) (3^4)^{-1} \cdot 3^6 \quad ii) (-2)^7 \cdot (-2)^{-5} \quad iii) 12^5 : (-3)^5 \quad iv) (0,2)^7 \cdot (-5)^7$$

4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) 3x^2 \cdot (-5x^3) \quad ii) -2x^3 \cdot (-5x^6) \quad iii) 2x^3y^5 \cdot (-5x^4y) \quad iv) -3xy^3 \cdot (-4x^5y) \quad v) \frac{2}{5}x^5 \cdot (-5x^3)$$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) (3x^3)^4 \quad ii) (-3y^3)^4 \quad iii) (-2x^4)^3 \quad iv) \left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3$$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) \frac{6x^4}{3x} \quad ii) \frac{5x^3y^2}{10xy^5} \quad iii) \left(-\frac{1}{2}xy^4\right) : (-5x^3y^5)$$

7. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) (x^2)^3 \cdot 2x^5 \quad ii) 3x^2y$$

$$\cdot (-2xy^2)^3 \quad iii) (-2x^3)^2 : (-x^2) \quad iv) \left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^2 : (-3xy)^3$$

1.3 Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Ορισμός: ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α τον αριθμό που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό α και συμβολίζουμε $\sqrt{\alpha}$

➤ Επίσης ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$

Παράδειγμα: $\sqrt{81} = 9$ διότι $9^2 = 81$

Παρατήρηση :

- 1) Δεν ορίζουμε τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού
- 2) Το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ έχει νόημα όταν $\alpha \geq 0$
- 3) Αν $\alpha \geq 0$ τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
- 4) Γενικά ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

Ιδιότητες :

- 1) αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- 2) αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
- 3) αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2 \beta} = \alpha \sqrt{\beta}$

Βασική άσκηση :

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \sqrt{22 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} - \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}} + \sqrt{\sqrt{81}}}$$

Λύση:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{22 + \sqrt{5 + \sqrt{16}}} - \sqrt{8\sqrt{2\sqrt{4}}} + \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{22 + \sqrt{5 + 4}} - \sqrt{8\sqrt{2 \cdot 2}} + \sqrt{9} \\
 &= \sqrt{22 + \sqrt{9}} - \sqrt{8 \cdot 2} + 3 = \sqrt{25} - \sqrt{16} + 3 = 5 - 4 + 3 = 4
 \end{aligned}$$

Ασκήσεις στην τετραγωνική ρίζα

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) A = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^4 + (\sqrt{3})^6 \quad ii) B = \sqrt{5^2} + \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{2^4}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\begin{aligned}
 i) A &= \sqrt{121} - \sqrt{225} + \sqrt{196} \quad ii) B = \sqrt{144} - \sqrt{256} - \sqrt{625} \quad iii) \Gamma \\
 &= \sqrt{0,16} + \sqrt{0,09}
 \end{aligned}$$

3. Να υπολογίσεις τις παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{19 - \sqrt{7 + \sqrt{4}}} \quad ii) B = \sqrt{8\sqrt{1 + \sqrt{9}}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{9\sqrt{8\sqrt{4}}} \quad iv) \Delta = \sqrt{99 + \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \sqrt{25}}}$$

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} \quad ii) \sqrt{0,4} \cdot \sqrt{0,9} \quad iii) \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \quad iv) \frac{\sqrt{2,42}}{\sqrt{2}}$$

5. Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{10}} \cdot \sqrt{\frac{15}{2}} \quad ii) \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}} - \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$$

6. Να υπολογίσεις τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \quad ii) 3\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} \quad iii) \sqrt{5} - 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) \sqrt{8} \quad ii) \sqrt{12} \quad iii) \sqrt{18} \quad iii) \sqrt{20} \quad iv) \sqrt{24} \quad v) \sqrt{27}$$

8. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$i) \sqrt{8} - 3\sqrt{200} - \sqrt{50} \quad ii) \sqrt{12} - \sqrt{75} - 2\sqrt{300}$$

9. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα που έχουν άρρητους παρονομαστές σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητούς παρονομαστές

$$i) \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ii) \frac{5}{\sqrt{5}} \quad iii) \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \quad iv) \frac{2}{\sqrt{8}}$$

2. Πολυώνυμα – ταυτότητες

2.1 Μονώνυμα – πράξεις με μονώνυμα

Αριθμητική παράσταση : είναι κάθε παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς

Παράδειγμα : $2 \cdot 3^2 + 4 : 2$

Αλγεβρική παράσταση : είναι κάθε παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές

Παράδειγμα: $3x^2 - \frac{5x}{y}$

Ακέραια αλγεβρική παράσταση : λέγεται η αλγεβρική παράσταση όπου μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών είναι φυσικοί αριθμοί

Παράδειγμα : $2x^2 + y$

Αριθμητική τιμή ή τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης : λέγεται ο αριθμός που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς

Μονώνυμο : λέγεται κάθε ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού

Παράδειγμα: $\frac{1}{2}x^2y\omega^3$

Συντελεστής μονωνύμου: συντελεστής του μονωνύμου λέγεται ο αριθμός που βρίσκεται μπροστά από τις μεταβλητές (στο παραπάνω παράδειγμα: $\frac{1}{2}$)

Κύριο μέρος : του μονωνύμου λέγεται το γινόμενο των μεταβλητών μαζί με τους εκθέτες τους

(στο παράδειγμα : $x^2y\omega^3$)

Βαθμός του πολυωνύμου ως προς μια μεταβλητή : λέγεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής

Βαθμός του πολυωνύμου : λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	Βαθμός του μονωνύμου
$3xy^2$	3	xy^2	1	2	3

Όμοια μονώνυμα : λέγονται τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος

Παράδειγμα : $3x^2y$ και $2x^2y$

Ίσα μονώνυμα : λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή

Αντίθετα μονώνυμα : λέγονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές

Σταθερό μονώνυμο : είναι οποιοσδήποτε αριθμός

Μηδενικό μονώνυμο : λέμε το σταθερό μονώνυμο 0

Παρατήρηση :

- 1) Κάθε σταθερό μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
- 2) Για το μηδενικό μονώνυμο δεν ορίζεται βαθμός

Πράξεις με μονώνυμα

1) Πρόσθεση όμοιων μονωνύμων

Το άθροισμα δύο όμοιων μονωνύμων είναι ένα όμοιο με αυτά μονώνυμο που έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους

Παράδειγμα

$$2x^2y + 4x^2y = 6x^2y$$

2) Πολλαπλασιασμός μονωνύμων

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο

- με συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών και
- κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών με εκθέτη σε κάθε μια το άθροισμα των εκθετών της

Παράδειγμα :

$$2x \cdot 3x^2y = 6x^3y$$

3) Διαίρεση μονωνύμων

Για να βρώ το πηλίκο δύο μονωνύμων πολλαπλασιάζω τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη

- Το πηλίκο δύο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο

Παράδειγμα :

$$\frac{3x^3y}{xy} = 3 \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y}{y} = 3x^2$$

Ασκήσεις στα μονώνυμα

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι μονώνυμα;

Παράσταση	Μονώνυμο	Δεν είναι μονώνυμο
$\frac{2}{3}xy$		
$5x^{-2}y$		
$\frac{7x}{3y}$		
$3x\frac{1}{y}$		

2. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Μονώνυμο	Συντελεστής	Κύριο μέρος	Βαθμός ως προς x	Βαθμός ως προς y	βαθμός
$3x^2y$					
$\frac{6}{5}xy^3$					
$-4x^5y$					
y^2x^3					

3. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

$$A = (x^2 - y)(x^3 + 2y) + 2y^2 - x - (y^2 + x) \quad B = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^3}$$

Για $x=-1$ και $y=2$

Για $\alpha=-1$ και $\beta=-2$

4. Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα και ποιες όχι; στην περίπτωση που μια αλγεβρική παράσταση είναι μονώνυμο, ποιος είναι ο συντελεστής και ποιο το κύριο μέρος του;

$$(3 + \sqrt{2})xy\omega, \frac{3}{5}x^2y^2\omega, \frac{5x^2y\omega}{2}, \frac{\omega}{x}, 2xy^{-2}, \sqrt{3}a^2b$$

5. Ποια από τα παρακάτω μονώνυμα είναι όμοια, ποια είναι ίσα, και ποια είναι αντίθετα; να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}x^3, -\frac{7}{3}yx^2, 5x^2y\omega, 7x^2y, \frac{3x^3}{7}, \frac{5}{4}x^3, 6x^2y, \frac{x^3}{2}, -\sqrt{3}x^2y^2, -0,5x^3$$

Όμοια	
Ίσα	
Αντίθετα	

6. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του λ ώστε η αλγεβρική παράσταση $-\frac{3}{4}x^{6-\lambda}y^{\lambda-3}$ να είναι μονώνυμο. Στη συνέχεια για τις τιμές αυτές να βρείτε τα αντίστοιχα Μονώνυμα.

7. Να βρείτε το άθροισμα των παρακάτω μονωνύμων

i) $6x^2y^2 - x^2y^2 + 8x^2y^2 - 15x^2y^2$

ii) $7xy + 9xy - 12xy$

iii) $3ax^2 - 8ax^2$

iv) $9x^2y^3 - 13x^2y^3 + 2x^2y^3$

v) $\frac{1}{2}x^4y^3 - \frac{3}{4}x^4y^3 - \frac{5}{6x^4y^3}$

8. Να βρείτε το γινόμενο των παρακάτω μονωνύμων :

i) $2x^3 \cdot 5x^4y^3 \cdot \left(-\frac{4}{9}x^2y\omega^4\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}x^6y\omega\right)$

ii) $(-7xy) \cdot (-5x^4y) \cdot \frac{2}{5}xy^3$

iii) $5x^3y^4 \cdot (-3x^3y)$

9. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις :

i) $\left(-\frac{3}{2}x^2y^4\omega^6\right) : \left(-\frac{1}{2}xy^2\omega^4\right)$

ii) $(-12xy^2\omega^6) : (-3x^2y\omega^3)$

iii) $(-5xy^3\omega^5) : (4x^2y\omega^9)$

10. Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις :

i) $(-3a^2y^3) - (-4a^3y) + (-a^2y^3) =$

ii) $(-3x^2y + 5yx^2 + 6x^2y)(-3x^3y) =$

iii) $[(-3x^2y + 5x^2y + 9x^2y) : (xy)](xy^2\omega)^2 =$

11. Έστω ότι : $A = -2x^3, B = x^3y, \Gamma = xy^3$

Να κάνετε τις πράξεις : $A - B + \Gamma$, $A - B - \Gamma$ και $A + B - \Gamma$

12. Έστω ότι : $A = -2x^3y, B = -x^2x^4, \Gamma = xy^3$

να υπολογίσετε:

$\alpha) A \cdot B$ $\beta) B \cdot \Gamma$ $\gamma) A \cdot B \cdot \Gamma$ $\delta) A : B$ $\epsilon) A : \Gamma$ $\sigma\tau) B : \Gamma$ $\zeta) \Gamma : B$ $\eta) B : A$

13. Να χαρακτηρίσεις τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος

i) Το άθροισμα μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο

ii) Το μηδέν έχει βαθμό μηδέν

iii) Το γινόμενο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο

iv) Το πηλίκο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο

2.2 Πολυώνυμα αναγωγή όμοιων όρων

Πολυώνυμο : λέγεται το άθροισμα μονωνύμων που δεν είναι όμοια

Παράδειγμα: $2x^2 + 5x + 6$

Όρος του πολυωνύμου : λέγεται κάθε μονώνυμο που περιέχεται στο πολυώνυμο

Όροι : $2x^2$, $5x$, 6

Διώνυμο: λέγεται το πολυώνυμο που περιέχει δύο όρους

Παράδειγμα : $3x - 5$

Τριώνυμο : λέγεται το πολυώνυμο που περιέχει τρεις όρους

Παράδειγμα : $x^2 - x + 2$

Βαθμός του πολυωνύμου : είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του

Σταθερό πολυώνυμο : λέγεται κάθε αριθμός

Αναγωγή όμοιων όρων : είναι η αντικατάσταση των όμοιων πολυωνύμων με το άθροισμά τους

Παράδειγμα : $\underline{x^2} + \overline{5xy} + \underline{7x^2} - \overline{8xy} = 8x^2 - 3xy$

Βασικό παράδειγμα :

Δίνονται τα πολυώνυμα : $A(x) = 5x^3 - 6x^2 + x - 8$ $B(x) = -8x^3 + 6x$

Να υπολογιστεί το άθροισμά τους και η διαφορά τους

Λύση :

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (5x^3 - 6x^2 + x - 8) + (-8x^3 + 6x) \\ &= 5x^3 - 6x^2 + x - 8 - 8x^3 + 6x = -3x^3 - 6x^2 + 7x - 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(x) - B(x) &= (5x^3 - 6x^2 + x - 8) - (-8x^3 + 6x) \\ &= 5x^3 - 6x^2 + x - 8 + 8x^3 - 6x = 13x^3 - 6x^2 - 5x - 8 \end{aligned}$$

Ασκήσεις στα πολυώνυμα

1. Να γίνουν οι πράξεις

- i) $x^2 + 2x + 3 + 5x - 7x^2 + 3$
- ii) $(x^3 + 5x^2 + 5x) + (3x^3 - 7x^2 + 9)$
- iii) $(4x^2 - 7x + 9) - (x^2 - 8x - 2)$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

- i) $6x^3 + 8 - 4x^3 - 2x^3 - 6 - 12x^3$
- ii) $x^2y - 4x^2y - 13xy^2 + 12x^2y - 14xy^2$
- iii) $\frac{1}{4}xy - 2x + 2y - \frac{2}{3}xy + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

- i) $22x - [(13x + 8y + 2\omega) - (2x + 8y - 4\omega)]$
- ii) $6x - \{7y - (8y - 4\omega) + (2x + 7y - 3\omega)\}$
- iii) $[6\alpha^2\beta^2 - (3\alpha\beta^2 + 5\alpha^2\beta)] - [3\alpha\beta^2 - (4\alpha^2\beta + 6\alpha^2\beta^2)]$

4. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = 3x^2y - [4xy - (6xy^2 - 2x^2y) - (2xy - 2xy^2)] + 4xy$$

Για $x=-1$ και $y=-2$

5. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = -\{(-9 - 2a + \beta) - [(4a - 4\beta) - (4a - 3a + 4)]\} \text{ Αν είναι } \alpha - \beta = 222$$

6. Δίνονται οι παρακάτω παραστάσεις

$$A = \alpha^2 - 4\alpha\beta + 7\beta^2 \quad B = 3\beta^2 + 6\alpha\beta - 5\alpha^2 \quad \Gamma = 2\alpha\beta + \beta^2 - 6\alpha^2$$

να κάνετε τις πράξεις : α) $A - B + \Gamma$ β) $A - (B - \Gamma)$ γ) $\Gamma - (A + B)$

2.3 Πολλαπλασιασμός Πολυωνύμων

Ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων γίνεται με βάση την επιμεριστική ιδιότητα

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad (\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta$$

- **Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο** πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

Παράδειγμα :

$$2x^2(x^3 + x^2 - 5x) = 2x^2 \cdot x^3 + 2x^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot 5x = 2x^5 + 2x^4 - 10x^3$$

- **Για να πολλαπλασιάσουμε δύο πολυώνυμα** πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός με κάθε όρο του άλλου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x^2 + x - 3) &= x \cdot x^2 + x \cdot x - 3x + x^2 + x - 3 = x^2 - 3x + x^2 + x - 3 \\ &= 2x^2 - 2x - 3\end{aligned}$$

Ασκήσεις στον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Να κάνετε τις πράξεις :

$$i) -2(x^2y - 4xy - 3xy^2) =$$

$$ii) -2xy^3(x^2y - 4xy - 3xy^2) =$$

$$iii) -3x^2y\omega^2(x^2y - 4\omega y + 2\omega x^2) =$$

2. Να κάνετε τις πράξεις :

$$i) 2x^2(x-1) - 3x(x^2+3) + 6(x^2-x) - 7 =$$

$$ii) 2x(x^2 - xy + y^2) - 4y(2x^2 - 3xy + y^2) =$$

$$iii) (x^k + y^k)(x^k - y^k)$$

3. Να κάνετε τις πράξεις :

$$i) (x-2)(x^2+2x+2) =$$

$$ii) (x-2y)(x^2y - xy + 2xy^2) =$$

$$iii) (2\alpha-1)(3\alpha-4)(\alpha-3) =$$

$$iv) -x(x-2)(x^2+x+1) =$$

$$v) -x(x-1)(x-2)(x+3) =$$

4. Να κάνετε τις πράξεις στην παρακάτω αλγεβρική παράσταση :

$$A = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 2\gamma) + (\beta - \gamma)(\beta + \gamma - 2\alpha) + (\gamma - \alpha)(\alpha + \gamma - 2\beta)$$

5. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = (x + y - \omega)(x + y) + (x - y + \omega)(x + \omega)(y + \omega - x)(y + \omega)$$

$$\text{Για } x = -2, y = -3 \text{ και } \omega = -4.$$

2.4 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ταυτότητα : ονομάζεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών

Βασικές ταυτότητες

- i) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- ii) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- iii) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- iv) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- v) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- vi) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- vii) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη:

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha \cdot \alpha + \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Απόδειξη :

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta - \beta \cdot \alpha + \beta \cdot \beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$3. (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Απόδειξη :

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + \beta \cdot \alpha - \beta \cdot \beta = \alpha^2 - \beta^2$$

$$4. (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &= \alpha^3 + 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ &= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \end{aligned}$$

$$5. (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^3 &= (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) \\ &= \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ &= \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \end{aligned}$$

$$6. (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 + \beta^3$$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha \cdot \alpha^2 - \alpha \cdot \alpha\beta + \alpha \cdot \beta^2 + \beta \cdot \alpha^2 - \beta \cdot \alpha\beta + \beta \cdot \beta^2 \\ &= \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3 \end{aligned}$$

$$7. (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \alpha \cdot \alpha^2 + \alpha \cdot \alpha\beta + \alpha \cdot \beta^2 - \beta \cdot \alpha^2 - \beta \cdot \alpha\beta - \beta \cdot \beta^2 \\ &= \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3\end{aligned}$$

1ο βασικό παράδειγμα

Να βρεθούν τα αναπτύγματα των παρακάτω ταυτοτήτων

- i) $(x + 2)^2 =$
- ii) $(2x + 1)^2 =$
- iii) $(3x - 2)^2 =$
- iv) $(x + 1)(x - 1) =$

Λύση:

- i) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$
- ii) $(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$
- iii) $(3x - 2)^2 = 9x^2 - 12x + 4$
- iv) $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$

Ασκήσεις στις ταυτότητες

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα :

i) $(x + y)^2 =$

ii) $(x + 3y)^2 =$

iii) $\left(\frac{x}{4} + \frac{y}{3}\right)^2 =$

iv) $(x^2 + y^2)^2 =$

v) $(2x + y)^2 =$

vi) $\left(\frac{x}{4} + y\right)^2 =$

vii) $(xy + y^2)^2 =$

viii) $\left(x^2 + \frac{1}{3}y^3\right)^2 =$

2) Να βρείτε τα αναπτύγματα

i) $(x - y)^2 =$

ii) $(6 - 4x)^2 =$

iii) $\left(2x - \frac{y}{4}\right)^2 =$

iv) $\left(x^2 - \frac{1}{4}\alpha\beta\right)^2 =$

v) $(a - 4)^2 =$

vi) $(4x - 5y)^2 =$

vii) $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 =$

viii) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}y^3\right)^2 =$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

i) $(-x - 3)^2 =$

ii) $(-x + 4)^2 =$

iii) $(-2x + 5y)^2 =$

iv) $\left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}y^3\right)^2 =$

6. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

- i) $(x - 3)(x + 3) =$
- ii) $(1 + xy)(1 - xy) =$
- iii) $(-a + 3\beta)(a + 3\beta) =$
- iv) $(3xy - 4\alpha\beta)(3xy + 4\alpha\beta) =$
- v) $(1 - x^2)(1 + x^2) =$
- vi) $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) =$
- vii) $(-x - 2y)(-x + 2y) =$

5. Να κάνετε τις πράξεις :

$$\alpha) (x + y + \omega)(x + y - \omega) =$$

$$\beta) (\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta - 1) =$$

$$\gamma) (x - y + \omega)(x + y + \omega) =$$

$$\delta) (x + y + \omega - 2)(x + y - \omega + 2) =$$

7. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

$$i) (x + y)^3 =$$

$$ii) (2\alpha + 3\beta)^3 =$$

$$iii) (2\alpha - 4\beta)^3 =$$

$$iv) (\alpha + 2)^3 =$$

$$v) (x - 2)^3 =$$

$$vi) (-x - 2y)^3 =$$

$$vii) (-x - 2y^2)^3 =$$

$$viii) (-a + 2)^3 =$$

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

$$i) (x + y + \omega)^2 = \quad ii) (x - y + \omega)^2 = \quad iii) (x + y - \omega)^2 =$$

9. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις :

$$i) -2(2 + 3\omega)^3 - \omega(\omega + 2)(\omega - 2) + (\omega - 1)^3 =$$

$$ii) (x - y)^3 - (x + y)^3 + 3(x - y)(x + y) =$$

10. Να κάνετε τις πράξεις στις παρακάτω παραστάσεις :

$$i) (3\alpha + 4\beta)^2 - 3(\alpha - \beta)^2 - (5\alpha - 2\beta)^2 =$$

$$ii) 2(\alpha + \beta)(\alpha - 3\beta) - (\alpha - 2\beta)^2 - 3\alpha(\alpha + \beta) =$$

$$iii) (3x + 4y)(3x - 4y) - (y - 2x)(y + 2x) =$$

$$iv) (7\kappa - \lambda)^2 - (8\kappa - 3\lambda)(8\kappa + 3\lambda) - (\kappa + 2\lambda)^2 =$$

11. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - 6\alpha\beta + 2\beta^2$

Αν γνωρίζουμε ότι : $\alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

12. Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε κλάσματα με ρητό παρονομαστή

i) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ ii) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

12. Αν $x+y=6$ και $x \cdot y=8$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = x^2 + y^2$

όπου $x, y > 0$

13. Αν $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$, $x \neq 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$A = x^2 + \frac{1}{x^2}, B = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να δειχθεί ότι $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Μονάδες 10

A₂. Τι λέγεται τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού x ;

Μονάδες 5

A₃. Να συμπληρώσετε Σ για τις σωστές και Λ για τις λάθος προτάσεις:

α. $\alpha^\mu + \alpha^\nu = \alpha^{\mu\nu}$

Σ Λ

β. $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$

Σ Λ

γ. $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

Σ Λ

δ. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

Σ Λ

ε. $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$

Σ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (2x - 1)(3x^2 + 4)$ και $Q(x) = x(x - 2)$.

B₁. Να δειχθεί ότι $P(x) + Q(x) = 2(3x^3 - x^2 + 3x - 2)$

Μονάδες 13

B₂. Αν $K(x) = P(x) + Q(x) - 48$, να δείξετε ότι η διαίρεση $K(x) : (x-2)$ είναι τέλεια και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (2x-1)^2 + 3$ και $Q(x) = 2 - (1-3x)^2$

A. Να δειχθεί ότι $P(x) - Q(x) = 13x^2 - 10x + 3$.

Μονάδες 12

B. Να δειχθεί ότι $3P(x) + Q(x) = P(x) - x^2 - 2x + 9$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K_1 = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x)}{(x-3)(x^2 - 1)} \text{ και } K_2 = \frac{(x^2 - 4)(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$$

Δ1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις.

Μονάδες 8

Δ2. Να απλοποιήσετε την καθεμία παράσταση.

Μονάδες 8

Δ3. Να δειχθεί ότι $K_1 - 3K_2 = \frac{-2x^2 + x + 18}{x-3}$.

Μονάδες 9

2.5 Παραγοντοποίηση πολυωνύμων

Παραγοντοποίηση πολυωνύμων : είναι η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε ένα άθροισμα σε γινόμενο

Μέθοδοι παραγοντοποίησης :

- 1) **Κοινός παράγοντας:** Αν σε κάθε όρο του αθροίσματος υπάρχει κάποιος κοινός παράγοντας, τότε βγαίνει έξω από μια παρένθεση

$$i) 2x - 2y = 2(x - y)$$

$$ii) x^2 - x = x(x - 1) \quad iii) 4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$$

- 2) **Ομαδοποίηση :** (κοινός παράγοντας ανά ομάδες)

$$i) ax - ay + 2x - 2y = a(x - y) + 2(x - y) = (x - y)(a + 2)$$

$$ii) x^2 - x + 2x - 2 = x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$$

- 3) **Ανάπτυγμα κάποιας γνωστής ταυτότητας :**

$$i) x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4) \quad ii) x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

- 4) **Τριώνυμο :** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Βρίσκω τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει 2 ρίζες άνισες : $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και

παραγοντοποιείται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα την $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και

παραγοντοποιείται :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

Ασκήσεις στην παραγοντοποίηση πολυωνύμων

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

- i) $3x + 3y =$
- ii) $8 - 12x$
- iii) $4x^2 - 6x =$
- iv) $3x + 3 =$
- v) $x^4 - x^2y =$
- vi) $5a^2xy - 10a^5x^3$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

- i) $3x(x - y) + 5y(x - y)$
- ii) $5(x + y) + a(x + y)$
- iii) $\beta(x - y) - x + y$
- iv) $x(a - \beta) - 3(\beta - \alpha)$
- v) $7\omega(a + \beta) - \alpha - \beta$
- vi) $3x(x - 1) - x + 1$
- vii) $3x(\alpha - 1)^3 + y(\alpha - 1)^2$
- viii) $\beta(\alpha - 1)^2 - (1 - \alpha)$
- ix) $(3x + 2)(2x - 5) + (4 + 5x)(5 - 2x)$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

- i) $x^{\mu+2} + x^{\mu} =$
- ii) $4\alpha^{\nu} + 2\alpha^{\nu+2} =$
- iii) $x^{\nu+\mu} - x^{\nu+\kappa} =$
- iv) $\alpha^{\nu+2}\beta^{\mu+1} + 2\alpha^{\nu}\beta^{\mu} =$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

- i) $3x^3 - x^2y + 6x - 2y =$
- ii) $10x^3 + 4xy^2 - 6y^3 - 15x^2y =$
- iii) $xy + x^2 - x - y =$
- iv) $\alpha - \alpha x + \beta - \beta x =$
- v) $xy^2 + x\omega - y^2z - \omega z =$
- vi) $3x^2 + 3xy + 3x\omega - 2ax - 2ay - 2a\omega =$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

- i) $x^2 - y^2 =$
- ii) $16a^2 - 9\beta^2 =$
- iii) $16x^4 - y^4 =$
- iv) $(x + 1)^2 - 4 =$
- v) $9(2a + \beta)^2 - 4(a - \beta)^2 =$
- vi) $25a^2 - 1 =$
- vii) $4a^2b^2 - 9x^2y^2 =$
- viii) $36x^4 - 25y^4 =$
- ix) $36 - (x + 4)^2 =$

6. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα

- i) $x^2 + 8x + 16 =$
- ii) $9x^2y^2 - 12xy + 4 =$
- iii) $\frac{a^2}{4} - \frac{\alpha\beta}{3} + \frac{\beta^2}{9} =$
- iv) $(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta) + 1 =$
- v) $9x^2 + 6x + 1$
- vi) $x^2 - 2x + 1$

7. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα :

$$i) 8\alpha^3\beta^3 - 1 \quad ii) x^3 - 64,$$

8. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα :

- i) $x^2 + 7x + 10 =$
- ii) $x^2 + x - 6 =$
- iii) $x^2 - 5x + 6 =$
- iv) $x^2 - x - 6 =$

9. Να αναλύσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις σε γινόμενο πρώτων παραγόντων :

- i) $3a^2\beta - 6\alpha\beta + 9\alpha\beta^2 =$
- ii) $12x^2 - 27y^2 =$
- iii) $4ax^2 - 12axy + 9ay^2 =$
- iv) $2x^3 - 16 =$
- v) $3x^2 - 24x + 45 =$
- vi) $a^2(x - 3) + \beta^2(3 - x) =$
- vii) $(x + 2)^2 + x^2 - 4 =$

viii) $(4a - 8)(a^2 - 1) - (3a - 6)(a - 1)^2 =$

ix) $3(x - 2)^2(x - 1) - 4(1 - x)(2 - x) =$

3.1 ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ :

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

i) $2x-4$ ii) $-3x+6$ iii) $-3x^2+6x$ iv) x^2y-x^3 v) x^2+x^3+x

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

i) x^3-16 ii) x^4-9x^2 iii) $4x^3-36$ iv) $3x^2-27$ v) $64a^2b^4-(2ab)^2$

3. Όμοια οι παραστάσεις :

i) $2x+2y+bx+by$ ii) $-3(x+y)+a(x+y)$ iii) $x^2(a+b)+x(a+b)$
iv) $x(a-b)+(b-a)$ v) $x^3(a-b)+x^2y(b-a)$ vi) $2x(a-k)+k-a$

4. Όμοια οι παραστάσεις :

i) x^2-1 ii) $4x^2-1$ iii) x^2-16 iv) $64x^2-1$ v) $36x^2y^2-16$ vi) $36x^2y^4-1$
vii) $(x^2+4)^2-16x^2$ viii) $(17x^2-1)^2-64x^4$ ix) $(4x^2+12x+9)^2-1$ x) $(13x^2-5y^2)^2-(12x^2+4y^2)^2$

5. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

i) $x^2-a^2-b^2+2ab$ ii) $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ iii) x^2-y^2+4x+4
iv) $(a^2+9) \cdot (x^2+4) - (ax+6)^2$ v) x^4-22x^2+121 vi) $x(x+2)-y(y+2)$

6. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) x^3+1 ii) x^3-1 iii) $8-x^3$ iv) $27-y^3$ v) x^6+y^6 vi) x^6-y^6 vii) x^6-1

7. Όμοια για τις παραστάσεις :

i) $4xy(x-y)-6x(x-y)^2+2x(x^2-y^2)$ ii) $3x(2+3x)^2-(2+3x)^2-(4-9x^2)^2$
iii) $(a^2+4) \cdot (b^2+1) - (a+2b)^2$ iv) $(x^2-9)^2 - (x+5) \cdot (x-3)^2$
v) $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$ vi) $5ax^2y^2-10axy+5a$
vii) $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)$ viii) $a^2x+abx+aby+b^2y-ak-bk$

8. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $8x^2-32$ ii) $16-(3x-2y)^2$ iii) $(x+y)^4-(x+y)^2$ iv) x^3-x^2+4-4x
v) $(x+y)^3-(x+y) \cdot (x-y)^2$ vi) a^2-b^2+a-b

9. Όμοια τις παραστάσεις :

i) $a^4 - b^4 + 2ab(a^2 - b^2)$ ii) $x^2 - 4 - 3(3x - 2) \cdot (x + 2)^2$ iii) $(x^2 + 2x + 1) - x^4$
iv) $(x + y)^2 - 1 - xy(x + y + 1)$ v) $4a^2 - 4ab + b^2 - 9a^2b^2$ vi) $x^7 - x^5 - x^3 + x$

10. Όμοια τις παραστάσεις :

i) $x^4 + x^3y - xy^3 - y^4$ ii) $x^2y^2 - x^2w^2 - y^2w^2 + w^4$ iii) $a^4 + 6a^2b^2 + 8b^4$
iv) $3x^2 + 4xy + y^2$ v) $(x^2 - 4) - (x + 2)^2$ vi) $x^7 - x^3 + 8x^4 - 8$
vii) $ak^2 + bk - a^2k - b$ viii) $ab(x^2 + 1) + x(a^2 + b^2)$

11. Όμοια τις παραστάσεις :

i) $(x - 2)^2 \cdot (2x + 1) - (2 - x)^2 \cdot (2x - 5)$ ii) $x(x - 6) \cdot (x + 4) + 9x + 36$
iii) $9(2x - 1)^2 - 25(x - 3)^2$ iv) $(8x - 6) \cdot (2x - 4) - (6x + 3) \cdot (4 - 2x)$
v) $(x - 5)^2 + x^2 - 25 + (x - 5) \cdot (2x + 1)$ vi) $(a^2 - 9)^2 - (a + 3)^2$
vii) $(17x^2 - 10y^2)^2 - (6y^2 - 8x^2)^2$ viii) $(2x + 5) \cdot (7 - x) + 4x^2 - 25$

12. Όμοια τις παραστάσεις :

i) $a^2x^2 + 2a^2xy + a^2y^2 - (a + b)^2$ ii) $(x - 2y)^2 - 2(x - 2y) + 1$ iii) $x^2 - (a + b)x + ab$
iv) $3a^2 + 2ab + \frac{1}{3}b^2$ v) $(x - 4)^2 + x^2 - 16 + (x - 4) \cdot (2x - 1)$ vi) $(x + 2) \cdot (2x + 1)^2 - 16x - 32$
vii) $3(x^2 - 9) \cdot (x + 1) - 2(x + 3) \cdot (x + 1)$ viii) $(x^2 - 1) \cdot (x + 2) - (x^2 - 4) \cdot (x + 1)$ ix) $x^3 + 2x^2 - x - 2$
x) $x^3 - 5x^2 + 4$ xi) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ xii) $x^2 - xy + y - 1$

13. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $a^2 - 2ab + b^2 - k^2$ ii) $y^2 + 2x - x^2 - 1$ iii) $a^2 - 2ab + b^2 - a + b$
iv) $a^2 + 2ab + b^2 - x^2 + 4x - 4$ v) $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$ vi) $(a^2 + b^2 - k^2)^2 - 4a^2b^2$
vii) $x^4 + 5x^2y^2 + 9y^4$ viii) $a^4 + 4b^4 - 13a^2b^2$ ix) $x^4 + 4x^2 + 16$ x) $a^4 - 4b^4$

14. Όμοια τις παραστάσεις :

i) $x^2 - 3x + 2$ ii) $2x^2 - 4x + 2$ iii) $9x^2 + 12x + 4$ iv) $x^2 - 7x + 6$
v) $x^2 + 6x + 5$ vi) $3x^2 - 21x + 30$ vii) $2x^2 - x - 1$ viii) $3x^2 - 5x + 2$ ix) $2x^2 + 3x - 5$

15. Όμοια τις παραστάσεις :

i) $121x^3 - 49x$ ii) $9x^2 - 6xy + y^2 - 25$ iii) $x^2 + a^2 - y^2 + 2ax$
iv) $x^4 + ax^2 - bx^2 - ab$ v) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 81x^2y^2$ vi) $(x^2 - 9)^2 + 8(x - 1) \cdot (x + 3)^2$

3.2 ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Προσοχή : στις κλασματικές παραστάσεις πρώτα παραγοντοποιώ και μετά απλοποιώ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ :

1. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παρακάτω κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις .

$$i) \frac{2}{x}, ii) \frac{3x+1}{x+2} iii) \frac{3x^2+2}{2x^3-18x} iv) \frac{x+1}{x-1} v) \frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις :

$$i) \frac{\alpha^3-4\alpha}{2\alpha^2-4\alpha} ii) \frac{3x+6}{x^2-4} iii) \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2-x} iv) \frac{2x^2+xy-y^2}{x+y} v) \frac{3(x+2)^2}{(x+2)^8}$$

3. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω κλασματικές αλγεβρικές παραστάσεις :

$$i) -\frac{2x}{4} \cdot \frac{5\omega^2 y^2}{8x^3} ii) \frac{-2x^3}{4y^2} \cdot \frac{-2y\omega}{6x^2} \cdot \frac{x^2 y^4}{\omega^2} iii) \frac{4x^2+4x+1}{\alpha x^2-4\alpha} \cdot \frac{3x+6}{4x^2-1}$$

$$iv) \frac{(x-1)(x-3)-(1-x)(x-5)}{x^2-1} v) \frac{(x^4-1)(x^2-2x)}{(x^3-4x)(x^2-x)} vi) \frac{x^2-9}{x^3+27} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x^3-27}$$

4. Να κάνετε τις πράξεις :

$$i) \frac{\alpha^3}{\alpha\beta} : \frac{\alpha^2}{6\beta^4} ii) \frac{x^2}{\omega y^4} : x^4 iii) 3x^2 y \cdot \frac{y^2}{x^3} (x+y) \cdot iv) \frac{xy}{x^2-y^2} v) \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2-1}{x^2-9}$$

5. Να κάνετε τις πράξεις :

$$i) \frac{1}{x-y} : \frac{-2}{x^2-y^2} ii) \frac{x^2-9y^2}{y^2+9xy} : \frac{x^2-3xy}{9x^2+xy}$$

6. Να απλοποιήσετε τα παρακάτω σύνθετα κλάσματα :

$$i) \frac{\frac{4x^2-1}{x^2-9}}{\frac{2x+1}{x+3}}, ii) \frac{\frac{x^2-x}{4y^2+y^3}}{\frac{x^2-1}{4y^2-64}}$$

3.3 Πρόσθεση – αφαίρεση κλασματικών παραστάσεων

Για να προσθέσω ή να αφαιρέσω δύο κλασματικές παραστάσεις

1^{ov} παραγοντοποιώ τους παρονομαστές

2^{ov} βρίσκω το Ε.Κ.Π των παρονομαστών

3^{ov} τα κάνω ομώνυμα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των παρακάτω αλγεβρικών παραστάσεων:

i) $3x, 2y, \omega$

ii) $12x^2y, 4xy^2\omega, 6xy\omega$

iii) $x - y, (x - y)(x + y), (x + y)$

iv) $(x - y)^2, (x - y)(x + y)^2, x + y$

v) $4x^2(x - y), 8x(x - y)^2, 12x(x - y)^3(x + y)$

2. Να βρείτε το Ε.Κ.Π. των παρακάτω παραστάσεων :

i) $x^2 - y^2, x - y$

ii) $x^2 - y^2, x^2 + 2xy + y^2$

iii) $x^2 - 4, x^2 + 5x + 6, x^2 + 4x + 4$

iv) $x^3 - 27, x^2 - 6x + 9, x^2 - 4x + 3$

v) $2x + 4, 4x - 8, 4x + 8$

3. Να κάνετε τις πράξεις :

i) $\frac{1}{y} - \frac{3}{x}$

ii) $\frac{3x}{\alpha^2\beta} + \frac{2\beta}{\alpha x^2} - \frac{\alpha}{\beta^2 x}$

iii) $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{3x-2}{3x+3} - \frac{5}{6x^2-6}$

iv) $\frac{3}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} + \frac{1}{x^2-4x+4}$

4. Να απλοποιήσετε τα σύνθετα κλάσματα :

i) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}, \quad ii) \frac{2}{1 + \frac{3}{x-2}}$

5. Να κάνετε τις πράξεις :

$$i) \left(\frac{5x-3y}{15\alpha} - \frac{9x-8y}{12\beta} \right) : \left(\frac{4\beta-9\alpha}{4y} - \frac{3\beta-10\alpha}{5x} \right)$$

$$ii) \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) : \left[\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) \right]$$

$$iii) \frac{\alpha + \frac{1}{\alpha} + 1}{\frac{1}{\alpha} - 1} \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 + 1}$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να δειχθεί ότι $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Μονάδες 10

A₂. Τι λέγεται τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού x ;

Μονάδες 5

A₃. Να συμπληρώσετε Σ για τις σωστές και Λ για τις λάθος προτάσεις:

α. $\alpha^\mu + \alpha^\nu = \alpha^{\mu\nu}$

Σ Λ

β. $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$

Σ Λ

γ. $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta= \alpha^2+\beta^2$

Σ Λ

δ. $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

Σ Λ

ε. $\pi R^2-\pi\rho^2=\pi(R^2-\rho^2)$

Σ Λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(2x-1)(3x^2+4)$ και $Q(x)=x(x-2)$.

B₁. Να δειχθεί ότι $P(x) + Q(x) = 2(3x^3 - x^2 + 3x - 2)$

Μονάδες 13

B₂. Αν $K(x) = P(x) + Q(x) - 48$, να δείξετε ότι η διαίρεση $K(x) : (x-2)$ είναι τέλεια και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (2x-1)^2 + 3$ και $Q(x) = 2 - (1-3x)^2$

A. Να δειχθεί ότι $P(x) - Q(x) = 13x^2 - 10x + 3$.

Μονάδες 12

B. Να δειχθεί ότι $3P(x) + Q(x) = P(x) - x^2 - 2x + 9$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K_1 = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x)}{(x-3)(x^2 - 1)} \text{ και } K_2 = \frac{(x^2 - 4)(x-3)}{x^2 - 5x + 6}$$

Δ1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις.

Μονάδες 8

Δ2. Να απλοποιήσετε την καθεμία παράσταση.

Μονάδες 8

Δ3. Να δειχθεί ότι $K_1 - 3K_2 = \frac{-2x^2 + x + 18}{x-3}$.

Μονάδες 9

4. Εξισώσεις

4.1 Εξισώσεις πρώτου βαθμού

Για να λύσω εξισώσεις 1^{ου} βαθμού ακολουθούμε τα εξής βήματα

1^{ον} βρίσκω το Ε.Κ.Π των παρονομαστών

2^{ον} κάνω απαλοιφή παρονομαστών

3^{ον} ότι μένει από κάθε κλάσμα το βάζω σε παρένθεση και κάνω επιμεριστικές

4^{ον} χωρίζω γνωστούς από αγνώστους

5^{ον} κάνω πράξεις και διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου (αν αυτός δεν είναι μηδέν)

Παρατήρηση :

$$0 \cdot x = 0 \text{ αόριστη}$$

$$0 \cdot x = \alpha, \alpha \neq 0 \text{ αδύνατη}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{4} = 1$$

και κατόπιν με τη λύση που βρήκατε να επαληθεύσετε την εξίσωση.

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$i) 5x - 13 = 12$$

$$ii) 10x + 7 = 3x$$

$$iii) -2\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \sqrt{3}x$$

$$iv) 4 + 5x = 4x + 2$$

$$v) 20x = 16x - 4$$

$$vi) \sqrt{2}x + 2\sqrt{6} = 7\sqrt{6}$$

$$vii) 3\omega - 8 = 6\omega + 4$$

$$viii) 2\sqrt{2}x - \sqrt{18} = 3\sqrt{2}x + \sqrt{32}$$

$$ix) \sqrt{3}x - \sqrt{75} = \sqrt{12}x - \sqrt{48}$$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$i) \frac{x}{5} - \frac{x}{2} = 3$$

$$vi) \frac{3-5x}{3} = \frac{x-1}{2} - \frac{13x}{6}$$

$$ii) \frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{3} = 7$$

$$vii) x - \frac{3(x+1)}{4} = \frac{2x-1}{3}$$

$$iii) \frac{x+2}{3} - \frac{2x+1}{2} = \frac{2x-3}{6} - x$$

$$viii) x + 4 - \frac{x+3}{3} = \frac{2x+3}{3}$$

$$iv) \frac{3}{5} - \frac{x+1}{10} = \frac{5-x}{10}$$

$$ix) 5x - \frac{15(x+1)}{4} = \frac{10x-5}{3}$$

$$v) \frac{x-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{x+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$x) \frac{x-2}{2\sqrt{5}-1} = \frac{x+2}{2\sqrt{5}+1}$$

4. Αν χ η λύση της εξίσωσης

$$\frac{x-2}{2} - x + 3 = 3 - x$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 2^x + (-1)^{2-x} - 3^x$$

5. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ και μ , ώστε η εξίσωση $\lambda(\chi + 1) = \mu - 5 - 2\chi$ να είναι ταυτότητα.

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$i) (x+1)(x+3) = 0$$

$$ii) (x-1)(2x+7) = 0$$

$$iii) (3x-3)(3x-9) = 0$$

$$iv) (6x-3)(3x-6) = 0$$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) (x-7)^2 - (2x+4) = x^2 - 3$$

$$ii) (x+4)^2 - (x-11)^2 = 15$$

$$iii) (x-3)^2 + (x-7)^2 = 2x^2 - 2$$

7. Να λύσετε τις παρακάτω παραμετρικές εξισώσεις :

$$i) 3(\lambda + 1)x + 4 = 2x + 5(\lambda + 1)$$

$$ii) (\lambda + 2)x + 4(2\lambda + 1) = \lambda^2 + 4(x - 1)$$

$$iii) (\lambda^2 - 1)x = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$$

4.2 Εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Οι εξισώσεις 2^{ου} βαθμού λύνονται με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης και της πολύτιμης σχέσης :

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 5x^2 + 5x - 25 = 0$

Λύση:

$$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x - 5) - 4(x - 5) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 5)(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 5)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 5 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0 \text{ ή } x + 2 = 0$$

$$x = 5 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Ασκήσεις στις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$i) 8x^2 + 24x = 0$$

$$ii) -3x^2 + 33x = 0$$

$$iii) -7x^2 - 8x = 0$$

$$iv) -4x^2 + 52x = 0$$

$$v) 2x^2 - \sqrt{5}x = 0$$

$$vi) -\sqrt{12}x^2 + \sqrt{3}x = 0$$

$$vii) 7x^2 + \sqrt{3}x = 0$$

$$viii) \sqrt{20}x^2 + \sqrt{5}x = 0$$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$i) x^2 - 25 = 0$$

$$ii) 169 - x^2 = 0$$

$$iii) x^2 - 7 = 0$$

$$iv) x^2 - 121 = 0$$

$$v) x^2 - 289 = 0$$

$$vi) x^2 - 900 = 0$$

$$vii) x^2 - 13 = 0$$

$$viii) x^2 - 17 = 0$$

$$ix) x^2 - 144 = 0$$

$$x) 256 - x^2 = 0$$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$i) x^2 + 17 = 0$$

$$ii) -7x^2 - 12 = 0$$

$$iii) x^2 + (2^2 + 3^3) = 0$$

$$iv) x^2(1 + \sqrt{3})^2 = 0$$

$$v) 3x^2 + 13 = 0$$

$$vi) \sqrt{2}x^2 + \sqrt{72} = 0$$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$i) 3x^2 - 1 = 2(x^2 + 12) \quad ii) \frac{4x^2}{5} - 45 = \frac{3x^2}{4}$$

$$iii) 2(x^2 - 9) = 3(x^2 - 1) - 51 \quad iv) \frac{5x^2}{2} - 13 = x^2 - 14$$

$$v) (x - 2)(x + 2) + (1 - 2x)(1 + 2x) = 0$$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $3x^2 - 4x = -8x$

ii) $-3x^2 + 5x = x^2 - 4x$

iii) $-3x(x+1) = -2x(x+2)$

iv) $-7x(x+1) - 3x^2 + 8x = 0$

v) $-15x(x+2) + (2x+1)(-x) = 0$

vi) $3(x^2 - 5x) = -2(x^2 - 3x)$

vii) $(x+4)^2 = 2(x^2 + 8)$

viii) $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 5x - \frac{4}{9}$

ix) $(2x-3)(2x+3) = 3(x-3)$

x) $-8x(x+1) = (x+1)^2 - 1$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $5x^2 - 45 = 3x^2 - 117$

ii) $7x^2 + 3(x^2 - 2) - 24 = 0$

iii) $-5(x^2 + 3) + 45 = 0$

iv) $5(x^2 - 9) - 2x^2 = 0$

v) $7x^2 + 6 = x^2 + 1$

7. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $\frac{x(2x+3)}{4} + \frac{x}{5} = \frac{x^2}{3}$

ii) $\frac{x(x+3)}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x^2}{12}$

iii) $\frac{2x(x+2)}{4} + \frac{x}{3} = x^2$

iv) $\frac{x(3x+1)}{3} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $(3x-1)^2 + (x-2)^2 = 5 + 3x$ ii) $(x-2)^2 + 2x = (1-x)^2 + (x-1)(x+1)$

iii) $(2x+4)^2 + (x-3)^2 = -(x-5)(x+5)$ iv) $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1) + (x-1)^2 = \sqrt{2}x$

v) $(x+1)^2(x-2) + (x-1)(x+2)(x+1) = (2x+1)(x^2-4)$

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\begin{array}{ll} i)x^2 - 4x + 3 = 0 & ii)2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ iii)x^2 - 5x - 6 = 0 & iv)3x^2 - 13x - 10 = 0 \\ v)x^2 - 6x - 7 = 0 & vi)x^2 - 3x - 8 = 0 \end{array}$$

11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\begin{array}{ll} i)x^2 - 4x + 4 = 0 & ii)x^2 - 10x + 25 = 0 \\ iii)9x^2 - 6x + 1 = 0 & iv)3x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \\ v)x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0 & vi)9 - 6x + x^2 = 0 \\ vii)16x^2 - 8x + 1 = 0 & viii)13x^2 - 4\sqrt{13}x + 4 = 0 \\ ix)x^2 + 2\sqrt{5}x + 5 = 0 & x)49x^2 - 14x + 1 = 0 \end{array}$$

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\begin{array}{ll} i)-x^2 + 5x - 6 = 0 & ii)-x^2 - 10x - 25 = 0 \\ iv)-3x^2 + 6x - 3 = 0 & v)2x^2 - 14x + 20 = 0 \\ vii)5x^2 - 25x + 30 = 0 & viii)-3x^2 + 30x - 27 = 0 \end{array}$$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$\begin{array}{l} i)(x-3)(x+2)(2x+1) = 0 \\ ii)(2x-1)(2x+3)(7x+9) = 0 \\ iii)(x^2-4)(x^2-3) = 0 \\ iv)x^3 - x = 0 \\ v)64x^6 - x^4 = 0 \\ vi)x^5 - 25x^3 = 0 \\ vii)2x^3 - 4x^2 - 5x + 10 = 0 \\ viii)x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \\ ix)x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \end{array}$$

12. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i)(3x-1)(x-2)^2 + 4x(3x-1) = 0$$

$$ii)(2x+3)^2 - (4x^2 - 9) + 2x + 3 = 0$$

$$iii)(x+1)(2-x)(x+3) + (x+1)(2-x)(5-2x) - (x+1)(x-2) = 0$$

$$iv)x^2(x-4) - 2x(4-x) + x - 4 = 0$$

$$v)(x+1)^3 + x^2 - 1 = 0$$

$$vi)(17x^2 - 1)^2 - 64x^4 = 0$$

$$vii)(x^2 - 4)^2 - (x^2 - 12)^2 = 0$$

$$viii)(3x^2 - 1)^2 - (2x^2 - 4)^2 = 0$$

$$ix)(4 - x^2)^2 - (3x^2 - 1)^2 = 0$$

4.3 Τύπος εξισώσεων 2^{ου} βαθμού

Δευτεροβάθμια εξίσωση είναι η $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν $\Delta > 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει μια διπλή πραγματική ρίζα την

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες

Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση : $x^2 - 5x + 6 = 0$

Λύση:

$$\alpha = 1$$

$$\beta = -5$$

$$\gamma = 6$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad \text{και} \quad x_2 = 2$$

Ασκήσεις στην δευτεροβάθμια εξίσωση

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $x^2 - x - 2 = 0$

ii) $2x^2 + 3x - 5 = 0$

iii) $4x^2 - 28x + 49 = 0$

iv) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

v) $x^2 - 3x + 13 = 0$

vi) $x^2 + x + 1 = 0$

vii) $2x^2 - 3x = 0$

viii) $x^2 - 15 = 0$

ix) $5y^2 + 2y - 1 = 0$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $5(x^2 + 1) - 3x = 2x(2x + 1) - 1 =$

ii) $(x - 3)^2 + 12 + (x + 1)(x - 1) = (x + 2)^2$

iii) $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(x-2)^2}{4} = \frac{14-5x}{12}$

iv) $-6\omega^2 + 7\omega - 2 = 0$

v) $-2x^2 + 4x + 16 = 0$

vi) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 + (\sqrt{k} + \sqrt{\lambda})x + \sqrt{k\lambda} = 0$

ii) $x^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$

4. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 2)x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda^2 + 1 = 0$

i) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η παραπάνω εξίσωση να είναι δευτέρου βαθμού.

ii) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 2. Στη συνέχεια για τις τιμές αυτές να λυθεί η εξίσωση.

5. Δίνεται η εξίσωση : $2x^2 - 4x + 3\lambda = 0$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση δεν έχει λύσεις .

6. Να λυθεί η εξίσωση : $4kx^2 + (6k - 2)x - (2k + 9) = 0$

Αν το k είναι η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $6x^2 - 5x + 1 = 0$ $6x^2 - 5x + 1 = 0$

$6x^2 - 5x + 1 = 0$

7. Να λύσετε την εξίσωση: $kx^2 - (k - \lambda)x - \lambda = 0, k \neq 0$

8. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 - 6|x| + 8 = 0$

ii) $(x+3)^2 - |x+3| - 2 = 0$

iii) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

iv) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $(x+3)(x^2 - 7x + 10) = 0$

ii) $(x-2)(x^2 + 2)(x^2 - 9)(x^2 + x - 2) = 0$

iii) $x(x-7)(x-2) + 12(x-2) = 0$

iv) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

v) $x^6 - 64 = 0$

10. Να λύσετε την εξίσωση :

$$(x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) + 6 = 0$$

11. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό του οποίου το γινόμενο των $3/4$ του και των $5/3$ του ισούται με 180.

12. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο ελαττωμένο κατά το τριπλάσιο του αριθμού ισούται με 28.

13. Τα μήκη των τριών πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς .

14. Δύο ακέραιοι αριθμοί έχουν άθροισμα 15 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι 117. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς .

15. Να βρεθούν οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.

4.4 Κλασματικές εξισώσεις

Κλασματικές εξισώσεις : είναι οι εξισώσεις που έχουν άγνωστο στον παρονομαστή

Βήματα επίλυσης κλασματικής εξίσωσης

1^ο παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές

2^ο βρίσκουμε το Ε.Κ.Π των παρονομαστών και παίρνουμε περιορισμούς $E.K.Π \neq 0$

3^ο κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών

4^ο λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

5^ο απορρίπτουμε τις λύσεις που δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς.

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση :

$$1 - \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{3x^2}{x^2 - 4} + \frac{3}{2 - x}$$

Λύση:

$$1 - \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{3x^2}{x^2 - 4} + \frac{3}{2 - x}$$

$$1 - \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{3x^2}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{3}{x - 2}, \quad \text{Ε.Κ.Π : } (x - 2)(x + 2) \neq 0 \rightarrow x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

$$\begin{aligned} (x - 2)(x + 2)1 - (x - 2)(x + 2)\frac{2x - 1}{x + 2} \\ = (x - 2)(x + 2)\frac{3x^2}{(x - 2)(x + 2)} - (x - 2)(x + 2)\frac{3}{x - 2} \end{aligned}$$

$$x^2 - 4 - (2x^2 - x - 4x + 2) = 3x^2 - 3x - 6$$

$$x^2 - 4 - 2x^2 + x + 4x - 2 - 3x^2 + 3x + 6 = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$-4x(x - 2) = 0$$

$$-4x = 0 \text{ ή } x - 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ (δεκτή) ή } x = 2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Ασκήσεις στις κλασματικές εξισώσεις

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) \frac{4x+5}{3} - \frac{x-5}{5} = x + 6$$

$$ii) 2x - \left(\frac{5x}{3} - 3\right) = 3x + \frac{x-6}{3}$$

$$iii) 2x + \frac{1}{2}(2x-19) = \frac{1}{2}(2x-11)$$

$$iv) \frac{3x}{2} - x = \frac{x-10}{2} + 5$$

$$v) \frac{3x}{4} - \frac{16+7x}{20} = \frac{2x-4}{5}$$

$$vi) 2x + \frac{5x}{7} = 10\left(\frac{x}{14} + 2\right)$$

$$vii) \frac{x-2}{x-3} = \frac{2-x}{6-x}$$

$$viii) \frac{x-3}{x+1} - \frac{3x+7}{3x-1} = 0$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \frac{2x}{x+1} + \frac{x+7}{x^2+4x+3} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$ii) \frac{x}{2x+1} + \frac{x+1}{2x-1} = \frac{(2x+1)^2 - 2x}{4x^2 - 1}$$

$$iii) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x} = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

$$iv) \frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{1-x}$$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \frac{x}{x^2+5x+6} - \frac{x+3}{x^2-4} + \frac{3}{x^2+x-6} = -\frac{1}{2-x}$$

$$ii) \frac{1}{2x-8} + \frac{4}{16-x^2} = \frac{1}{2x+8}$$

$$iii) \frac{x^2-5}{x^2-4} + \frac{x+1}{2x+4} + \frac{27}{3x^2-12} = -\frac{x+3}{6-3x}$$

$$iv) \frac{x^2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = \frac{2}{x+1}$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6} = 0$$

$$ii) \frac{1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{x^2-7x+12} = \frac{2}{x^2-6x+8}$$

$$iii) \frac{1}{x^2+3x+2} - \frac{2}{(x^2+4x+3)(x+2)} = \frac{1}{x^2+5x+6}$$

5. Να βρείτε δύο αριθμούς που διαφέρουν κατά 2 και το άθροισμα των αντίστροφών τους είναι $\frac{8}{15}$.

6. Ένας αριθμός είναι κατά μία μονάδα μικρότερος από δωδεκαπλάσιο του αντίστροφού του. Βρείτε τον αριθμό αυτόν.

7. Να λυθούν οι παρακάτω κλασματικές εξισώσεις:

$$i) \frac{4-x}{x^2+2x} + \frac{3}{2+x} = \frac{2}{x}$$

$$ii) \frac{3x-2}{x+2} + \frac{x+2}{3x-2} = \frac{17}{4}$$

$$iii) \frac{3x-2}{x(x+1)} = \frac{6}{x^2+3x+2} - \frac{1}{2x}$$

$$iv) \frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{2}{x+2}$$

$$v) \frac{1}{x+1} - 5 = \frac{x^2}{x+1}$$

$$vi) \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+2} = 1$$

$$vii) \frac{4x+1}{4x-1} = \frac{16x^2+3}{16x^2-1}$$

$$viii) \frac{x-1}{x} = \frac{x^2+5}{x^2-x}$$

$$ix) \frac{x}{x-2} + \frac{1}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x} = 0$$

$$x) \frac{4}{x^2+2x-3} - \frac{x+1}{2-2x} = \frac{x+2}{x+3}$$

$$xi) \frac{5x}{x^2-16} + \frac{2}{x-4} + \frac{3}{x+4} = 0$$

$$xii) \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2-x} + \frac{2x}{x^2-4} = 1$$

$$xiii) \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2+2x} = \frac{2x-1}{x(x+2)}$$

$$xiv) \frac{3}{x+1} - \frac{x^2-7}{x^2-1} = \frac{2}{x-1}$$

$$xv) \frac{3}{4-2x} + \frac{30}{8(1-x)} = \frac{3}{2-x} + \frac{5}{2-2x}$$

$$xvi) \frac{2x-3}{x-3} - \frac{2(x+1)}{x+2} = \frac{15}{x^2-x-6}$$

$$xvii) \frac{2}{x+5} - \frac{1}{x+2} = \frac{x-3}{x^2+7x+10}$$

$$xviii) \frac{2}{x(x+2)} = -\frac{1}{x^2+5x+6}$$

8. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{5}{x+3} - \frac{2x+1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2}$$

$$\text{ii)} \frac{5x}{2x-2} + \frac{7x}{3x-3} = \frac{6x}{x-1}$$

$$\text{iii)} \frac{7}{2x^2-x} - \frac{8}{2x^2+x} = \frac{3}{4x^2-1}$$

$$\text{iv)} \frac{x-3}{x} - \frac{6}{3-x} = \frac{18}{x^2-3x}$$

$$\text{v)} 1 + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{3-x} = \frac{2x}{x^2-9}$$

9. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\text{i)} \frac{x-2}{2x} - \frac{2}{2-x} - \frac{4}{x^2-2x} = 0$$

$$\text{ii)} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{2-x} + \frac{2x}{x^2-4} = 1$$

$$\text{iii)} \frac{1}{x} + \frac{1-x}{x+x^2} = \frac{1+x}{x^2-x} - \frac{3}{2x}$$

$$\text{iv)} \frac{2x-1}{x+2} + \frac{1-x}{2-x} = \frac{4}{x^2-4}$$

10. Δίνεται ο τύπος $PV=nRT$. Να λύσετε τον τύπο ως προς:

A) P B) V

Γ) n

Δ) R

11. Δίνεται ο τύπος $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Να λύσετε τον τύπο ως προς:

A) R B) R_1

Γ) R_2

12. i) Να απλοποιηθούν οι κλασματικές παραστάσεις:

$$A = \frac{3x^2-6x}{2x^2-8} \text{ και } B = \frac{9(2x+1)^2 - (4x-1)^2}{x^2+4x+4}$$

ii) Να λυθεί η εξίσωση $A-B=0$.

13. Να βρεθεί ένας αριθμός (διαφορετικός από το μηδέν) τέτοιος ώστε το άθροισμά του με τον αντίστροφό του να είναι κατά μία μονάδα μικρότερο από το πηλίκο του με τον αντίστροφό του.
14. Το άθροισμα ενός αριθμού και του διπλάσιου του αντιστρόφου του είναι 3. Να βρείτε τον αριθμό αυτό.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να γράψετε τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας Δ .

Μονάδες 7

A₂. Να γράψετε τις λύσεις της ανίσωσης $ax + \beta < 0$ για τις διάφορες τιμές του α .

Μονάδες 7

A₃. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$, όπου α και β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$

α. Να υπολογίσετε την διακρίνουσα της εξίσωσης και να δικαιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον λύση.

Μονάδες 5

β. Αν η εξίσωση έχει λύση τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{2}$ να υπολογίσετε τους α και β .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (x + 1)^2 + (x - 1)^3 - x^3 + 7$$

B₁. Να αποδείξετε ότι $P(x) = -2x^2 + 5x + 7$

Μονάδες 9

B₂. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$

Μονάδες 8

B₃. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$Κ = (2x-1)^2 + 4x(x-2)$$

$$Λ = (3x-2)(2+3x) - (x^2 - 2)$$

Γ₁. Να γίνουν οι πράξεις στις παραστάσεις Κ και Λ.

Μονάδες 6

Γ₂. Να υπολογιστεί η διαφορά Κ-Λ.

Μονάδες 4

Γ₃. Να λυθεί η εξίσωση Κ – Λ=0.

Μονάδες 7

Γ₄. Να λυθεί η εξίσωση Α-3Β=-17x²-20.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δ₁. Να γίνουν γινόμενο παραγόντων οι παραστάσεις:

$$α. x^2 - 1$$

Μονάδες 2

$$β. (x+2)(x-2)^2 - 81(x+2)$$

Μονάδες

Δ₂. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$Α = \frac{(x+2)(x-2)^2 - 81(x+2)}{(x+7)(x-11)} \quad Β = \frac{x^2-1}{x-1} \cdot \frac{1}{(-x-1)(x+2)}$$

Μονάδες 12

Δ3. Να δείξετε ότι $(AB)^{2015} < 0$

15. Συστήματα

1^η μέθοδος : Η μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε την μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο

1^ο παράδειγμα :

Να λυθεί το σύστημα :
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 & (1) \\ -x + 2y = 2 & (2) \end{cases}$$

Λύση :

Λύνοντας την δεύτερη σχέση ως προς x έχουμε : $x = 2y - 2$

Και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε : $2(2y - 2) - 3y = 0$ οπότε $y = 4$ και $x = 6$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (6, 4)$

2^η μέθοδος : Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών

(ή μέθοδος Gauss)

Πολλαπλασιάζουμε τις δύο εξισώσεις του συστήματος με κατάλληλους αριθμούς έτσι ώστε ο ίδιος άγνωστος να προκύψει με αντίθετους συντελεστές στις δύο εξισώσεις , οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε εξίσωση με έναν άγνωστο.

2^ο παράδειγμα :

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Λύση:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot (2) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -15 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$7y = -7$$

Απο την τελευταία εξίσωση παίρνουμε ότι $\frac{7y}{7} = \frac{-7}{7} \Leftrightarrow y = -1$

για $y = -1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $x = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Σε ένα γραμμικό σύστημα κάθε μια από τις εξισώσεις παριστάνει μια ευθεία

Είναι γνωστό από την γεωμετρία ότι δυο ευθείες μπορούν:

- Είτε να τέμνονται (οπότε λέμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση)
- Είτε να ταυτίζονται (οπότε λέμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις)
- Είτε να μην έχουν κανένα κοινό σημείο (πότε το σύστημα είναι αδύνατο)

Ασκήσεις στα γραμμικά συστήματα

1. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} x = 2 \\ y = 3x - 1 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x = 2y - 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad iv) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + y = 11 \end{cases} \quad v) \begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases} \quad iv) \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 7y = -1 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 5x - 2 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x = \frac{3y - 1}{2} \\ x = y - 3 \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα συστήματα:

$$i) \begin{cases} \frac{x - 2y}{3} = 1 \\ \frac{3x - y}{2} = -2 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x + 2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$$
$$iii) \begin{cases} \frac{7x + y}{3} - \frac{y - 1}{2} = x + 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y - 1}{4} = -x + 1 \end{cases} \quad iv) \begin{cases} x - \frac{x - y}{3} = 5 - 2y \\ 1 - \frac{2x - 3y}{5} = \frac{x + 6}{10} - y \end{cases}$$

5. Να λύσετε τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x - 2(x - y + 1) = 3y - 1 \\ 11 + 3(x - 1) = x - 2(y - 3) \end{cases}$$

6. Να λύσετε τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} 2x - y(x - 1) = -1 + x(3 - y) \\ xy - x(2x - 1) = 1 - (2x - y)(x + 1) \end{cases} \quad ii) \begin{cases} xy - (x - 1)^2 = 3 - (x - 1)(x - y) \\ y - 2(x - 1)(x + 1) = 1 - 2x(x - 1) \end{cases}$$

7. Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών :

$$a) \varepsilon_1: y = 2x - 1 \text{ και } \varepsilon_2: y = x + 2$$

$$b) \varepsilon_1: -y + 2x = 3 \text{ και } \varepsilon_2: y + x = 1$$

8. Αν το σύστημα :

$$\begin{cases} 2\alpha x - \beta y = -1 \\ \beta x - \alpha y = 1 \end{cases}$$

Έχει λύση την $x=-1$ και $y=1$ να βρείτε τους αριθμούς α και β

9. Αν το σύστημα

$$\begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta y = \alpha + 3 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y = 3\beta + 5 \end{cases}$$

Έχει λύση την $x=3$ και $y=2$ να βρείτε τα α και β

$$10. \text{Αν τα συστήματα } \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} \alpha x - \beta y = 3 \\ x + \alpha y = 2\beta \end{cases}$$

Έχουν κοινή λύση να βρείτε τα α και β

11.Βρείτε ένα διψήφιο αριθμό που το άθροισμα των ψηφίων του είναι 9 και αν αντιστρέψουμε τα ψηφία του προκύπτει αριθμός κατά 27 μικρότερος

12.Βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 50 και αν διαιρέσουμε το μεγαλύτερο με το μικρότερο τότε θα προκύψει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 8

13.Σε ένα ταξίδι με αεροπλάνο το εισιτήριο Α΄ θέσης κοστίζει 120 ευρώ και της Β΄ θέσης κοστίζει 40 ευρώ λιγότερα . Αν στο ταξίδι κόπηκαν 150 εισιτήρια

συνολικής αξίας 12800 ευρώ , να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν από κάθε κατηγορία.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΕΣ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ – ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Α

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{2(x^2-3)}{x-1} \text{ και } B = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2-x}$$

A1. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραπάνω παραστάσεις.

Μονάδες 10

A2. Να λύσετε την εξίσωση

$$A + B = \frac{2(x^2-3)}{x} - \frac{11}{x^2-x}$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι παραστάσεις

$$K = 2(x-3) + x \text{ και } \Lambda = (x-2)^2 - x^2$$

B1. Να λυθούν οι ανισώσεις

$$K \leq \Lambda \text{ και } K > 9$$

Μονάδες 14

B2. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων.

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_1: x + 2(x + 3y) = -9$$

$$\varepsilon_2: (x - 3)^2 - x(x - y) = y(x + 1) + 5$$

Γ1. Να βρεθεί το σημείο τομής των δύο ευθειών.

Μονάδες 15

Γ2. Η ευθεία $\varepsilon_3: x + y = 1$ διέρχεται από το κοινό σημείο των ευθειών ε_1 και ε_2 ;

Μονάδες 10

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A₁.Τι ονομάζεται λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

Μονάδες 9

A₂.Τι σημαίνει γραφικά ότι ένα γραμμικό σύστημα:

- i)** είναι αδύνατο
- ii)** είναι αόριστο

Μονάδες 6

A₃.Να σημειώσετε **Σ** για τις **Σωστές** και **Λ** για τις **Λάθος** προτάσεις.

α. Το σημείο A(2,1) ανήκει στην ευθεία $x + 2y = 4$

β. Αν ένα γραμμικό σύστημα είναι αόριστο, δεν έχει καμία λύση.

γ. Οι ευθείες $x + y = 1$ και $2x = 3 - 2y$ είναι παράλληλες.

δ. Οι ευθείες $x + y = 5$ και $x + y = -5$ έχουν ακριβώς μία λύση.

ε. Αν ένα γραμμικό σύστημα είναι αδύνατο, οι ευθείες που ορίζονται ταυτίζονται.

Μονάδες 10

Θέμα Β

B₁.Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2x - y}{2} = \frac{-y + 4x}{3} \\ \frac{x - y}{3} = 2 - \frac{x + 3}{4} \end{cases}$$

Μονάδες 12

B₂.Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} x + 3 + (y + 1)^2 = y^2 \\ 3(x + 2y) = 2 \end{cases}$$

Μονάδες 13

Θέμα Γ

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = ax + \beta$.

Γ₁. Να βρεθούν τα α και β ώστε η ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(-3,-1)$.

Μονάδες 9

Γ₂. Για $\alpha=1$ και $\beta=2$ να βρεθούν τα κοινά σημεία της ε με τους άξονες.

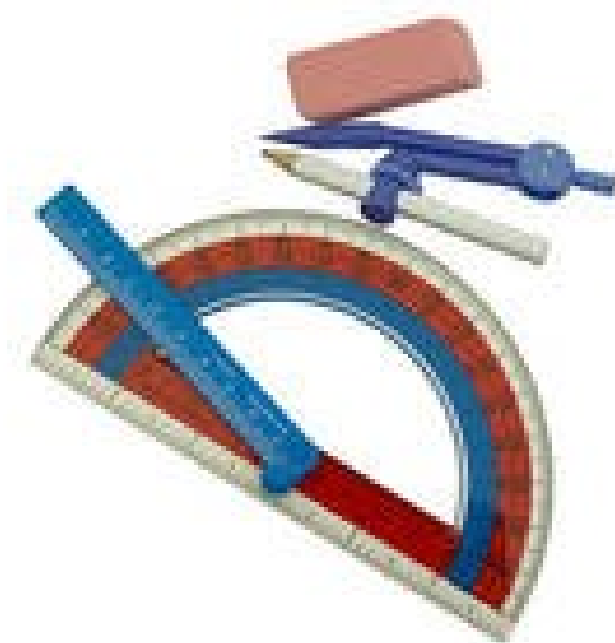
Μονάδες 8

Γ₃. Αν είναι K και Λ τα παραπάνω σημεία να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $K\Omega\Lambda$.

Μονάδες 8

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Γεωμετρία

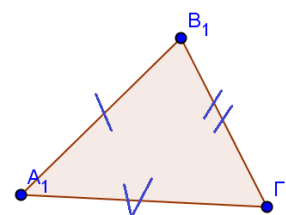
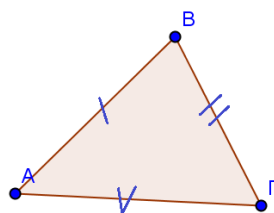


4. Γεωμετρία

4.1 Ισότητα τριγώνων

Ίσα τρίγωνα :

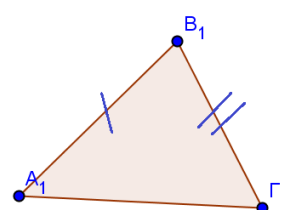
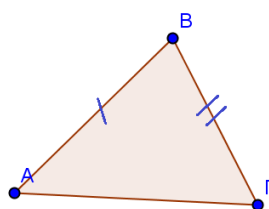
Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες



Κριτήρια ισότητας τριγώνων

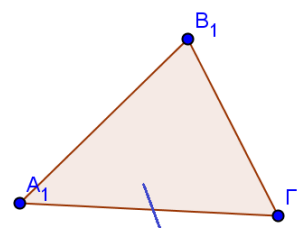
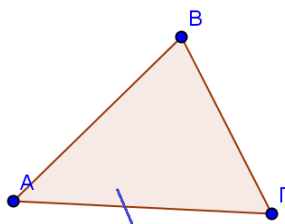
1^ο κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές στους ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα



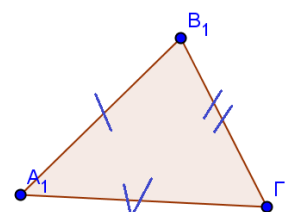
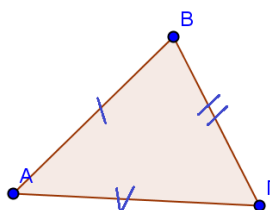
2^ο κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα είναι ίσα



3^ο κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα



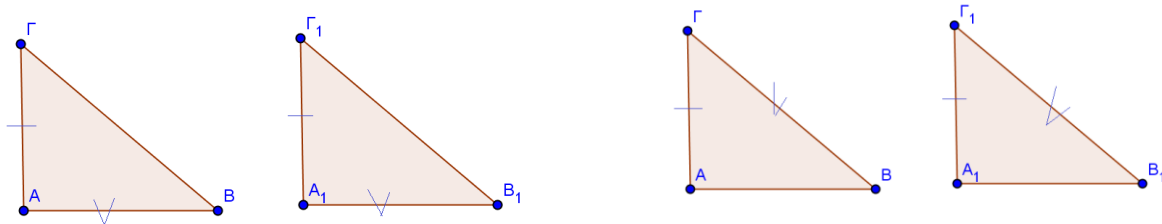
Παρατήρηση:

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε τα τρίγωνα **δεν** είναι απαραίτητα ίσα

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

1^ο κριτήριο

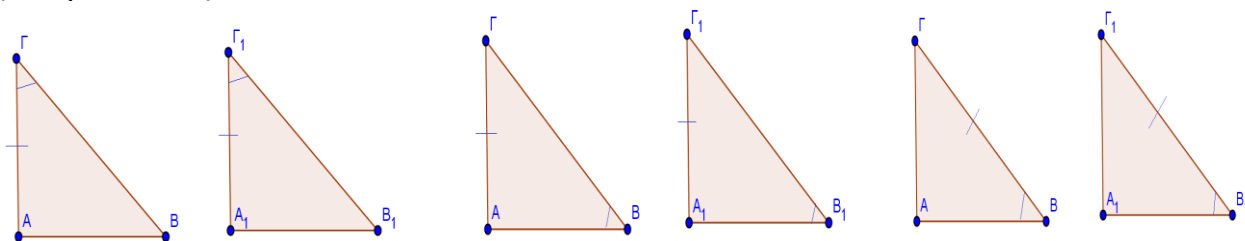
Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία , τότε



είναι ίσα.

2^ο κριτήριο

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια αντίστοιχη πλευρά ίση και μια αντίστοιχη οξεία γωνία ίση , τότε είναι



ίσα .

Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος
- Η διάμεσος της βάσης είναι διχοτόμος και ύψος
- Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος

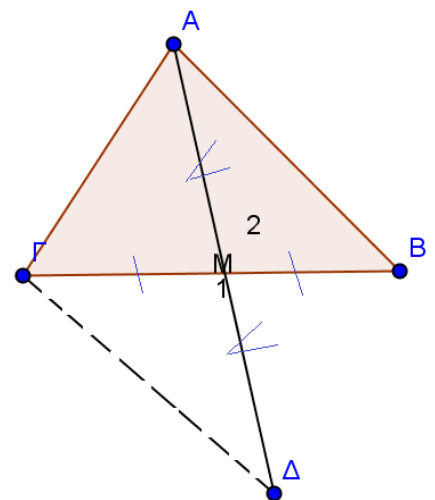
Παρατήρηση

1. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του
2. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της

Λυμένη άσκηση

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε τη διάμεσο AM και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $M\Delta=AM$. Να αποδείξετε ότι $AB=\Gamma\Delta$.

Λύση:



Υπόθεση	$BM = M\Gamma$ $M\Delta = AM$
Συμπέρασμα	$AB = \Gamma\Delta$

--	--

Συγκρίνω τα τρίγωνα AMB και ΓΜΔ

1. $AM=MD$ (από υπόθεση)
2. $GM=MB$ (AM διάμεσος)
3. $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Από ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα

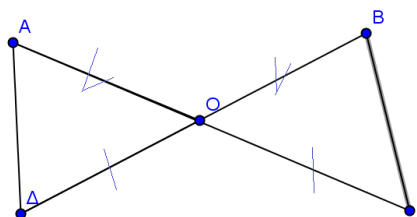
Άρα θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα δηλαδή

$GD=AB$

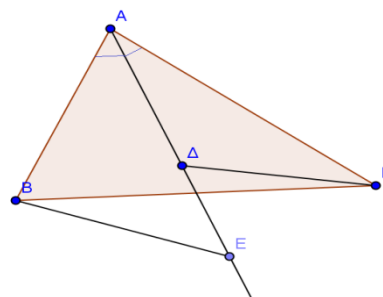
Ασκήσεις στην ισότητα τριγώνων

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος
 - a) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές
 - b) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μια προς μία και μία πλευρά ίση τότε είναι ίσα
 - c) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία είναι ίσα
 - d) Στο ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία που ορίζει η διχοτόμος από την κορυφή του είναι μεσοκάθετος της βάσης του .
 - e) Υπάρχει σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας που δεν ισαπέχει από τις πλευρές της
 - f) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μία τότε είναι ίσα

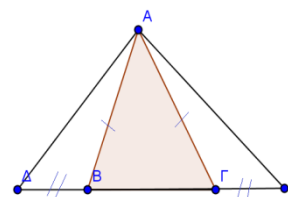
2. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι $AD=BG$



3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, τη διχοτόμο Ax της γωνίας $\hat{A}$ και τα σημεία Δ και E ώστε $AD=AB$ και $AE=AG$. Να αποδείξετε ότι $BE=\Gamma\Delta$.

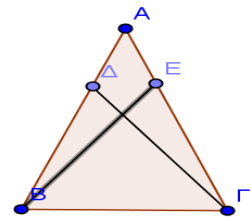


4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και στην προέκταση της διαμέσου BM , το τμήμα $DM=BM$. Να αποδείξετε ότι $AB=\Gamma\Delta$.



5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές .Αν $BD=\Gamma E$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές

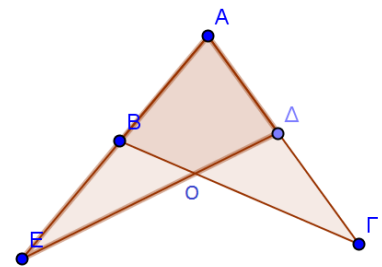
6. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma$. Αν $AD=AE$, να δείξετε ότι: $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\epsilon\Gamma}$



7. Αν τα τμήματα $A\Gamma$ και $B\Delta$ τέμνονται στο O , ώστε $OA=OB$ και $\widehat{O\Delta\Delta} = \widehat{O\beta\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $AD=B\Gamma$

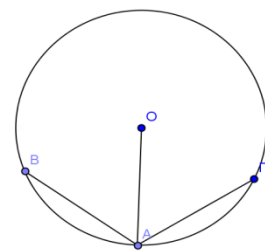
8. Στο διπλανό σχήμα έχουμε $AD=AB$ και $AE=AG$. Να αποδείξετε ότι :

- $\hat{E} = \hat{\Gamma}$ και $\widehat{EB\theta} = \widehat{\Gamma\Delta\theta}$
- $OB=OD$
- η AO είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$



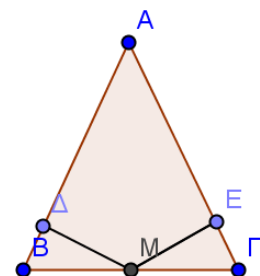
9. Αν O το κέντρο του κύκλου του διπλανού σχήματα και $AB=AG$, να αποδείξετε ότι :

- η AO διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$
- η AO είναι μεσοκάθετος της χορδής $B\Gamma$

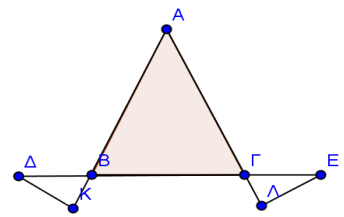


10. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και M το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Αν $M\Delta \perp AB$ και $ME \perp AG$, να αποδείξετε ότι :

- $M\Delta=ME$
- η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{M}E$

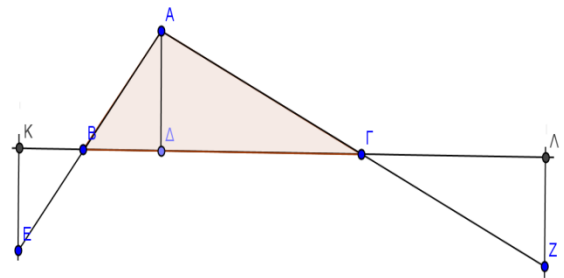


11. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το A , $BD=GE$ και $\Delta K \perp AB$, $E\Lambda \perp A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα Δ και E ισαπέχουν από τις AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα



12. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM η διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι οι κορυφές B , Γ ισαπέχουν από την AM

13. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Αν $BE=AB$, $\Gamma Z=A\Gamma$ και $E\kappa \perp B\Gamma$, $Z\Lambda \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι :



- a) $E\kappa = A\Delta$
b) Τα σημεία E και Z ισαπέχουν από τη $B\Gamma$

4.2 Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων

Ο λόγος δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι ίσος με το λόγο των μηκών τους , εφόσον έχουν μετρηθεί με την ίδια μονάδα μέτρησης

$$\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \lambda \Leftrightarrow AB = \lambda \cdot \Gamma\Delta$$

Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

Τα ευθύγραμμα τμήματα α , γ είναι ανάλογα προς τα ευθύγραμμα τμήματα β , δ

όταν ισχύει $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

Ιδιότητες αναλογιών

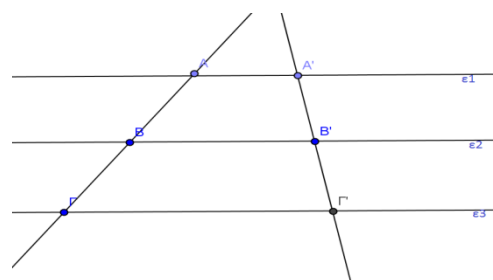
1) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\alpha\delta = \beta\gamma$

2) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$

3) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$

Θεώρημα 1^ο

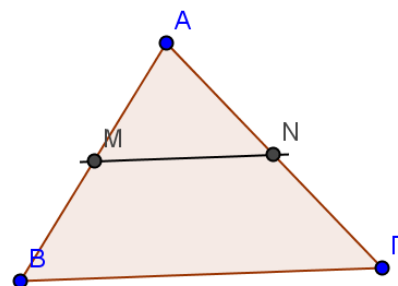
Αν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία , τότε ορίζουν ίσα τμήματα σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει



Δηλαδή Αν $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και $AB = B\Gamma$ τότε $A'B' = B'\Gamma'$

Θεώρημα 2°

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του τότε αυτή θα διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς

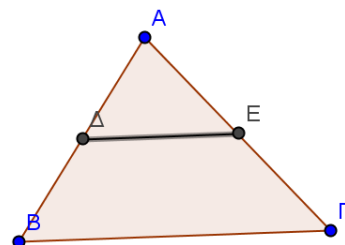


Δηλαδή

$$\text{Αν } \begin{cases} M : \text{μέσον } AB \\ MN \parallel B\Gamma \end{cases} \text{ τότε } N \text{ μέσον } A\Gamma$$

Θεώρημα 3°

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την Τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της

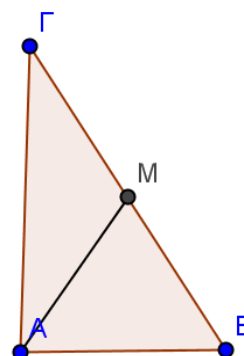


$$\text{Δηλαδή : Αν } \begin{cases} \Delta : \text{μέσον της } AB \\ E : \text{μέσον της } A\Gamma \end{cases} \text{ τότε } \begin{cases} \Delta E \parallel B\Gamma \\ \Delta E = \frac{B\Gamma}{2} \end{cases}$$

Θεώρημα 4°

Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας .

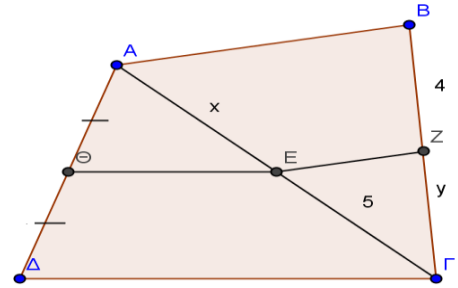
Δηλαδή σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ:



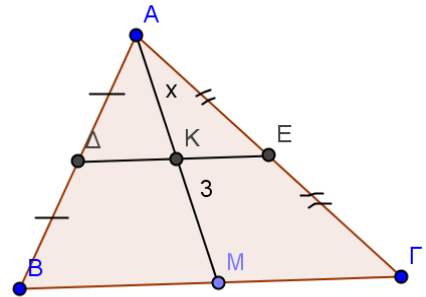
$$Αν \begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ M: \text{μέσον της } B\Gamma \end{cases} \text{ Τότε } AM = \frac{B\Gamma}{2}$$

Ασκήσεις στις αναλογίες

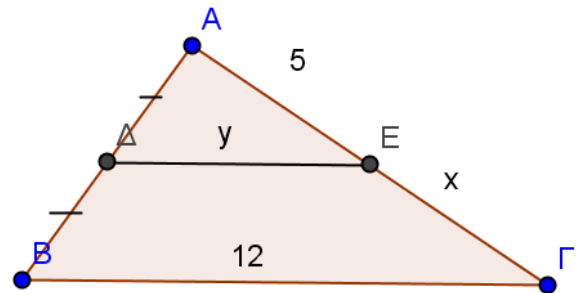
1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και είναι $EZ \parallel AB$, $E\Theta \parallel \Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε το x και το y



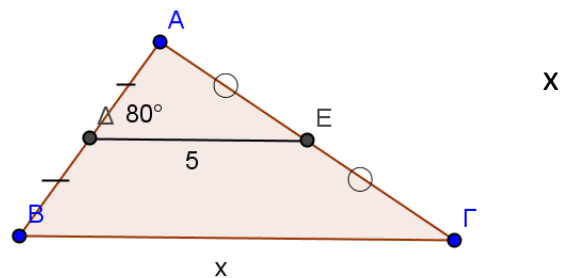
2. Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε το x



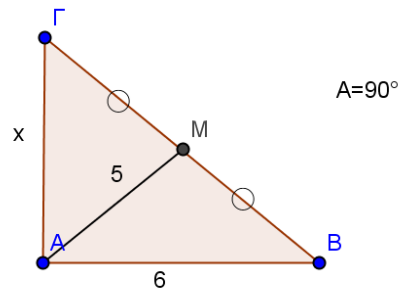
3. Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{B} = \hat{A\Delta E}$. Να υπολογίσετε το x και y



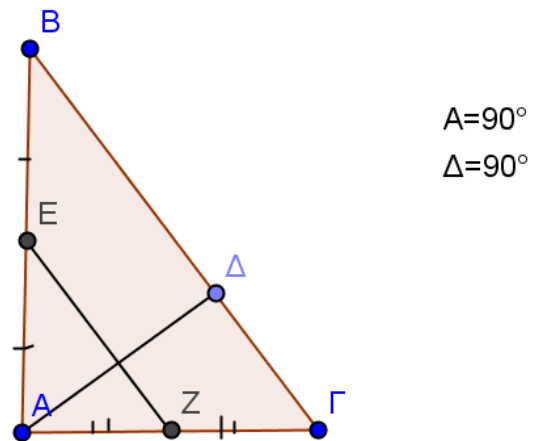
4. Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε τη γωνία B και το



5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το x

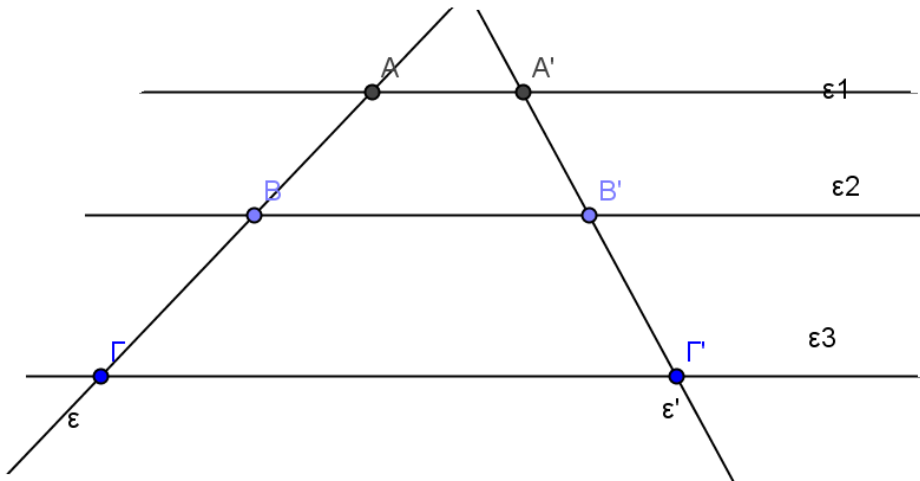


6. Στο διπλανό σχήμα
είναι $AB=6$ και $AG=12$.
Να υπολογίσετε τις
πλευρές του τριγώνου
 ΔEZ



4.3 Θεώρημα του Θαλή

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη

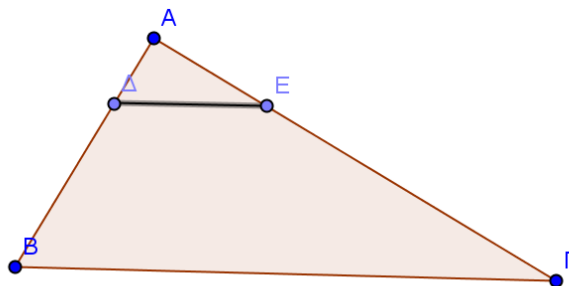


Δηλαδή :

$$\text{Αν } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \text{ τότε } \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

Παρατήρηση:

Έστω τα σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχως του τριγώνου ΑΒΓ

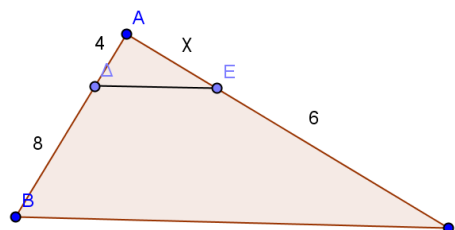


- Αν $DE \parallel B\Gamma$ τότε $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

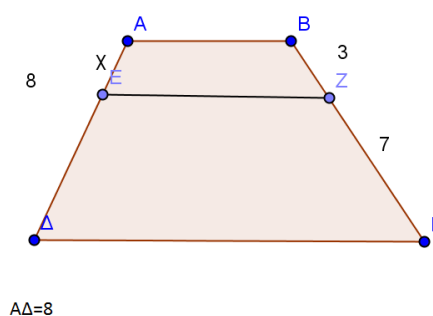
- Αν $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$ τότε $DE \parallel BG$

Ασκήσεις στο Θεώρημα Θαλή

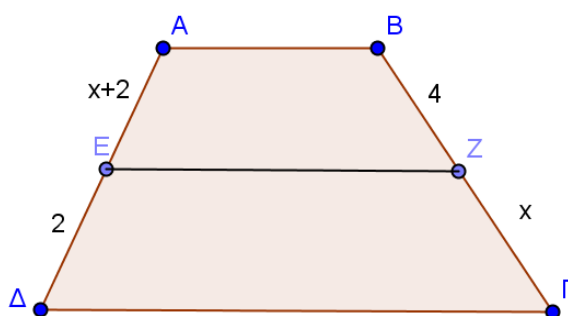
1. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε το x .



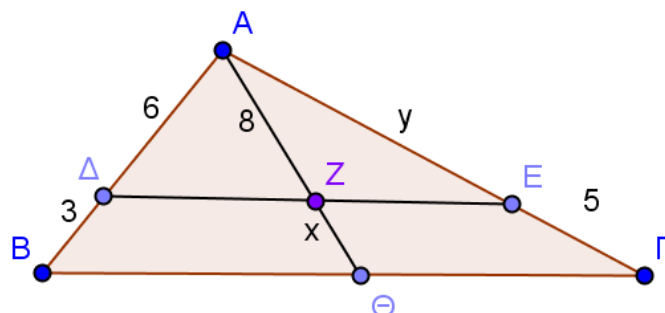
2. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η EZ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το x



3. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ η EZ είναι παράλληλη στις βάσεις του. Να υπολογίσετε το x

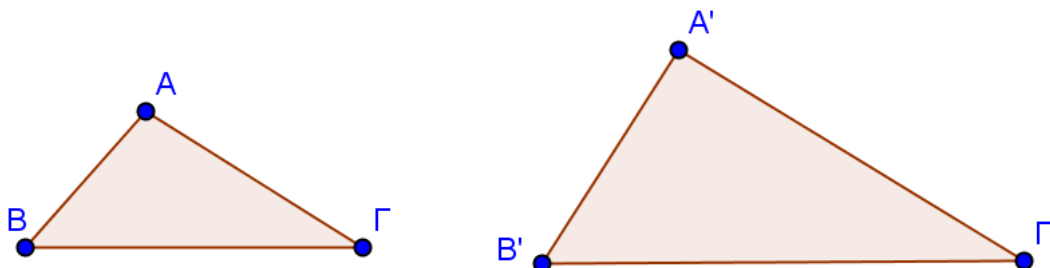


4. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$. Να υπολογίσετε τα x και y .



4.4 Όμοια τρίγωνα – λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων

Δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι όμοια όταν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες



Δηλαδή :

$$\text{Αν } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \text{ και } \widehat{\Gamma'} = \widehat{\Gamma}, \widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B} \text{ τότε } A'B'\Gamma' \approx AB\Gamma$$

$$\text{Αν } A'B'\Gamma' \approx AB\Gamma \text{ τότε } \left\{ \begin{array}{l} \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \\ \widehat{\Gamma'} = \widehat{\Gamma}, \widehat{A'} = \widehat{A}, \widehat{B'} = \widehat{B} \end{array} \right.$$

Παρατήρηση :

- 1) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία , τότε είναι όμοια.
- 2) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση , είναι όμοια

Λόγος ομοιότητας : δύο όμοιων τριγώνων είναι ο λόγος δύο αντίστοιχων πλευρών

Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας τους

$$\text{Αν } AB\Gamma \approx A'B'\Gamma' \text{ τότε } \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \lambda^2$$

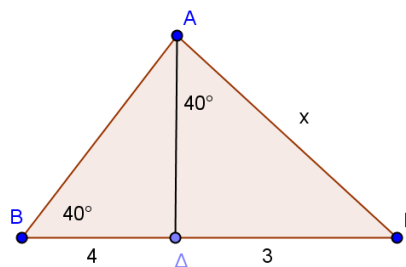
Όπου λ : ο λόγος ομοιότητας

Ασκήσεις στα όμοια τρίγωνα

1. Στο διπλανό σχήμα, να δείξετε ότι :

a) Τα τρίγωνα ABΓ και AΔΓ είναι όμοια

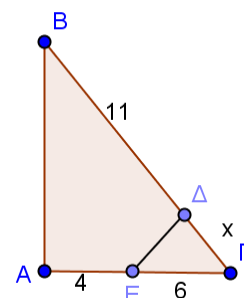
b) Να υπολογίσετε το x



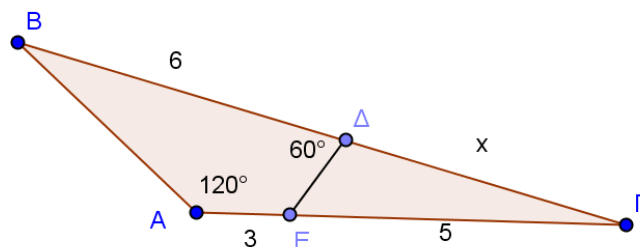
2. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΓ είναι όμοια

και να υπολογίσετε το x

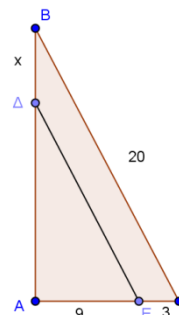
Αν $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{D} = 90^\circ$



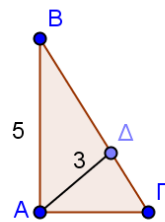
3. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΓ είναι όμοια και να υπολογίσετε το x



4. Αν $DE \parallel BG$, να υπολογίσετε το x, $\hat{A} = 90^\circ$



5. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τον λόγο $\frac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)}$ και μετά το εμβαδόν του ΑΒΓ. $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Delta} = 90^\circ$



ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Μονάδες 8

A₂. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

Μονάδες 8

A₃. Να σημειώσετε Σ για τις Σωστές και Λ για τις Λάθος προτάσεις:

α. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά ίση, είναι ίσα.

Σ Λ

β. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο τα ύψη είναι και διάμεσοι.

Σ Λ

γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Σ Λ

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Να δειχθεί ότι:

B₁. BE = AB

Μονάδες 8

B₂. $ΑΓ = ΕΓ$

Μονάδες 9

B₃. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΓΕ$ είναι ίσα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στις ίσες πλευρές $ΑΒ$, $ΑΓ$ ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$ παίρνουμε ίσα τμήματα $ΑΔ$, $ΑΕ$. Φέρνουμε $ΔΖ ⊥ ΒΓ$ και $ΕΗ ⊥ ΒΓ$.

Να δείξετε ότι:

Γ₁. $ΔΖ = ΕΗ$

Μονάδες 8

Γ₂. $ΔΗ = ΖΕ$

Μονάδες 8

Γ₃. $ΒΕ = ΓΔ$

Μονάδες 9

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

A₁. Να διατυπώσετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Μονάδες 8

A₂. Πότε δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα;

Μονάδες 8

A₃. Να σημειώσετε Σ για τις Σωστές και Λ για τις Λάθος προτάσεις:

α. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία κάθετη πλευρά ίση, είναι ίσα.

Σ Λ

β. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο τα ύψη είναι και διάμεσοι.

Σ Λ

γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Σ Λ

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Να δειχθεί ότι:

B₁. BE = AB

Μονάδες 8

B₂. $ΑΓ = ΕΓ$

Μονάδες 9

B₃. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΕ είναι ίσα.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ. Φέρνουμε $ΔΖ ⊥ ΒΓ$ και $ΕΗ ⊥ ΒΓ$.

Να δείξετε ότι:

Γ₁. $ΔΖ = ΕΗ$

Μονάδες 8

Γ₂. $ΔΗ = ΖΕ$

Μονάδες 8

Γ₃. $ΒΕ = ΓΔ$

Μονάδες 9

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

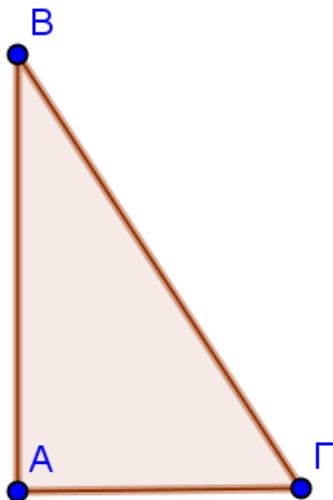
Τριγωνομετρία



5. τριγωνομετρία

5.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



$$\eta\mu B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

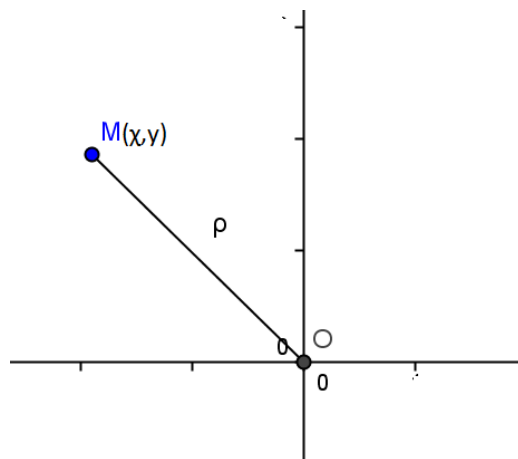
Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τετμημένη του } M}{\text{απόσταση του } M \text{ από το } O} = \frac{x}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του } M}{\text{τετμημένη του } M} = \frac{y}{x}$$

$$\text{όπου } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$



τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών

	0°	30°	45°	60°	90°	180°
<i>ημ</i>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
<i>συν</i>	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
<i>εφ</i>	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Delta. O$	0

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω

- Αν η γωνία ω είναι οξεία τότε όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι θετικοί

$$\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega > 0, \epsilon\phi\omega > 0$$

- Αν η γωνία ω είναι αμβλεία τότε μόνο το ημίτονο είναι θετικό

$$\eta\mu\omega > 0, \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \epsilon\phi\omega < 0$$

Παράδειγμα :

Στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy παίρνουμε το σημείο $M(-3,4)$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \widehat{xOM}$

Λύση:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

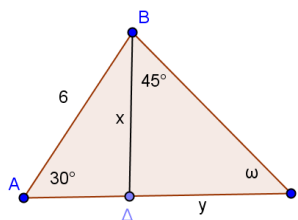
$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} = \frac{4}{5},$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho} = -\frac{3}{5},$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς

1. Να υπολογίσετε τα x , y και ω



2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \hat{xOM}$

a) $M(6,8)$ b) $M(12,-5)$ c) $M(-2,0)$

3. Μια ευθεία (ϵ) έχει εξίσωση $y=-3x$

a) Να σχεδιάσετε την ευθεία (ϵ) και να προσδιορίσετε την τετμημένη ενός σημείου της M που έχει τεταγμένη 6

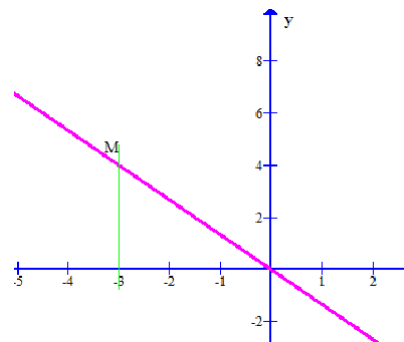
b) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = \hat{xOM}$

4. Στο είναι διπλανό σχήμα $\sin \omega = -\frac{3}{5}$. Αν η

τετμημένη του σημείου M είναι -3 να υπολογίσετε

a) Την τεταγμένη του σημείου M

b) Το $\eta\mu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$



5. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, να αποδείξετε ότι :

a) $\eta\mu\omega > \sin\omega$

b) $2\epsilon\phi\omega - 3\eta\mu\omega + 5\sin\omega < 0$

5.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$$

Παράδειγμα :

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{\eta\mu 120^\circ + \varepsilon\varphi 135^\circ}{\sigma\upsilon\nu 150^\circ}$$

Λύση :

- $\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\varepsilon\varphi 135^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ - 45^\circ) = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$

Άρα

$$A = \frac{\eta\mu 120^\circ + \varepsilon\varphi 135^\circ}{\sigma\upsilon\nu 150^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)}{(\sqrt{3})^2} = -\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}$$

Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς παραπληρωματικών γωνιών

1. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά με τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείων γωνιών

$$\alpha) \eta\mu 140^\circ = \dots \quad \beta) \sigma\upsilon\nu 110^\circ = \dots \quad \gamma) \varepsilon\varphi 100^\circ = \dots$$

2. Να κάνετε την παρακάτω αντιστοίχιση

Στήλη Α	Στήλη Β
$\alpha) \eta\mu 130^\circ$	1. $\eta\mu 50^\circ$
	2. $\sigma\upsilon\nu 50^\circ$
$\beta) \sigma\upsilon\nu 130^\circ$	3. $\varepsilon\varphi 50^\circ$
	4. $-\eta\mu 50^\circ$
$\gamma) \varepsilon\varphi 130^\circ$	5. $-\sigma\upsilon\nu 50^\circ$
	6. $-\varepsilon\varphi 50^\circ$

$\alpha)$	
$\beta)$	
$\gamma)$	

3. Αν για τη γωνία x ισχύει $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις :

a) Αν $\eta\mu x = \eta\mu 30^\circ$ τότε $x = \dots$ ή $x = \dots$

b) Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 150^\circ$ τότε $x = \dots$

c) Αν $\varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi 130^\circ$ τότε $x = \dots$

4. Να αποδείξετε ότι

a) $\eta\mu 110^\circ + \sigma\upsilon\nu 80^\circ - \eta\mu 70^\circ + \sigma\upsilon\nu 100^\circ = 0$

b) $\eta\mu 25^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 125^\circ + \eta\mu 155^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 55^\circ = 0$

c) $2\eta\mu 107^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ + \eta\mu 73^\circ = 0$

$$d) \varepsilon\varphi 130^{\circ} - \varepsilon\varphi 50^{\circ} \cdot \varepsilon\varphi 135^{\circ} = 0$$

5.3 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Απόδειξη:

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{x}{\rho}\right)^2 = \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{x^2}{\rho^2} = \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

2. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$

Απόδειξη

$$\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{y}{x} = \varepsilon\varphi\omega$$

Παράδειγμα

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

Λύση:

$$\begin{aligned}\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{144}{169} \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu\omega &= \frac{12}{13} \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}\end{aligned}$$

Όμως επειδή η γωνία ω είναι αμβλεία $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13} \text{ άρα } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι $(\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 10$

Λύση:

$$\begin{aligned}
 & (\eta\mu\omega + 3\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (3\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega)^2 \\
 & = \eta\mu^2\omega + 6\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega + 9\sigma\upsilon\nu^2\omega + 9\eta\mu^2\omega - 6\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega \\
 & + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 10\eta\mu^2\omega + 10\sigma\upsilon\nu^2\omega = 10(\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = 10
 \end{aligned}$$

Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$, τότε να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω
2. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ότι $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$, τότε να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω
3. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ότι $\epsilon\varphi\omega = -\sqrt{15}$, τότε να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω
4. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{5\epsilon\varphi\omega - 13\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + 13\eta\mu\omega}$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$i) (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1 + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$ii) (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu\omega) \cdot (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega) + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$i) 6\eta\mu^2\omega + 6\sigma\upsilon\nu^2\omega = 6$$

$$ii) \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega = \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$iii) \sigma\upsilon\nu^3\omega + \sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu\omega$$

7. Να αποδείξετε ότι :

$$i) \eta\mu^4\omega - \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$ii) \eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

8. Να αποδείξετε ότι :

$$i) \frac{\eta\mu^2\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} = 1 - \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$ii) 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \eta\mu\omega$$

9. Να αποδείξετε ότι

$$i) \frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{2}{\eta\mu\omega}$$

$$ii) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha} - \frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\varepsilon\varphi\alpha$$

6. Επαναληπτικές Ασκήσεις

1. Δίνονται τα πολυώνυμα :

$$A = 3x^2y - 2xy^2 + xy - 5, \quad B = -x^2y + 4xy^2 - xy + 4$$

Να βρείτε την αριθμητική τιμή του αθροίσματος $A+B$ όταν $x=-2$ και $y=-3$.

2. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $5x(x-4) - 20(4-x)$

ii) $\frac{1}{a^2} - \frac{100}{b^4}$

iii) $9(x+y)^2 - 4(x-y)^2$

iv) $x^2 - 11x + 30$

v) $ax^5 - ax$

3. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

i) $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^4 - 1}$

ii) $\frac{(x^2 - 4)^2 - (x + 4)^2}{x^2 + x}$

iii) $\frac{x^2 - 4}{x + 5} \cdot \frac{x^2 - 25}{x^2 - 7x + 10}$

4. Να γίνουν οι πράξεις :

i) $\frac{x}{x^2 + 5x + 4} + \frac{x + 4}{x^2 + x}$

ii) $\frac{2x}{y - 2x} + \frac{y}{2x + y} + \frac{4xy}{4x^2 - y^2}$

5. Να δείξετε ότι η παράσταση:

$$\left(\frac{2}{3k} + \frac{k}{3} - k \right) \left(\frac{2}{1-k} + \frac{2}{k^2 - 1} \right)$$

Είναι ανεξάρτητη του k .

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{ab} \right) \div \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 = 1$$

7. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) \frac{3x-2}{x^2+x} = \frac{6}{x^2+3x+2} - \frac{1}{2x}$$

$$ii) \frac{12}{5x+10} - \frac{3x-1}{12-3x^2} = \frac{9x+1}{15x-30}$$

$$iii) \frac{5}{2x-2} + \frac{x-3}{3(x^2-1)} = 2 + \frac{7}{6x+6}$$

$$iv) (x^2+1)(x+2)(x^2+5)(-x^2+5x-6) = 0$$

$$v) (2x+1)^2 + (x+3)^2 = 34$$

$$vi) \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x-2} = \frac{1-3x}{x^2-3x+2}$$

8. Δίνεται η εξίσωση :

$$(a^2+2)x^2 + (6+a)x + a - 1 = 0$$

η οποία έχει ρίζα το -2 .

A) Να βρεθεί η τιμή του a και για την τιμή που βρήκατε να λυθεί η εξίσωση.

B) Για την μικρότερη τιμή του a να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{ax+2}{x-1} + \frac{2x-1}{x+1} = a$$

9. Να λυθούν τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x^2 + y^2 + 3y - x = 2 \end{cases}$$

$$ii) \begin{cases} x - 2y = 7 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$iii) \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ 2x - 5y = 13 \end{cases}$$

$$iv) \begin{cases} x + y^2 = 14 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

10. A) Να λυθούν τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ \frac{x}{4} - y = 3 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} x^2 + 2y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$$

B) Να βρείτε τα α και β ώστε η εξίσωση :

$$x^2 + ax + b = 0$$

Να έχει ρίζες 5 και -3 .

11. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,5)$.

12. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$i) A = 3\eta\mu(180^\circ - x) + 3\eta\mu x - 6\eta\mu(180^\circ - x)$$

$$ii) B = \eta\mu 150^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 150^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ$$

13. Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις :

$$A = 3\eta\mu x + 4$$

$$B = -4\sigma\upsilon\nu x + 3$$

$$\Gamma = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu x$$

14. Να λύσεις την εξίσωση:

$$4\eta\mu^2 x - 3 = 0$$

$$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

15. Να αποδείξεις ότι :

$$i) \eta\mu^2 32^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 148^\circ = 1$$

$$ii) 1 - \frac{\sigma\upsilon\nu^2 \chi}{1 + \eta\mu \chi} = \eta\mu \chi$$

$$iii) (\eta\mu \theta + \sigma\upsilon\nu \theta)^2 + (\eta\mu \theta - \sigma\upsilon\nu \theta)^2 = 2$$

16. Αν $\eta\mu \omega = -5/13$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

17. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου προεκτείνουμε τις πλευρές AB , $B\Gamma$, ΓA

$$A = \frac{-\varepsilon\phi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega - 1}{\eta\mu\omega + 1}$$

προς τις κορυφές B , Γ , A αντίστοιχα και στις προεκτάσεις τους παίρνουμε τα τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = AM$. Να αποδείξετε ότι :

A) Τα τρίγωνα MAK και $B\Lambda K$ είναι ίσα.

B) Οι γωνίες MKA και $\Gamma M\Lambda$ είναι ίσες.

Γ) Το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισόπλευρο.

18. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Μία ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ τέμνει τις AB , $B\Gamma$, ΓA στα σημεία K , Λ , M αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

A) Τα τρίγωνα AKM και $AB\Gamma$ είναι όμοια.

B) Τα τρίγωνα AKM και $\Gamma\Lambda M$ είναι όμοια.

19. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

20. Να σχεδιάσετε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και από την κορυφή A να φέρετε τα ύψη AK και AL . Να αποδείξετε ότι :

A) Τα τρίγωνα ABK και $AL\Delta$ είναι όμοια.

B) $AK \cdot AL = AL \cdot AB$

21. Δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B'=A'\Gamma'$) με $\hat{A}=\hat{A}'$ και $B\Gamma=B'\Gamma'$ να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

7. Θέματα εξετάσεων

Θέμα 1^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $A = 3 - 3x(2 - x)$ και $B = 2x - (2x - 1)(3 - x)$

- a) Να κάνετε τις πράξεις στα A και B και να τα γράψετε κατά φθίνουσες δυνάμεις του x
- b) Να παραγοντοποιήσετε τα A και B
- c) Να λύσετε την εξίσωση $A - B = 0$

Θέμα 2^ο

Έστω τα πολυώνυμα $A = 9x^2 - 48x + 64$, $B = (3x - 7)^2 - 1$ και $\Gamma = \alpha + \beta$

- a) Να γράψετε το B κατά φθίνουσες δυνάμεις του x
- b) Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα A, B, Γ
- c) Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma = 0$

Θέμα 3^ο

- a) Να βρείτε το γινόμενο $(x^2 - 2) \cdot (x^2 - x - 2)$
- b) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις i) $x^2 - 2$ ii) $x^2 - x - 2$
- c) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 + 2x + 4 = x^3 + 4x^2$

Θέμα 4^ο

- a) Να κάνετε τις πράξεις : $(x - 1) \cdot (x^2 + x - 2)$
- b) Δίνονται οι παραστάσεις $A = 3x^4 + 2x^3$ και $B = 9x^2 - 4$
 - i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A και B
 - ii) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A-B
 - iii) Να λύσετε την εξίσωση A=B

Θέμα 5^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $A = (3x + 2)^2 - (5 - 2x)(3x + 2)$ και $B = 25x^2 - 9$

- a) Να κάνετε τις πράξεις στο πολυώνυμο A
- b) Να βρείτε την τιμή του πολυωνύμου A για $x = -\frac{2}{3}$
- c) Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα A και B
- d) Να λύσετε την εξίσωση $A = B$

Θέμα 6°

Έστω η παράσταση $A = (2x - 1)^3 - 2x + 1$

- a) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση A
- b) Να κάνετε τις πράξεις
- c) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για $x = \frac{1}{3}$
- d) Να λύσετε την εξίσωση $A=0$

Θέμα 7°

Δίνονται οι παραστάσεις $A = x(x - 1)$ και $B = (x - 2) \cdot (x + 2) - x$

- a) Να κάνετε τις πράξεις
- b) Να δείξετε ότι $B=A-4$
- c) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$
- d) Να λύσετε την εξίσωση $x(x - 1)(x^2 - x - 4) + 4 = 0$

Θέμα 8°

Έστω η αλγεβρική παράσταση $A = \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-1}$

- a) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $x^2 - x$ και $x^2 - 1$
- b) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση A
- c) Να κάνετε τις πράξεις στην A
- d) Να λύσετε την εξίσωση $A = \frac{x^2+2x+1}{x^2+x}$

Θέμα 9°

Έστω οι παραστάσεις $A(x) = (x - 1)^3 - 3x(1 - x)$, $B(x) = (3x - 1) \cdot (x - 1) - (2x - 1)^2 + 1$

- a) Να δείξετε ότι : $A(x) = x^3 - 1$ και $B = -x^2 + 1$
- b) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A(x) και B(x)
- c) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $\Gamma(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ και να απλοποιηθεί
- d) Να λύσετε την εξίσωση $\Gamma(x) = \frac{1}{x-1}$

Θέμα 10°

Έστω οι παραστάσεις $A = (x^2 - 3x + 1)^2 - 1$ και $B = x^3 - 2x^2 - x + 2$

- a) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A και B
- b) Να λύσετε την εξίσωση $B=0$
- c) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση $\frac{A}{B}$ και μετά να την απλοποιήσετε
- d) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = -1$

Θέμα 11°

Έστω η παράσταση $E(x) = \left(\frac{2x^2}{x^3 - x^2 + x - 1} - \frac{x - x^2}{x^2 + 1} \right) : \frac{x^2}{x^2 - 1}$

- a) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $x^3 - x^2 + x - 1$
- b) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση E(x)
- c) Να δείξετε ότι $E(x) = 1 + \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq -1, 0, 1$
- d) Να λύσετε την εξίσωση $E(x)=2x$

Θέμα 12°

- a) Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} x + y = 18 \\ x + 5y = 50 \end{cases}$
- b) Είναι δυνατόν ένα χαρτονόμισμα των 100 ευρώ να ανταλλαγεί με 18 νομίσματα των 2 ευρώ και των 10 ευρώ

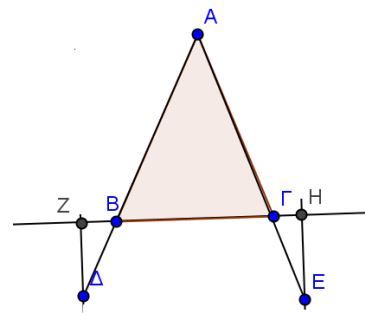
Θέμα 13°

- a) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = x$ (1)
- b) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{3}$ (2)
- c) Αν α η θετική ρίζα της εξίσωσης (1) και β η αρνητική ρίζα της εξίσωσης (2) , να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x + \beta y = -3 \\ x - 2\alpha y = \alpha + \beta \end{cases}$

Θέμα 14^ο

Στο διπλανό σχήμα έχουμε το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το σημείο A , $BD=GE$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, $EH \perp B\Gamma$

- a) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBZ και $\Gamma E H$
- b) Να δείξετε ότι $BZ=GH$
- c) Να δείξετε ότι $AZ=AH$





ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ

ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Π. & Δ. ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ Β/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ Ν. ΗΛΕΙΑΣ

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΜΑΚΡΙΣΙΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2012-13

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ

ΓΑΣΕΙΣ

ΣΤΗΝ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΚΡΙΣΙΑ 3/ 6 /2013

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ 1^η

Α. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(a - \beta)^2 = a^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Β. Στο ακόλουθο πίνακα να αντιστοιχίσετε το γράμμα της πρώτης στήλης με έναν αριθμό της δεύτερης στήλης, ώστε να προκύπτει ταυτότητα.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. $(a + \beta)^2$	1. $\alpha^3 - \beta^3$
Β. $(a + \beta)^3$	2. $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
Γ. $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$	3. $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
Δ. $(a - \beta)^3$	4. $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
	5. $\alpha^2 - \beta^2$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις με Σ ή Λ αν είναι Σωστές ή Λάθος αντίστοιχα.

1. Τα αντίθετα μονώνυμα είναι όμοια.
2. Για να πολλαπλασιάσουμε δυο μονώνυμα πρέπει να είναι όμοια.
3. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^2 - 3x + x^3 - 2$ είναι 2^{ου} βαθμού.

ΘΕΩΡΙΑ 2^η

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες .

1. Σκαληνό λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες.
2. Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες .
3. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια .

B. Να συμπληρώσετε τα κενά:

1. Αν δυο τρίγωνα έχουν δύο.....ίσες μια προς μια και την.....γωνία των πλευρών αυτών ίση, τότε είναι ίσα
2. Αν δυο τρίγωνα έχουν μια.....ίση και τις.....στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μια προς μια τότε είναι ίσα

Γ. Πότε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

A. Να λυθεί η εξίσωση: $12x^2 + 7x + 1 = 0$.

B. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με $x_1 < x_2$, να λύσετε το γραμμικό ως προς

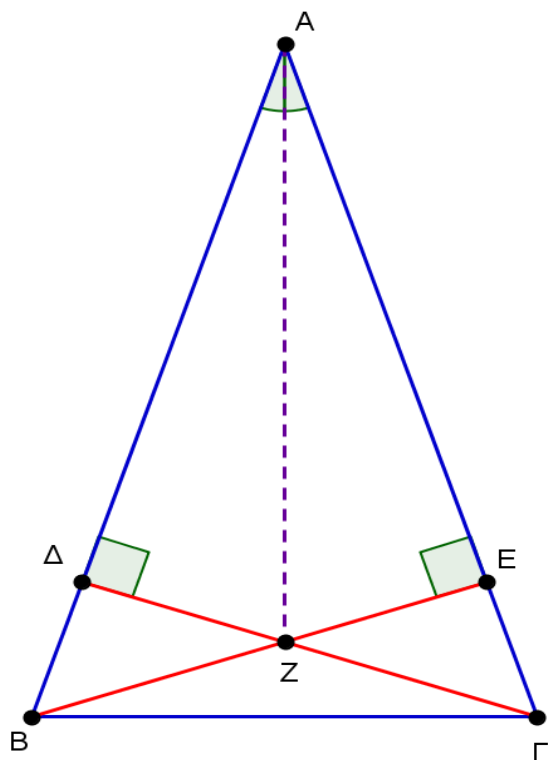
α και **β** σύστημα που ακολουθεί :

$$(\Sigma) : \begin{cases} 4\alpha + 3x_1 = 2\beta - 11 \\ 4x_2 + \alpha = 2\beta - 5 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x}{x-2} - \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}, x \neq \pm 2$

ΑΣΚΗΣΗ 3^η



Το διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=AG$.

Φέρνουμε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ του τριγώνου, τα οποία τέμνονται στο σημείο Z .

A. Να δείξετε ότι $BE=\Gamma\Delta$

B. Να αποδείξετε ότι η AZ διχοτομεί την γωνία A

του τριγώνου $AB\Gamma$. (δηλ. η AZ είναι διχοτόμος της γωνίας A)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ
ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

A. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1.(α) Ποια συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική;

(β) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

(ι) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax^2+bx+c$, με $a \neq 0$,είναι.....

(ιι) Η κορυφή της προηγούμενης γραφικής παράστασης , είναι το σημείο.....

(ιιι) Ο άξονας συμμετρίας της είναι η ευθεία.....

(ιiv) Αν $a > 0$, συνάρτηση αυτή παίρνειτιμή την $y= \dots\dots\dots$, όταν $x= \dots\dots\dots$

ΘΕΜΑ 2.(α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή και να κάνετε το
αντίστοιχο σχήμα.

(β) Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ,

ισχύει: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EG}$. Τι συμπέρασμα μπορούμε να εξάγουμε σχετικά με την

ευθεία ΔΕ;

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2(x-2)+(x-1)^2+2x(3x-2)=1$

ΘΕΜΑ 2. (α) Να λυθεί το σύστημα:

$$2x+3y=11$$

$$-3x+2y=3$$

(β) Αν η λύση του παραπάνω συστήματος επαληθεύει και την εξίσωση:

$\alpha^2(\alpha+1)x + (\alpha-\beta)y = \alpha\beta(\alpha+1)$, όπου τα α, β είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta$ **(Μονάδες 3)**

ΘΕΜΑ 3. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και διάμετρο $2\rho=11$. Θεωρούμε δύο

χορδές AB και $\Gamma\Delta$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο E .

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔBE και $A\Gamma E$ είναι όμοια

(β) Αν $\Delta E=8$, $E\Gamma=x$, $EB=x+1$ και $EA=3x-3$,

(ι) Να βρείτε το x , **(Μονάδες 2)**

(ιι) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ορθογώνιο. **(Μονάδες 1)**

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Καρανικολός Ευστάθιος

Ιωάννου Δημήτριος

Πραμάτιας Γεώργιος

Τελικό διαγώνισμα Γ' Γυμνασίου

Θεωρία

Θέμα 1^ο

A) Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες :

$$(\alpha - \beta)^2 = \dots \dots \dots \quad (\alpha + \beta)^3 = \dots \dots \dots$$

B) Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες :

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2, \quad \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$$

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με Σ αν είναι σωστές, ή με Λ αν είναι λάθος

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\beta + \alpha)(\alpha - \beta)$$

$$(-\alpha - \beta)^2 = -\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2$$

Θέμα 2^ο

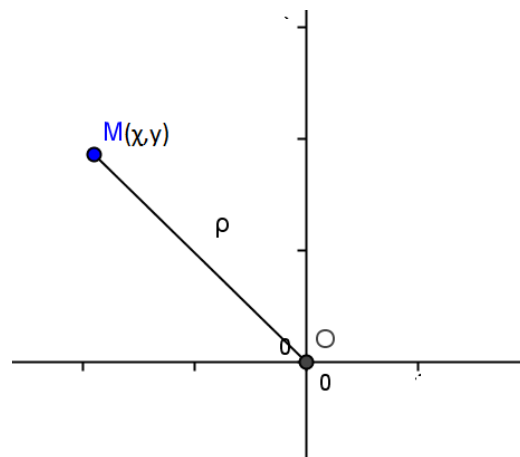
A) Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων χογ σημείο M έχει συντεταγμένες (x,y) . Η γωνία ω που σχηματίζεται με κορυφή την αρχή των αξόνων O(0,0) , αρχική πλευρά τον θετικό ημιάξονα οx και τελική την ημιευθεία OM

Να συμπληρωθούν τα παρακάτω:

ημω=.....

συνω =.....

εφω=.....



B) Να συμπληρωθούν τα παρακάτω

$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \dots \dots \dots \quad \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = \dots \dots \dots \quad \epsilon\phi(180^\circ - \omega) = \dots \dots \dots$$

Ασκήσεις

Θέμα 1°

A) Να παραγοντοποιηθούν και να βρεθεί το Ε.Κ.Π τους

$$2 \cdot x + 8 = \dots \dots \dots$$

$$x^2 - 16 = \dots \dots \dots$$

$$2 \cdot x - 8 = \dots \dots \dots$$

B) Να λυθεί η εξίσωση , αφού γράψετε πρώτα τους κατάλληλους περιορισμούς για τους οποίους ορίζονται οι όροι της

$$\frac{2x+4}{2x+8} - \frac{4}{x^2-16} = \frac{x-2}{2x-8}$$

Θέμα 2°

A) Να συμπληρώσετε τα κενά

$$\eta\mu 120^\circ = \dots \dots \dots \quad \sigma\upsilon\nu 150^\circ = \dots \dots \dots \quad \eta\mu 135^\circ = \dots \dots \dots \quad \sigma\upsilon\nu 135^\circ = \dots \dots \dots$$

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{3\eta\mu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 135^\circ}{2\varepsilon\varphi 45^\circ} - \frac{\eta\mu 60^\circ \sigma\upsilon\nu 150^\circ}{\varepsilon\varphi 45^\circ}$$

Γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$B = (\sigma\upsilon\nu 150^\circ - \sigma\upsilon\nu 30^\circ)^2 + (\eta\mu 45^\circ - \eta\mu 135^\circ)^2$$

Θέμα 3°

A) Να υπολογίσετε τις ρίζες ρ_1, ρ_2 της εξίσωσης $2x^2 - 5x + 3 = 0$

B) Αν ρ_1 είναι η μεγαλύτερη και ρ_2 η μικρότερη ρίζα της προηγούμενης εξίσωσης να βρείτε τη λύση (x,y) του παρακάτω συστήματος

$$\begin{cases} 2x + 3y = -\rho_1 \\ x - 2y = \rho_2 \end{cases}$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 1

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις επόμενες ταυτότητες:

α. $(a + \beta)^2 = \dots \dots \dots$

β. $(\alpha - \beta)^2 = \dots \dots \dots$

γ. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots \dots \dots$

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ΘΕΜΑ

A. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά , ώστε να προκύψουν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Αν δύο τρίγωνα έχουν:

α. Δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

β. Μία πλευρά ίση και τις στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

γ. Τις μία προς μία ίσες, τότε είναι ίσα.

B. Ποια τα είδη τριγώνων ανάλογα με το είδος των γωνιών τους και ποια τα είδη τριγώνων ανάλογα με το είδος των πλευρών τους (να γίνει ένα σχήμα για κάθε είδος)

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 3x - 4 = 0$ και κατόπιν να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 3x - 4$.

B. Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$.

Γ. Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1} + \frac{2x + 1}{x - 1} + 2017$$

ΘΕΜΑ 2°

A. Να αποδείξετε την ισότητα: $(a + 2)^2 + (a + 4)(a - 4) = 2a^2 + 4a - 12$

B. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $3ax - 6a^2x + 9ax$

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα πολυώνυμα: $A(x) = x^2 + 2x$ και $B(x) = 2x + 4$.

A. Να βρείτε το πολυώνυμο:

$$P(x) = [A(x) - B(x)]B(x)$$

B. Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\sqrt{P(2)}}{3} + 2014$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+bx+c=0$ με $a \neq 0$. Να γράψετε τον τύπο της διακρίνουσας Δ .

B. Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα (α-δ) της στήλης Α με ένα μόνο αριθμό (1-5) της στήλης Β, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Αν $\Delta > 0$	1. Η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση
β. Αν $\Delta < 0$	2. Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις
γ. Αν $\Delta \geq 0$	3. Η εξίσωση έχει μία λύση διπλή
δ. Αν $\Delta = 0$	4. Η εξίσωση δεν έχει λύσεις
	5. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις

Γ. Να γράψετε τις παρακάτω εξισώσεις στη μορφή $ax^2+bx+c=0$, και να βρείτε τους συντελεστές a, b, c στην κάθε μία εξίσωση

1. $x(x+2) = -1$ μορφή $ax^2+bx+c=0$ $a=$ $b=$ $c=$

2. $2x^2 = -4x$ μορφή $ax^2+bx+c=0$ $a=$ $b=$ $c=$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να γράψετε τα τρία (3) κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι ίσα

β. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια

γ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα με ίσες γωνίες είναι ίσα

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{3x^2 - 27}{x+3}$$

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{1}{x+2}, \quad x \neq \pm 2$$

ΘΕΜΑ 2°

A. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

B. Αν η λύση (x, y) του παραπάνω συστήματος επαληθεύει την σχέση:

$$(a+b)x - (a-b)y = axy,$$

όπου a, b είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $a = b$

ΘΕΜΑ 3°

Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ να φέρετε τη διάμεσο AM. Να αποδείξετε ότι η AM είναι:

A. Διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$

B. Ύψος του τριγώνου.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 3

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε γράμμα της στήλης Α με ένα μόνο αριθμό της στήλης Β, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $(a - b)(a + b)$	1. $a^2 + b^2$
β. $(a - b)^3$	2. $-(a - b)^2$
γ. $-(-a + b)(-a + b)$	3. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
	4. $a^2 - b^2$
	5. $a^3 - b^3$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. $(4^2 - 3 \cdot 5)^{100} = 1$

β. $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{2} - 1$

γ. $4a^2 - 1 = (4a - 1)(4a + 1)$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να αναφέρετε αναλυτικά τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων (να γίνει το αντίστοιχο σχήμα για κάθε κριτήριο).

B. Ποια τα είδη τριγώνων ανάλογα με το είδος των γωνιών τους και ποια τα είδη τριγώνων ανάλογα με το είδος των πλευρών τους (να γίνει ένα σχήμα για κάθε είδος)

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια, τότε είναι όμοια.

β. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια, τότε θα έχουν και τις τρίτες τους πλευρές ίσες.

γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες και μια πλευρά αντίστοιχα ίσες, τότε θα είναι ίσα.

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$x^2 - 1, \quad x^2 + x, \quad x^2 - 2x + 1$$

Β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η εξίσωση:

$$\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{4}{x^2 + x} = \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$$

Γ. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται οι εξισώσεις: $ax - y = 8 (\varepsilon_1)$ και $3x + 4y = 12 (\varepsilon_2)$

A. Αν το σημείο $A(1, -6)$ ανήκει στην (ε_1) , να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a .

B. Για $a=2$

i. Οι (ε_1) και (ε_2) είναι τι παριστάνουν;

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής των (ε_1) και (ε_2) .

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της (ε_1) με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΘΕΜΑ 3^ο

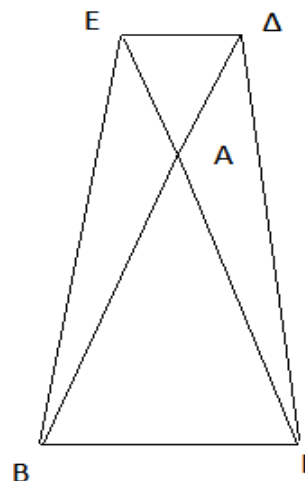
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) του παρακάτω σχήματος. Στις προεκτάσεις

των AB και AG προς το A παίρνουμε τμήματα $A\Delta$ και AE αντίστοιχα έτσι ώστε $A\Delta=AE$. Να αποδείξετε ότι:

A. $EB=\Delta\Gamma$

B. $EB\Gamma=B\Gamma\Delta$

Γ. $BE\Gamma=B\Delta\Gamma$



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 4

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Τι ονομάζεται κλασματική εξίσωση και πότε ορίζονται οι όροι της;
- B.** Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β.

Στήλη Α: Η εξίσωση	Στήλη Β: Έχει Διακρίνουσα
α) $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$	1) $\Delta = \beta^2$
β) $ax^2 + bx = 0, a \neq 0$	2) $\Delta = -4\alpha\gamma$
γ) $ax^2 + \gamma = 0, a \neq 0$	3) $\Delta = \beta^2 + 4\alpha\gamma$
	4) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$, έχει μια τουλάχιστον λύση αν η διακρίνουσα της είναι θετική ή μηδέν $\Delta \geq 0$.

β. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$

, τότε το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο:
 $ax^2 + bx + \gamma = (x - \rho_1)(x - \rho_2)$

ΘΕΜΑ 2°

A. Πότε δύο πολύγωνα λέγονται όμοια;

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία.

β. Τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια.



γ. Δύο τρίγωνα που έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.

Γ. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις :

α. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι

β. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$\alpha = x + 3x^2 - 2x - 2x^2 - 2$$

$$\beta = (x - 4)(x + 4) - x(x - 6)$$

$$\gamma = (x - 1)^2 - 1$$

A. α. Να κάνετε τις πράξεις και τις αναγωγές ομοίων όρων στις παραστάσεις α και β.

β. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση γ.

B. Χρησιμοποιώντας τις τελικές μορφές των παραστάσεων α , β και γ που βρήκατε στο (Α) ερώτημα να λύσετε την εξίσωση: $\alpha x^2 + \beta = \gamma - 19$

ΘΕΜΑ 2°

A. α. Να βρείτε την τιμή του α , έτσι ώστε τα μονώνυμα: $(\alpha + 2)x^2y^2$ και $5x^2y^2$ να είναι ίσα.

β. Να βρείτε την τιμή του β , έτσι ώστε ο βαθμός του μονωνύμου: $7x^3y^{\beta+4}$

ως προς όλες τις μεταβλητές του να είναι **10**.

B. Να λύσετε με όποια αλγεβρική μέθοδο θέλετε το παρακάτω γραμμικό σύστημα

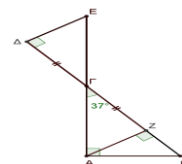
(όπου α και β οι τιμές που βρήκατε στο ερώτημα Α)
$$\begin{cases} \frac{x+\alpha}{2} - 2y = -1 \\ \beta x + 3y = 12 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3°

Στο παραπάνω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $DE\Gamma$ είναι ορθογώνια με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{D}=90^\circ$ αντίστοιχα, $\hat{ACB}=37^\circ$ AZ

$\wedge$ $B\Gamma$ και $\Delta\Gamma=Z\Gamma$.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AZ\Gamma$ και $E\Delta\Gamma$ είναι ίσα και στη συνέχεια να συμπληρώσετε τις ισότητες : $\Delta E=.....$ και $E\Gamma=.....$



B. Αφού υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{E}$ και $\hat{B}$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AZB και $\Gamma\Delta E$ είναι όμοια.

Γ. Αν $AZ=6\text{cm}$ και $\Delta\Gamma=8\text{cm}$, να συμπληρώσετε τους λόγους $\frac{AZ}{\dots} = \frac{BZ}{\dots} = \frac{AB}{\dots}$ και να

υπολογίσετε το μήκος του BZ .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 5

A. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να μεταφέρετε στην κόλλα αναφοράς και να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες, ώστε να είναι αληθείς:

$$(i) (a+b)^2 = \quad (ii) (a-b)^2 = \quad (iii) (a-b)^3 = \quad (iv) (a+b)(a-b) =$$

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα (ii) του ερωτήματος (A)

Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης A με ένα μόνο στοιχείο της στήλης B, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες.

ΣΤΗΛΗ A

1. $a^\mu \cdot a^\nu$

2. $(a \cdot \beta)^\nu$

3. $\left(\frac{a}{\beta}\right)^\nu$

4. $(a^\mu)^\nu$

ΣΤΗΛΗ B

α. $\frac{a^\nu}{\beta^\nu}$

β. $a^\nu \cdot \beta^\nu$

γ. $a^{\mu+\nu}$

δ. $a^{\mu\nu}$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να μεταφέρετε στην κόλλα αναφοράς και να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες με τον σωστό αριθμό:

$$(i) \eta\mu 0^\circ = \quad (ii) \eta\mu 90^\circ = \quad (iii) \sigma\upsilon\nu 180^\circ = \quad (iv) \epsilon\varphi 45^\circ = \quad (v) \epsilon\varphi 60^\circ =$$

B. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης A με ένα μόνο στοιχείο της στήλης B, ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες.

ΣΤΗΛΗ Α**ΣΤΗΛΗ Β**

1. $\frac{\eta\mu 50^\circ}{\sigma\upsilon\nu 50^\circ}$

α. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\eta\mu 30^\circ$

β. δεν ορίζεται

3. $\sigma\upsilon\nu 150^\circ$

γ. $\eta\mu 50^\circ$

4. $\epsilon\varphi 90^\circ$

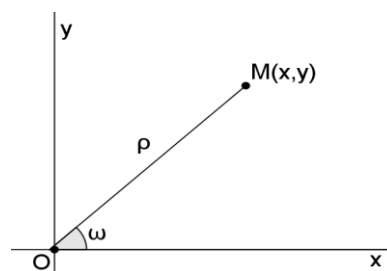
δ. $\epsilon\varphi 50^\circ$

5. $\eta\mu^2 30^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 30^\circ$

ε. 1

Γ. Να χρησιμοποιήσετε το επόμενο σχήμα για να αποδείξετε

ότι $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

**Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ 1^ο**

Α. Να λύσετε την εξίσωση :

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$

Β. Να χρησιμοποιήσετε την απάντηση του ερωτήματος (Α) και να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο: $2x^2 + 9x - 5$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{x+1}{x^2 - x} = 0$$

και να βρείτε, εάν υπάρχουν, τις κοινές λύσεις της με την εξίσωση στο (Α) ερώτημα.

ΘΕΜΑ 2°

A. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -6 \\ \alpha - 2\beta = -5 \end{cases}$$

με όποια μέθοδο θέλετε και να δείξετε ότι έχει μία μόνο λύση.

B. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} -8\alpha + 2\beta = -16 \\ \alpha - \frac{1}{4}\beta = 2 \end{cases}$$

με όποια μέθοδο θέλετε και να δείξετε ότι είναι αόριστο (άπειρες λύσεις).

Γ. Να αποδείξετε ότι η λύση του συστήματος (A) είναι και λύση του συστήματος (B) και να βρείτε και μία δεύτερη λύση του συστήματος (B).

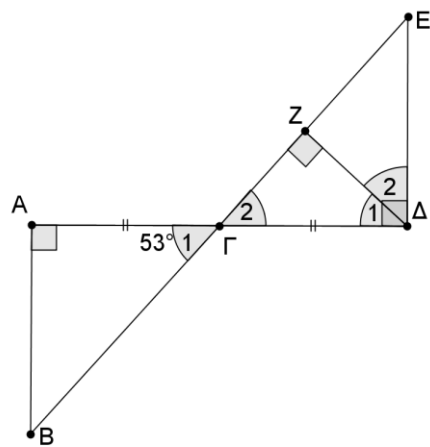
ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και ΓΔΕ είναι ορθογώνια με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{D}=90^\circ$, $ΑΓ=ΓΔ=3$, $ΔΕ=4$, $ΔΖ \perp ΓΕ$ και $\hat{\Gamma} = 53^\circ$.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΓΔΕ είναι ίσα και να συμπληρώσετε τις ισότητες $AB=.....$ και $ΒΓ=.....$

B. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΖΔΕ είναι όμοια και να συμπληρώσετε τους λόγους $\frac{AB}{DE} = \frac{BG}{ZE} = \frac{AG}{ZE}$.

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος του ΖΔ και να βρείτε το λόγο $\frac{E_{ABΓ}}{E_{ZDE}}$ των εμβαδών των τριγώνων ABΓ και ΖΔΕ. Να χρησιμοποιήσετε τις απαντήσεις των ερωτημάτων (A) και (B).



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 6

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να συμπληρώσετε τις επόμενες ταυτότητες :

$$(\alpha - \beta)^2 = \dots \dots \dots$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots \dots \dots$$

Γ. Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Να διατυπώσετε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους μία προς μία ίσες τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

β. Δύο κανονικά πεντάγωνα είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.

γ. Ο λόγος των περιμέτρων δύο όμοιων πολυγώνων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

δ. Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.

ε. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται το πολυώνυμο :

$$A(x) = (2x+3)^2 - (x+2)(x-2) - 17x - 11$$

A. Να αποδείξετε ότι $A(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

B. Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$.

Γ. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $A(x)$.

Δ. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{A(x)}{3x^2 - 3}$.

ΘΕΜΑ 2°

A. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - y = 14 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$$

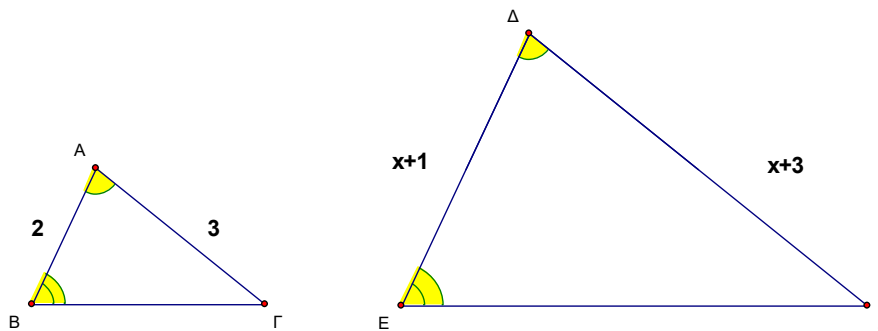
B. Αν η λύση του συστήματος στο ερώτημα (A) είναι $(x, y) = (6, -2)$, να εξετάσετε αν η λύση αυτή είναι και λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ \frac{x+y}{4} + \frac{x+3y}{3} = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3°

Στα επόμενα τρίγωνα είναι:

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, AB = 2, AG = 3, DE = x+1 \text{ και } DZ = x+3$$



- A.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι όμοια.
- B.** Να γράψετε τους ίσους λόγους των πλευρών που προκύπτουν από την ομοιότητα των δύο τριγώνων και να υπολογίσετε το x .
- Γ.** Να αποδείξετε ότι ο λόγος ομοιότητας λ του τριγώνου $AB\Gamma$ ως προς το τρίγωνο ΔEZ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.
- Δ.** Αν $(AB\Gamma) = 5 \text{ cm}^2$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΔEZ .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 7

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Β. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά με τα κατάλληλα μονώνυμα, ώστε να ισχύουν οι ταυτότητες:

α. $(a + b)^2 = \dots + \dots + \dots$

β. $(\dots - \dots)(\dots + \dots) = a^2 - b^2$

γ. $(\dots - \dots)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Να διατυπώσετε τα τρία (3) κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων .

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δύο όμοια τρίγωνα είναι πάντα ίσα.

β. Δύο ορθογώνια τρίγωνα με δύο πλευρές ίσες είναι πάντα ίσα.

γ. Δύο τρίγωνα με δύο πλευρές και μια γωνία ίσες είναι πάντα ίσα.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x^3 - 16x}$$

B. Να λύσετε την εξίσωση $A=2$.

ΘΕΜΑ 2°

Να λύσετε τα επόμενα συστήματα:

$$\text{A. } \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-2}{3} = 1 \\ 2x + 5y = -3 \end{cases} \quad \text{B. } \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3°

Αν $\eta\mu x = \frac{3}{4}$ με $90^\circ < x < 180^\circ$

A. Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu x$ και την $\epsilon\varphi x$

B. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\eta\mu(180^\circ - x), \sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) \text{ και } \epsilon\varphi(180^\circ - x)$$

Γ. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 4\eta\mu(180^\circ - x) - 8\sigma\upsilon\nu(180^\circ - x) + 14\epsilon\varphi(180^\circ - x)$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο :

Α. Να συμπληρωθούν οι ισότητες :

$$(\alpha + \beta)^2 =$$

$$(\alpha - \beta)^2 =$$

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) =$$

$$(\alpha + \beta)^3 =$$

$$(\alpha - \beta)^3 =$$

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Τα μονώνυμα $(\sqrt{3} - 2)xy^2$ και $(2 - \sqrt{3})xy^2$ είναι αντίθετα

β. Η παράσταση $4x^2 + 9 + 12x$ είναι ανάπτυγμα τετραγώνου

γ. Το πολυώνυμο $4x^4y^2 + 5x^3y - 7xy^3$ είναι 3^{ου} βαθμού ως προς x και y

δ. Η παράσταση $3ax^{-2}$ είναι μονώνυμο

ε. Ισχύει $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta$

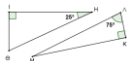
ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να αναφέρετε σε ποια από τα παρακάτω ζεύγη έχουμε όμοια τρίγωνα:

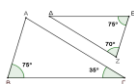
1.



2.



3.



B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα είναι και όμοια.

β. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.

γ. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία τους ίση, τότε είναι όμοια.

δ. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν από μία γωνία 50° , τότε είναι όμοια.

ε. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μια προς μία, τότε είναι όμοια.

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \beta + 3\gamma = 11 \\ 3\beta - 4\gamma = 7 \end{cases}$$

Να λύσετε το σύστημα (με οποιαδήποτε μέθοδο) και να βρείτε ότι η λύση του είναι το ζεύγος $(\beta, \gamma) = (5, 2)$

B. Να λύσετε την εξίσωση :

$$2x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

, όπου (β, γ) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος.

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται γωνία ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$, για την οποία ισχύει $\sin \omega = -\frac{3}{5}$

A. Να εξετάσετε αν η γωνία ω είναι οξεία ή αμβλεία.

B. Να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

Γ. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu(180^\circ - \omega)$ και $\sin(180^\circ - \omega)$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις :

$$A = x^2 - 36 \quad , \quad B = x^2 - 12x + 36 \quad \text{και} \quad \Gamma = 2x - 12$$

A. Να βρείτε την αριθμητική τιμή της αλγεβρικής παράστασης $\frac{B - \Gamma}{2}$, για $x = -2$

B. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A , B και Γ

Γ. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{A}{\Gamma}$ και $\frac{B}{A}$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 9

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Πότε μια ισότητα ονομάζεται ταυτότητα;

Β. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Γ. Να συμπληρώσετε της παρακάτω ισότητες :

$$\text{i)}(\alpha+\beta)^2=\dots\dots\dots \quad \text{ii)}(\alpha-\beta)^2=\dots\dots\dots \quad \text{iii)} (\alpha+\beta)^3=\dots\dots\dots$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Β. Να γράψετε τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μια, τότε είναι ίσα.

β. Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

γ. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μια προς μια και μια γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

δ. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

Β.ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

A. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(3x+1)^2 + x(x-5) = 4$$

B. Αν η μια από την λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας ω , να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς (ημ ω , εφ ω) της αμβλείας γωνίας ω .

ΘΕΜΑ 2°

A. Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} a + 2b = a + 6 \\ a + 4b = 3b + 7 \end{cases}$$

και να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$.

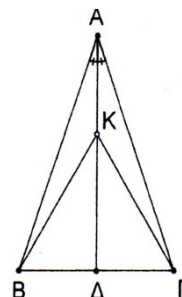
B. Για τις τιμές των α και β που βρήκατε από την λύση του παραπάνω συστήματος, να λύσετε την εξίσωση: $5x^2 + 13bx + 3a = 0$

ΘΕΜΑ 3°

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$ και AD διχοτόμος της γωνίας A . Αν K τυχαίο σημείο πάνω στην AD .

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AKB και $AK\Gamma$ είναι ίσα.

B. Να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 10

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Τι ονομάζουμε μονώνυμο;

Β. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Γ. Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε να

αντιστοιχίσετε σε κάθε περίπτωση της στήλης (Α) το σωστό συμπέρασμα από τη στήλη (Β)

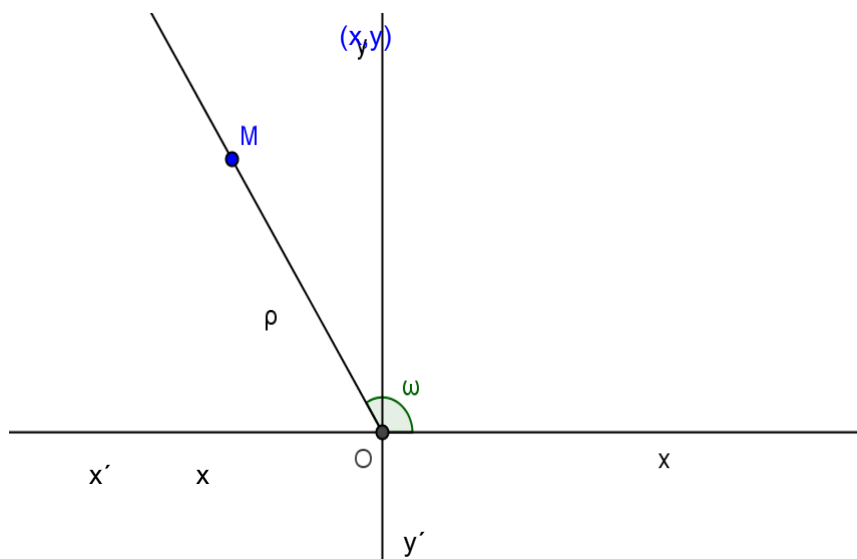
ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $\Delta > 0$	1. Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση.
β. $\Delta = 0$	2. Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις.
γ. $\Delta < 0$	3. Η εξίσωση είναι αδύνατη.
	4. Τίποτα από τα παραπάνω

ΘΕΜΑ 2^ο

Α. Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα αξόνων είναι σχεδιασμένη μία γωνία ω .

Το σημείο $M(x,y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω .

Με τη βοήθεια του σχήματος να δείξετε ότι $hm^2\omega + sn^2\omega = 1$



Β. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του

τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $\eta\mu 60^\circ$	1. $\eta\mu 120^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 120^\circ$	2. $\epsilon\phi 135^\circ$
γ. $\epsilon\phi 45^\circ$	3. $-\eta\mu 120^\circ$
	4. $-\epsilon\phi 135^\circ$
	5. $\sigma\upsilon\nu 60^\circ$
	6. $-\sigma\upsilon\nu 60^\circ$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$

Β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$

Γ. Με τη βοήθεια του υποερωτήματος (Β) να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x+6}{x^2 - 7x + 6} - \frac{x}{x - 6} = \frac{1}{x - 1}$$

Δ. Αν α η μικρότερη λύση της παραπάνω εξίσωσης και β η μεγαλύτερη λύση της, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $M(\alpha, \beta)$

ΘΕΜΑ 2°

Α. Να λυθεί το σύστημα:

$$3\alpha - 2\beta = 36$$

$$\alpha + 3\beta = -10$$

και να δείξετε ότι $\alpha = 8$ και $\beta = -6$

Β. Αν α και β οι αριθμοί που προέκυψαν από το ερώτημα (Α) και $\sin \omega = \frac{b}{a}$, με ω αμβλεία γωνία, να υπολογίσετε το $\eta\mu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = (h\mu\omega - \sin\omega)^2 + (h\mu\omega + \sin\omega)^2$$

ΘΕΜΑ 2^ο

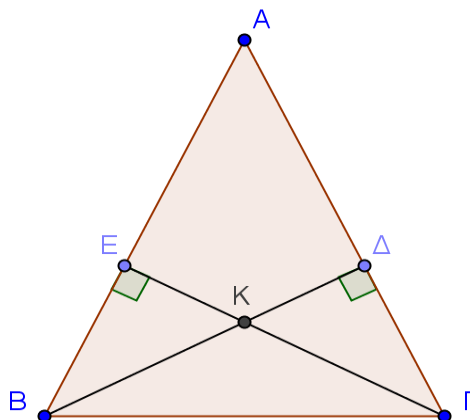
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, όπως το παραπάνω σχήμα.

Αν $B\Delta$ και ΓE ύψη του τριγώνου και K το σημείο τομής τους, να αποδείξετε ότι:

A. Τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

B. Τα τρίγωνα KEB και $K\Delta\Gamma$ είναι ίσα.

Γ. Το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισοσκελές.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 11

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να συμπληρώσετε τις επόμενες ταυτότητες:

A. $(\alpha+\beta)^2 = \dots\dots\dots$

B. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \dots\dots\dots$

Γ. $(\alpha+\beta)^3 = \dots\dots\dots$

ΘΕΜΑ 2^ο

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες για τις παραπληρωματικές γωνίες ω και $180^\circ - \omega$.

A. $\eta\mu(180^\circ - \omega) = \dots\dots\dots$

B. $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = \dots\dots\dots$

Γ. $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = \dots\dots\dots$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Η εξίσωση $2x^2 + x - 10 = 0$ είναι της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω: $\alpha = \dots\dots$, $\beta = \dots\dots$, $\gamma = \dots\dots$

B. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

ΘΕΜΑ 2°

Να λύσετε το σύστημα που ακολουθεί είτε με την μέθοδο της αντικατάστασης, είτε με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\begin{cases} 3x + 7y = 27 \\ 5x + 2y = 16 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3°

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ορθογώνια. Δίνεται ότι $AB = AE$ και $AG = AD$.

- A.** Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.
- B.** Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά που προκύπτουν από την ισότητα των πιο πάνω τριγώνων.

$$B\Gamma = \dots\dots\dots$$

$$\hat{I} = \dots\dots\dots$$

$$\hat{B} = \dots\dots\dots$$

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 12

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Τι ονομάζεται ταυτότητα ;

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ταυτότητες :

$$(a + b)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a - b)^2 = \dots\dots\dots$$

$$(a + b)(a - b) = \dots\dots\dots$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις ισότητες που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε ισότητα τη λέξη **Σωστό**, αν η ισότητα είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η ισότητα είναι λανθασμένη.

α. $(k + l)^2 = k^2 + l^2$

β. $(a - b)^2 = (b - a)^2$

γ. $(x - 1)^2 = x^2 - 1$

δ. $(x - y)^3 = (y - x)^3$

ε. $(a + 2b)^2 = (b + 2a)^2$

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να διατυπώσετε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

β. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια και μια πλευρά ίση τότε είναι ίσα.

γ. Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια είναι ίσα.

δ. Κάθε ύψος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσός του.

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνονται οι εξισώσεις :

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \text{ και } x^2 + 7x + 6 = 0$$

A. Να λυθούν οι παραπάνω εξισώσεις και μετά να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα:

$$x^2 - 7x + 6 \text{ και } x^2 + 7x + 6 .$$

B. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 36} \text{ και } B = \frac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 1} .$$

α. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις A και B και μετά να τις απλοποιήσετε .

β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $(A+B)^2 - (A-B)^2$ είναι ανεξάρτητη του x .

ΘΕΜΑ 2°

A. Να λυθεί η παρακάτω κλασματική εξίσωση:

$$\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x-3}{x^2-2x} = \frac{4}{x^2-4}$$

B. Αν α η μεγαλύτερη λύση της παραπάνω εξίσωσης και β η μικρότερη λύση της να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} aX + bY = 4 \\ x - aX - bY = 1 \end{cases}$$

Γ. Αν $\tan \hat{q} = \frac{b+4}{a+1}$, όπου α η μεγαλύτερη λύση της παραπάνω εξίσωσης και β η μικρότερη λύση της και $\hat{q}$ αμβλεία γωνία, να βρεθούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνιάς $\hat{q}$.

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με AB=ΑΓ και διχοτόμους τις BE και ΓΔ, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Φέρνουμε την ΕΛ κάθετη στην ΒΓ και την ΔΚ κάθετη στην ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:



A. Τα τρίγωνα BEΓ και BΔΓ είναι ίσα.

B. Τα τρίγωνα BEΛ και ΓΔΚ είναι ίσα.

Γ. Τα τρίγωνα ΔΟΒ και ΔΒΓ είναι όμοια

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 13

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

B. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις και να συμπληρώσετε τα κενά , ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις :

α. Το άθροισμα δύο τουλάχιστον μονωνύμων που δεν είναι όμοια λέγεταιΚάθε που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται όρος του πολυωνύμου.

β. Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του είναι ο από τους βαθμούς των του.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

β. Κάθε μονώνυμο είναι πολυώνυμο.

γ. Το άθροισμα μονωνύμων είναι μονώνυμο.

ΘΕΜΑ 2^ο

A. Να γράψετε τα τρία κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.

B. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις και να συμπληρώσετε τα κενά , ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις :

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος από τα άκρα του.
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας από τις πλευρές της γωνίας.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

β. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία τότε θα έχουν και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.

γ. Κάθε διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου είναι διχοτόμος και ύψος.

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2x^2 + 5x + 3 = 0$$

B. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:

$$K = 2x^2 + 5x + 3$$

Γ . Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{K}{2x+3} = 0$$

Δ. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{K-10}{x-1} - 5$$

ΘΕΜΑ 2°

A. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 46 \\ 3x + 4y = 63 \end{cases}$$

B. Αν $M(5, 12)$ η λύση του παραπάνω συστήματος να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\omega = xOM$, όπου Ox ο θετικός ημιάξονας.

Γ. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:
$$B = \frac{\eta\mu\omega}{\eta\mu^2 120^\circ} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu 180^\circ}$$

, όπου ω η γωνία του β ερωτήματος.

ΘΕΜΑ 3°

Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$

A. Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

B. Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:

$$A = \eta\mu^2 65^\circ (\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega) - \sigma\upsilon\nu^2 115^\circ \sigma\upsilon\nu$$

, όπου ω η γωνία του (A) ερωτήματος.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 14

Α. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A.** Τι ονομάζουμε ρητή αλγεβρική παράσταση;
- B.** Ποιες τιμές δεν μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές μιας ρητής αλγεβρικής παράστασης;
- Γ.** Πότε και με ποιον τρόπο είναι δυνατό να απλοποιήσουμε μια ρητή αλγεβρική παράσταση;

ΘΕΜΑ 2^ο

- A.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

i. $\sin(180^\circ - \alpha) = \dots$ ii. $\cos(180^\circ - \alpha) = \dots$ iii. $\tan(180^\circ - \alpha) = \dots$

- B.** Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο με κορυφές τα σημεία Α, Β και Γ. Αφού ονομάσετε τις απέναντι πλευρές με τα κατάλληλα γράμματα, να γράψετε το νόμο των συνημιτόνων για την πλευρά γ.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει μήκος 15m και πλάτος 10m. Θέλουμε να αυξήσουμε το μήκος του και να μειώσουμε το πλάτος του κατά τον ίδιο αριθμό μέτρων, έτσι ώστε

το εμβαδόν του οικοπέδου να γίνει τελικά 100m^2 . Να βρείτε κατά πόσα μέτρα θα μεταβληθεί η κάθε διάσταση.

ΘΕΜΑ 2°

Να λύσετε γραφικά το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων:
$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$$

Στη συνέχεια να επαληθεύσετε αλγεβρικά τη λύση που βρήκατε.

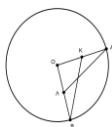
(**Σημείωση:** Για το σχήμα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τετραγωνισμένο χαρτί).

ΘΕΜΑ 3°

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται ένας κύκλος κέντρου O και οι ακτίνες του OA και OB . Ονομάζουμε K το μέσο της OA και L το μέσο της OB .

A. Να αποδείξετε ότι $AL = BK$.

B. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες AKB και ALB είναι ίσες.



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 15

A. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1°

A. Τι ονομάζουμε ταυτότητα;

B. Να γράψετε τα αναπτύγματα στις παρακάτω παραστάσεις, ώστε οι ισότητες που θα προκύψουν να είναι ταυτότητες.

i) $(\alpha + \beta)^2 = \dots$

ii) $(\alpha - \beta)^3 = \dots$

iii) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά

β. Το πηλίκο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο

γ. Ο αριθμός 5 είναι μονώνυμο

δ. Τα αντίθετα μονώνυμα έχουν ίδιο κύριο μέρος

ΘΕΜΑ 2°

A. Να αναφέρετε τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Δύο τρίγωνα που έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες είναι πάντα ίσα.

β. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν ίσες υποτείνουσες και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, είναι ίσα.

γ. Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν δύο γωνίες του ενός είναι ίσες με δύο γωνίες του άλλου μία προς μία και μία πλευρά του ενός ίση με μία πλευρά του άλλου.

δ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες.

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = (3 - 2x)^2 + (3 - x)(3 + x) - 2x(x - 1) + 6$$

A. Κάνοντας όλες τις πράξεις και τις αναγωγές ομοίων όρων να δείξετε ότι :

$$P(x) = x^2 - 10x + 24$$

B. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 10x + 24 = 0$ και να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο:

$$x^2 - 10x + 24$$

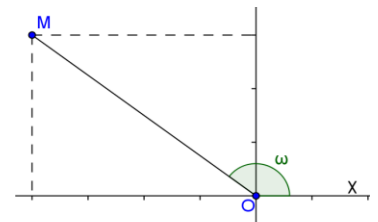
ΘΕΜΑ 2°

A. Χρησιμοποιώντας μια από τις αλγεβρικές μεθόδους, να αποδείξετε ότι η λύση

του συστήματος:
$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 4x + 5y = -1 \end{cases}$$

είναι το ζεύγος $(-4, 3)$.

B. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{w} = x\hat{O}M$, όπου M είναι το σημείο με συντεταγμένες $M(-4, 3)$, νόπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Γ. Να υπολογίσετε την $\epsilon\phi(180^\circ - \omega)$ και το $\eta\mu(180^\circ - \omega)$, όπου ω η

γωνία του ερωτήματος (B).

ΘΕΜΑ 3°

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$ και $AB = 6\text{cm}$.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Gamma\Delta E$

είναι όμοια .

B. Να γράψετε τους ίσους λόγους των πλευρών

και να βρεθεί ο λόγος ομοιότητας των δύο

τριγώνων.

Γ. Να υπολογισθεί το x αν $GE = (x+1)\text{ cm}$ και

$$EB = (x+3)\text{ cm}$$

