

Απαντήσεις Μαθηματικών Κατεύθυνσης Γ Λυκείου

Θέμα Α

A1. Α) Σχολικό Βιβλίο σελ. 15

B) i) Σχολικό βιβλίο σελ. 35

ii) Σχολικό βιβλίο σελ. 35-36

A2. Σχολικό Βιβλίο Σελ. 142

A3. Σελ. 135

A4. Α) Λάθος . διότι το θεώρημα δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων
(Σχολικό βιβλίο, σελίδα 71)

B) Λάθος διότι δεν αναφέρεται ότι η συνάρτηση είναι συνεχής
(Σχολικό βιβλίο, σελίδα 239.)

A5. γ

Θέμα Β

B1. Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Rightarrow \lambda = 2$

B2. $f(x) - x = 0 \Rightarrow e^{-x} + 2 - x = 0$

Θέτω $g(x) = e^{-x} + 2 - x$

Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$

$$g(2) = e^{-2} > 0$$

$$g(3) = e^{-3} - 1 < 0$$

Άρα $g(2) \cdot g(3) < 0$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$

Επίσης $g'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$ άρα η g είναι γνησίως αύξουσα επομένως η ρίζα είναι μοναδική .

$$B3. f(x) = e^{-x} + 2 \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα επομένως 1-1

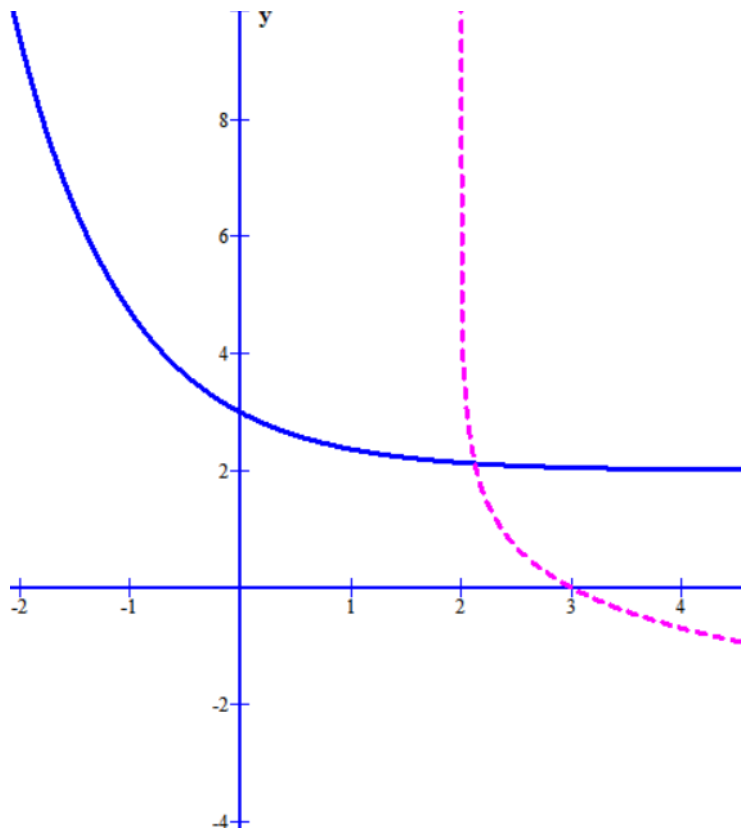
$$\text{Θέτω } y = f(x) \Rightarrow y = e^{-x} + 2 \Rightarrow y - 2 = e^{-x}$$

$$-x = \ln(y - 2) \Rightarrow x = -\ln(y - 2), \text{ αρκεί } y - 2 > 0 \Rightarrow y > 2$$

$$\text{Επομένως } f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$$

$$B4. \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \text{ άρα η } x = 2 \text{ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της } f$$

Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$



Θέμα Γ

Γ1. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 θα είναι και συνεχής

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + \beta$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 1 + \alpha = 1 + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - (1 + \alpha)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - 1 + \beta}{-1} = 1 + \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Rightarrow 2 = 1 + \beta \Rightarrow \beta = 1$$

$$\text{Άρα } \alpha = 1$$

Γ2. Αν $x > 1$ τότε $f'(x) = 2x > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

Αν $x < 1$ τότε $f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\text{Άρα } f(\Delta) = (-\infty, +\infty)$$

Γ3. i) Η f είναι γνησίως μονότονη άρα αν έχει 1 ρίζα αυτή θα είναι μοναδική

Εφαρμόζουμε Bolzano στο $(-1, 0)$

Η $f(x) = e^{x-1} + x$ είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών

$$f(-1) = \frac{1}{e^2} - 1 < 0$$

$$f(0) = \frac{1}{e} > 0$$

Άρα $f(-1) \cdot f(0) < 0$

Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ (αρνητικός) τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$

ii) έστω ότι η εξίσωση έχει μια ρίζα $\rho \in (x_0, +\infty)$ $f^2(x) - x_0 f(x) = 0 \Rightarrow f^2(\rho) - x_0 f(\rho) = 0$

$$f(\rho)(f(\rho) - x_0) = 0 \Rightarrow f(\rho) = 0 \text{ ή } f(\rho) = x_0$$

Άρα η μια σχέση δίνει

$$f(\rho) = f(x_0) \Rightarrow \rho = x_0 \text{ (αφού η } f \text{ είναι 1-1) άτοπο}$$

$f(\rho) = x_0 < 0 \Rightarrow f(\rho) < 0 \Rightarrow f(\rho) < f(x_0) \Rightarrow \rho < x_0$ αφού η f είναι αύξουσα, άτοπο αφού $\rho > x_0$.

Γ4. Το $M(x(t), y(t))$, Όπου $y(t) = x^2(t) + 1$

$$E(t) = \frac{x(t) \cdot y(t)}{2} \Rightarrow E(t) = \frac{x^3(t) + x(t)}{2}$$

$$E'(t) = \frac{3x^2(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2} \Rightarrow E'(t_0) = 28 \text{ τ.μ}$$

Θέμα Δ

Δ1. Γνωρίζουμε ότι επειδή η $y = -x + 2$ εφάπτεται στην c_f άρα

$$f'(1) = -1 \text{ και } f(1) = 1$$

Έχω

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + a$$

Άρα επειδή $f'(1) = -1 \Rightarrow a = -1$

$$f(1) = 1 \Rightarrow a + \beta = 1 \Rightarrow -1 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = 2$$

Δ2. $f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) - x + 2$

$$f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$$

$$f''(x) = \frac{2(x-2)}{x^2 - 2x + 2} + \frac{4(x-1)(x^2 - 2x + 2) - 2(x-1)^2(2x-2)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$
$f(x)$			

Σ.κ

Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[1,2]$ άρα θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της

Επομένως

$$f(x) \geq -x + 2 \Rightarrow f(x) + x - 2 \geq 0$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι

$$E(\Omega) = \int_1^2 (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 (2x-2) \ln(x^2 - 2x + 2) dx$$

$$\text{Θέτω } x^2 - 2x + 2 = u \Rightarrow (2x-2) dx = du$$

$$\text{Όταν } x = 1 \text{ τότε } u = 1$$

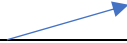
$$\text{Όταν } x = 2 \text{ τότε } u = 2$$

Οπότε

$$E(\Omega) = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{2} \int_1^2 u' \ln u du = \frac{1}{2} [u \ln u]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 1 du$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \tau. \mu$$

Δ3. i) στο Δ2 ερώτημα βρήκαμε το πρόσημο της f''

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$+$
$f'(x)$			

Άρα στο $x=1$ η f' παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f'(1) = -1$

Άρα $f'(x) \geq f'(1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ii) } f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2}$$

$$f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1$$

Εφαρμόζουμε θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(\lambda, \lambda + \frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Όμως } f'(\xi) \geq -1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Δ4. Η g είναι μια συνάρτηση 2 φορές παραγωγίσιμη

$$g'(x) = -3x^2 - 1$$

$$g''(x) = -6x$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$		$+$	$-$
$g'(x)$			

Άρα η g' παρουσιάζει στο $x=0$ ολικό μέγιστο $g'(0) = -1 \Rightarrow g'(x) \leq -1$, η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$

Και επίσης $f'(x) \geq -1$, η ισότητα ισχύει για $x=1$

Όμως για να έχουμε κοινή εφαπτομένη πρέπει $f'(\alpha) = g'(\beta)$ άρα

$$f'(\alpha) = g'(\beta) = -1 \Rightarrow \beta = 0$$

Άρα η εφαπτομένη θα είναι $y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 2 = -1x \Rightarrow y = -x + 2$ (η οποία είναι κοινή).