

Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων 2020- Απαντήσεις

Θέμα Α:

A1. Απόδειξη από σχολικό βιβλίο ,σελ 76

A2. Ορισμός από σχολικό βιβλίο ,σελ 104

A3.α) Λάθος

B) $f(x)=x^3$,σχολικό βιβλίο σελ 136

A4.α) Λάθος

B) Σωστό

Γ) Σωστό

Δ) Σωστό

Ε) Σωστό

Θέμα Β:

B1. $A=(1,+\infty)$ π.ο της f $B=\mathbb{R}$ π.ο της g

$x \in B \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$g(x) \in A \Rightarrow e^x \in (1,+\infty) \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$

π.ο $(f \circ g) = (0,+\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B2.} (f \circ g)'(x) &= \left(\frac{e^x + 2}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x + 2)'(e^x - 1) - (e^x + 2)(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 2)e^x}{(e^x - 1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Άρα η $f \circ g$ γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) \frac{1}{e^x - 1} = 3(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x - 1} + \frac{3}{e^x - 1} \right) = 1$$

Η $f \circ g$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$(f \circ g)((0, +\infty)) = (1, +\infty)$$

$f \circ g$ γνησίως φθίνουσα άρα 1-1 άρα έχει αντίστροφη:

$$\text{π.ο } (f \circ g)^{-1} = (1, +\infty)$$

$$(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y \Leftrightarrow (1 - y)e^x = -y - 2 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{y+2}{y-1}. \text{ αφού } y > 1 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1} > 0 \text{ άρα } x = \ln \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \ln \frac{x+2}{x-1}$$

B3. $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2} \frac{(x+2)'(x-1) - (x+2)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1}{x+2} \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0, x > 1$$

η $\varphi(x)$ γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

B4.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \frac{x+2}{x-1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

Θέτω $y = \frac{x+2}{x-1}$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \frac{1}{x-1} = +\infty$$

αφού $x-1 > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 1} \ln y = 0$$

Θέτω $y = \frac{x+2}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$$

Θέμα Γ:

Γ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1-x} - \ln \lambda \right) = 1 - \ln \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \sigma \nu \nu x) = \lambda$$

Αφού η f είναι συνεχής θα πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow \lambda = 1 - \ln \lambda \Leftrightarrow \ln \lambda + \lambda - 1 = 0$$

Θέτω: $g(x) = \ln x + x - 1, x > 0$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$$

άρα η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Μία προφανής ρίζα της $g(x)$ είναι το $x=1$ που είναι και μοναδική αφού g γνησίως αύξουσα

Άρα $\lambda=1$

Γ2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$

Άρα $f'(0)=1 \Rightarrow \epsilon\phi\omega=1$, οπότε $\omega=\frac{\pi}{4}$ αφού $0 \leq \omega < \pi$

Γ3.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \text{ για } x \leq 0$$

$$f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, 0 < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \chi = \frac{\pi}{4} \text{ και } \chi = \frac{5\pi}{4} \text{ αφού } 0 < x < \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Κρίσιμα σημεία } x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}$$

Γ4.

Η εφαπτομένη της C_f στο M είναι

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$y - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x - a)$$

$$y = \frac{1}{(1-a)^2}x - \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{1}{1-a}$$

$$y = \frac{1}{(1-a)^2}x + \frac{1-2a}{(1-a)^2}$$

$$\text{Για } y=0 \text{ έχουμε } \frac{1}{(1-a)^2}x + \frac{1-2a}{(1-a)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(1-a)^2}x = \frac{2a-1}{(1-a)^2} \Leftrightarrow x = 2a-1$$

$$B(2a-1, 0)$$

$$X(t) = 2a(t) - 1$$

$$X'(t) = 2a'(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) = -\frac{2a(t)}{3}, \text{ αφού } a'(t) = -\frac{a(t)}{3}$$

$$\text{Επομένως, } X'(t_0) = \frac{2}{3}$$

Θέμα Δ

Δ1.

$$f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$$

$$f'(x) = e^x + 2x - e$$

$$f''(x) = e^x + 2 > 0$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ επομένως και στο $(0,1)$

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο $[0,1]$

Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών

$$f'(0) = 1 - e < 0$$

$$f'(1) = 2 > 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$

το οποίο είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα

Άρα συνοψίζοντας στον παρακάτω πίνακα έχουμε

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f''(x)$					
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$					

Ο.ε

Η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό άρα από θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(x_0) = 0$

$$\text{Δηλαδή } e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Rightarrow$$

$$e^{x_0} = e - 2x_0$$

$$\text{Επομένως } f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1$$

$$\text{Άρα } f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 \Rightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$$

$$\Delta 2. \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + n\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1 + (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right)}{f(x) - f(x_0)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \left[1 + (f(x) - f(x_0)) \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \cdot \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \right\} =$$

$$1(+\infty) = +\infty$$

Διότι $f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$ (αφού είναι ολικό ελάχιστο)

$$\text{Και } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$$

$$\text{Και από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[(f(x) - f(x_0)) \cdot \eta\mu \frac{1}{x - x_0} \right] = 0$$

Δ3. Έχουμε

$$\text{Η εξίσωση } f(x) + x = x_0 \Leftrightarrow f(x) + x - x_0 = 0$$

$$\text{Θέτω } g(x) = f(x) + x - x_0$$

Εφαρμόζω θεώρημα Bolzano στο $(x_0, 1)$ και έχω

Η g είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$

$g(x_0) = f(x_0) < 0$ διότι $x_0 > 0 \Rightarrow f(x) < f(0) \Rightarrow f(x) < 0$ επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, x_0)$

$$g(1) = 1 - x_0 > 0$$

Άρα $g(x_0) \cdot g(1) < 0$

Επομένως από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho) = 0$

δηλαδή η εξίσωση $f(x) + x - x_0 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα ρ στο $(x_0, 1)$.

Έχουμε $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$, $x > x_0$ άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(x_0, 1)$.

Επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

Δ4. η ανισότητα ισοδύναμα γίνεται $f(x_0) > f(\rho)f'(k) + f(\rho)$

$$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho)f'(k) \Leftrightarrow f(x) - f(\rho) > (x - \rho)f'(k)$$

$$\frac{f(x) - f(\rho)}{x - \rho} < f'(k)$$

Από Θ.Μ.Τ στο $[x_0, \rho]$

Η f είναι συνεχής στο $[x_0, \rho]$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ)

έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0}, \text{ για κάθε } k \in (\rho, 1)$$

Επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\xi < \rho < k \Rightarrow f'(\xi) < f'(\rho) < f'(k)$

$$\frac{f(\rho) - f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(k)$$

Επιμέλεια Απαντήσεων

Ανδριοπούλου Τασιάνα

Βρύνας Σπύρος

Λιακόπουλος Σπύρος

Παναγιωτοπούλου Μάγδα

Φωτόπουλος Γεώργιος