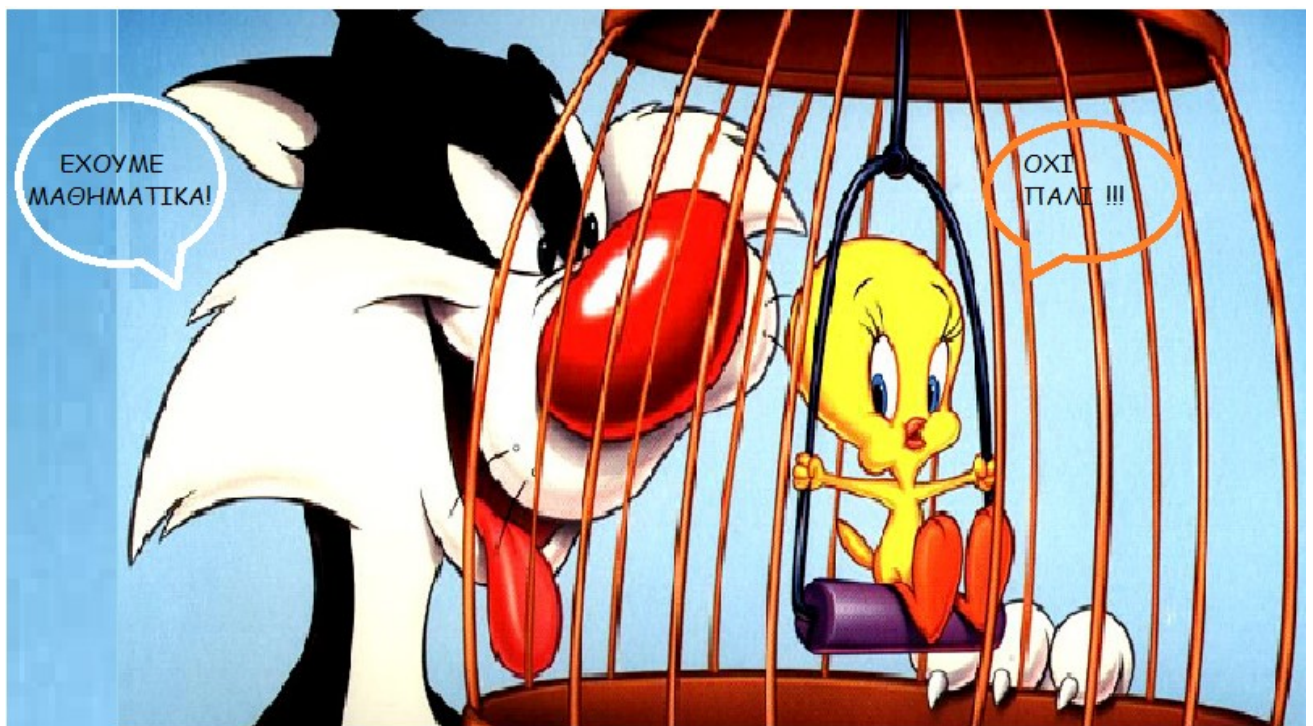


Περιεχόμενα

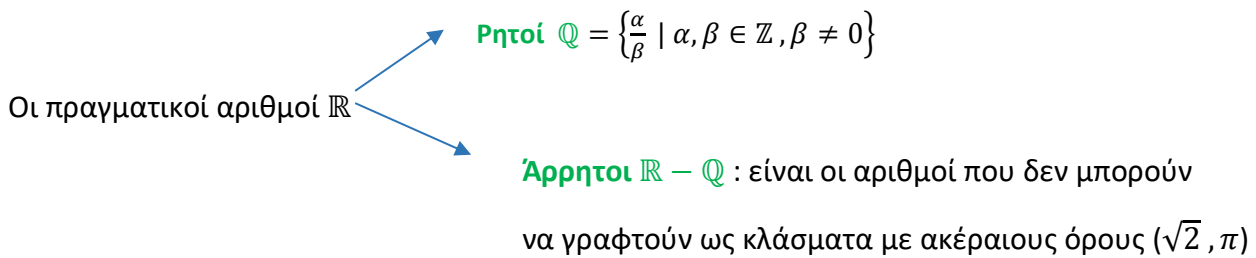
2.1.1 Πραγματικοί αριθμοί	5
Ασκήσεις στους πραγματικούς αριθμούς	7
2.1.2 Δυνάμεις	8
Ασκήσεις στις δυνάμεις.....	9
2.1.3 Ταυτότητες	11
Μέθοδοι απόδειξης σχέσεων και προτάσεων	11
Μέθοδοι απόδειξης ταυτοτήτων	12
Ασκήσεις στις ταυτότητες	13
Αναπτύγματα ταυτοτήτων	13
Αποδεικτικές	13
2.1.4 Μέθοδοι παραγοντοποίησης :	15
Ασκήσεις στην παραγοντοποίηση	16
Παραγοντοποίηση.....	16
Απλοποίηση	16
2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών	18
Ασκήσεις στην διάταξη πραγματικών αριθμών	20
2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού	23
Ασκήσεις στις απόλυτες τιμές	28
2.4 Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού.....	31
Ασκήσεις στις ρίζες.....	35
Επαναληπτικές Ασκήσεις στους πραγματικούς αριθμούς	39
1 Εξισώσεις 1 ^{ου} βαθμού.....	45
Ασκήσεις στις εξισώσεις 1 ^{ου} βαθμού	49
3.2 Η εξίσωση της μορφής $x^2 = a$	52
Ασκήσεις στην εξίσωση $x^2 = a$	52
3.3 Εξίσωση 2 ^{ου} βαθμού.....	53
Ασκήσεις στις εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	55
3.4 Τύποι Vieta.....	57
Ασκήσεις στο άθροισμα και γινόμενο ριζών	59
3.5 Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	62
Ασκήσεις στις εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	63

4.1 Ανισώσεις 1 ^{ου} βαθμού	67
Ασκήσεις ανισώσεις 1 ^{ου} βαθμού	68
4.2 Ανισώσεις 2 ^{ου} βαθμού και μορφές τριωνύμου	70
Ασκήσεις στις ανισώσεις 2 ^{ου} βαθμού	72
Ασκήσεις στις Εξισώσεις - Ανισώσεις	73
Ασκήσεις στις Εξισώσεις - Ανισώσεις	79
5.1 Ακολουθίες.....	87
Ασκήσεις στις ακολουθίες.....	87
5.2 Αριθμητική πρόοδος	88
Ασκήσεις στην αριθμητική πρόοδο	89
4.3 Γεωμετρική πρόοδος	91
Ασκήσεις στην γεωμετρική πρόοδο	93
Γενικές Ασκήσεις στις προόδους	95
5.1 Συναρτήσεις	99
Ασκήσεις στα πεδία ορισμού	100
5.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης	103
Ασκήσεις στη γραφική παράσταση συνάρτησης	104
5.3 Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$	107
Ασκήσεις στην ευθεία	108
5.4 Μετατόπιση γραφικής συνάρτησης συνάρτησης	112
Άσκηση	112
5.5 Μελέτη συναρτήσεων	113
Ασκήσεις στην μελέτη συναρτήσεων	116
Ασκήσεις στις Συναρτήσεις	118
Επαναληπτικές Ασκήσεις στην Άλγεβρα	131
Ενδεικτικές Ασκήσεις από την τράπεζα θεμάτων	137
Τράπεζα θεμάτων Α΄ Λυκείου	148

Οι πραγματικοί αριθμοί



2.1.1 Πραγματικοί αριθμοί



Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Πράξη Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
Προσεταιριστική	$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \cdot 1 = \alpha$
Αντίθετος αριθμός	$\alpha + (-\alpha) = 0$	
Αντίστροφος αριθμός		$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \gamma$	

Αφαίρεση : $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

Διαίρεση : $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$

Παρατήρηση:

Κάθε άρτιος αριθμός μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha = 2\kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Κάθε περιττός αριθμός μπορεί να πάρει τη μορφή : $\alpha = 2\kappa + 1$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

Τρεις διαδοχικοί ακέραιοι συμβολίζονται : $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2$

Παράδειγμα :

Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα δυο περιττών αριθμών είναι άρτιος

Λύση :

α : περιττός τότε $\alpha = 2\nu + 1$

β : περιττός τότε $\beta = 2\kappa + 1$

επομένως $\alpha + \beta = 2\nu + 1 + 2\kappa + 1 = 2\nu + 2\kappa + 2 = 2(\nu + \kappa + 1) =$
πολλαπλάσιο του 2(άρτιος)

Επιπλέον ιδιότητες

- 1) Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \delta$
- 2) Αν $\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta$ τότε $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta$
- 3) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$
- 4) Αν $\alpha \gamma \neq 0$ τότε: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$
- 5) $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$
- 6) $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Προσοχή !

Για να ορίζεται ένα κλάσμα πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός του μηδενός

Παράδειγμα :

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το παρακάτω κλάσμα

$$\frac{2x}{4x - 4}$$

Λύση :

Πρέπει $4x - 4 \neq 0$ άρα $x \neq 1$

Ιδιότητες των αναλογιών

- 1) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ $\beta \delta \neq 0$
- 2) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ $\beta \gamma \delta \neq 0$
- 3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ $\alpha \beta \delta \neq 0$
- 4) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$ $\alpha \beta \gamma \delta \neq 0$
- 5) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{\beta} = \frac{\gamma + \delta}{\delta}$ $\beta \delta \neq 0$
- 6) αν $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\gamma}$ τότε $\frac{\alpha}{\chi} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\chi + \gamma}$ $\chi \gamma (\chi + \gamma) \neq 0$

Άσκηση 5 σελ 53

i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha}$

Σύμφωνα με την ιδιότητα (6) έχουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\beta + \gamma + \alpha} = 1$

Άρα $\alpha = \beta = \gamma$ επομένως το τρίγωνο είναι ισόπλευρο

ii) $\alpha - \beta = \gamma - \alpha = \beta - \gamma$

Έχω ότι $\alpha - \beta = \gamma - \alpha = \beta - \gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha - \beta}{1} = \frac{\gamma - \alpha}{1} = \frac{\beta - \gamma}{1} = \frac{\alpha - \beta + \gamma - \alpha + \beta - \gamma}{3} = 0$

Άρα $\alpha = \beta$ και $\gamma = \alpha$. Επομένως το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο

Ασκήσεις στους πραγματικούς αριθμούς

1) Να γίνουν οι πράξεις :

i) $3[5(2x - 3y) - 4(3 - 2x)] + 5[-4(2x + 1) + 9y] + 2x$

ii) $-4 - 4\{-4 - 5[-2 - 3(x, -4)]\}$

2) Αν $x=1,765$ και $y=0,235$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = [x(5y + 4) - x(4 - 5y)] : (xy) - [2(x - 2y) + 3(x + 3y)]$$

3) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύουν :

i) $(x + 5)(x + 2) = 0$ ii) $(x - 3)(x + 1) \neq 0$ iii) $2x(x - 4)(x - 2) = 0$ iv) $3(1 - x)(-x - 3)x \neq 0$

4) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

i) $\frac{x+5}{x-3}$ ii) $\frac{5x+1}{(x-1)(2-x)}$ iii) $\frac{3x-2}{2x(x-3)(x+1)}$

5) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

i) $\frac{x-2}{1-\frac{1}{x}}$ ii) $\frac{3-\frac{6}{x}}{\frac{x-1}{x+2}}$

6) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y με $y \neq 0$, ισχύει $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$, τότε :

i) Να αποδείξετε ότι : $3y - 5x \neq 0$

ii) Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων : $A = \frac{3y+5x}{y}$, $B = \frac{5x-y}{3y-5x}$

7) Αν $\beta\delta \neq 0$ και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, να αποδείξετε ότι :

i) $\frac{3\alpha+5\beta}{2\beta}$ ii) $\frac{4\alpha-3\beta}{2\alpha+\beta} = \frac{4\gamma-3\delta}{2\gamma+\delta}$ $[(2\alpha+\beta)(2\gamma+\delta) \neq 0]$

2.1.2 Δυνάμεις

Ορισμός : ονομάζουμε δύναμη με βάση τον πραγματικό αριθμό a και εκθέτη τον θετικό ακέραιο n και συμβολίζουμε a^n τον πραγματικό αριθμό :

$$a^n = \begin{cases} a, & \text{αν } n = 1 \\ a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a, & n > 1 \end{cases}$$

Αν επιπλέον είναι $a \neq 0$, τότε ορίζουμε :

$$a^0 = 1 \quad \text{και} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ιδιότητες των δυνάμεων

- 1) $a^\kappa \cdot a^\lambda = a^{\kappa+\lambda}$
- 2) $\frac{a^\kappa}{a^\lambda} = a^{\kappa-\lambda}$
- 3) $(a^\kappa)^\lambda = a^{\kappa \cdot \lambda}$
- 4) $(a\beta)^\kappa = a^\kappa \cdot \beta^\kappa$
- 5) $\left(\frac{a}{\beta}\right)^\kappa = \frac{a^\kappa}{\beta^\kappa}$
- 6) $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{-\kappa} = \left(\frac{\beta}{a}\right)^\kappa$

Βασικό παράδειγμα :

Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y)^3} \cdot \frac{(xy^3)^3y}{(x^{-4}y^2)^2}$$

- i) Να αποδείξετε ότι $A = (xy)^9$
- ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2017$ και $y = \frac{1}{2017}$

Λύση :

- i) $A = \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y)^3} \cdot \frac{(xy^3)^3y}{(x^{-4}y^2)^2} = \frac{x^4y^6x^3y^9y}{x^6y^3x^{-8}y^4} = x^9y^9 = (xy)^9$
- ii) $A = \left(2017 \cdot \frac{1}{2017}\right)^9 = 1^9 = 1$

Ασκήσεις στις δυνάμεις

1) Να απλοποιηθούν οι δυνάμεις

$$i) \left(\frac{1}{3}a^{-1}\beta^2\gamma^3\right)^2 \quad ii) (2\alpha^3\beta^{-1}\gamma^2) \cdot (8\alpha^{-1}\beta^4\gamma^{-3}) \quad iii) \frac{16\alpha^6\beta^4}{24\alpha^{-2}\beta^3} \quad iv) \left(\frac{9\beta^3}{4a^5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3\beta^2}{16a^3}\right)^{-1}$$

2) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$i) A = (-1)^{17} - 1^{20} + (-1)^{12} + (-1)^{-1} - (-1)^0$$

$$ii) B = -2^2 - (-2)^2 + (-2)^3 - (-2)^{-1} + 2 \cdot 2^0$$

$$iii) \Gamma = 2^2 \cdot [(-1)^3]^8 + \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

3) Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ιδιοτήτων των δυνάμεων να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

$$i) A = 2^{17} \cdot 2^{-12} : (-2)^5 \quad ii) B = [(-2)^3]^8 \cdot (0,5)^{24} \quad iii) \Gamma = \left(-\frac{7}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-9} \quad iv) \Delta = \left(\frac{-3^2}{5}\right)^6 \cdot \left(-\frac{5^2}{3^3}\right)^4$$

4) Να γράψετε τις παραστάσεις με τη μορφή μιας δύναμης :

$$A = 4^5 \cdot 16^4 \cdot 64^2 \quad B = \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right)^{-4} - (-2)^8 \quad \Gamma = \left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3\right]^7$$

5) Αν $x, y \neq 0$, να αποδείξετε ότι :

$$i) (x^2 \cdot y^3)^3 + \left(\frac{x^2}{y^{-2}}\right)^3 \cdot y^3 - 2\left(\frac{x}{y^2}\right)^{-4} \cdot x^{10} \cdot y = 0$$

$$ii) [(x^2 \cdot x^3)^2 : (x^{-3} : x^{-2})^3] + \left(-\frac{1}{x^{-2}}\right)^6 \cdot x = 2x^{13}$$

6) Δίνεται η παράσταση $A = [(xy^2)^5 \cdot (x^2y^3)^{-4} \cdot y] : \left(\frac{y^3}{x^{-4}}\right)^{-2}$

$$i) \text{ Να αποδείξετε ότι } A = x^5 \cdot y^5$$

$$ii) \text{ Να βρείτε την τιμή της παράστασης για } x=4 \text{ και } y=5$$

7) Αν $x=0,8$ και $y=0,4$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων :

$$i) A = (x^2 \cdot y^{-3})^5 : (x^3 : y^5)^3 \quad ii) B = [(x^3 \cdot y^6)^4 : (y^{13} : x^{-5})^2]^5$$

$$iii) \Gamma = (x^3 : y)^4 \cdot (x^{-1} : y^3)^2 \quad iv) \Delta = (x^3 \cdot y^{-2})^6 : (x^5 \cdot y^{-2})^2$$

8) Αν οι αριθμοί x και y είναι αντίστροφοι, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{[(x^4 \cdot y^3)^{-1} \cdot (y^4 \cdot x^2)^2]^2}{(x^2 \cdot y)^{-10}}$$

9) Αν $x=3$ και $y=2$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = \left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{6}x^{-1} \cdot y^3\right)^{-2}$$

10) Αν $x = 10^{-5}$ και $y = -0,1^{-4}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = (x^3 \cdot y^{-1})^2 : [x^{-1} \cdot y \cdot (x^3 \cdot y^{-3})^{-1}]^{-2}$$

11) Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης την παράσταση :

$$A = \frac{4^{3n-6} \cdot 64^{-n}}{(-2)^{4n-6} : 16^n}$$

12) Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι :

- i) Ο αριθμός $A = 3^{n+3} + 3^{n+2} - 2 \cdot 3^{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 30
- ii) Ο αριθμός $B = 3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 14
- iii) Ο αριθμός $\Gamma = 3^{n+2} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1} + 6 \cdot 15^n$ είναι πολλαπλάσιο του 20.

13) Αν ο n είναι φυσικός αριθμός, να αποδείξετε ότι ο αριθμός :

$$A = \frac{11 \cdot 6^n + 3^{n+2} \cdot 2^n - 3^n \cdot 2^{n+3}}{2^{n+1} - 2^{n+2} + 2^{n+3}}$$

2.1.3 Ταυτότητες

Ταυτότητα

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

- | | |
|------|---|
| i) | $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| ii) | $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ |
| iii) | $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ |
| iv) | $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ |
| v) | $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ |
| vi) | $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ |
| vii) | $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ |

Παρατήρηση:

Επιπλέον ισχύουν οι ταυτότητες :

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

$$(\alpha + \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma$$

$$(\alpha - \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$$

Ταυτότητα του Euler : Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

$$13. \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta + \gamma) \cdot [(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] \quad \text{ταυτότητα Euler}$$

$$14. (x \pm a) \cdot (x \pm \beta) = x^2 \pm (a + \beta)x + a\beta \quad \text{ταυτότητα Newton}$$

$$15. (a^2 + \beta^2) \cdot (x^2 + y^2) = (ax + \beta y)^2 + (ay - \beta x)^2 \quad \text{ταυτότητα Lagrange}$$

$$16. a^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^2\beta^2 - 2\beta^2\gamma^2 - 2\gamma^2\alpha^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha - \beta - \gamma)$$

ταυτότητα De Moivre

Μέθοδοι απόδειξης σχέσεων και προτάσεων

Ευθεία απόδειξη

Για να αποδείξουμε έναν ισχυρισμό της μορφής " $P \Rightarrow Q$ " αρχίζουμε από την υπόθεση P ή από άλλες ήδη γνωστές σχέσεις και με διαδοχικές συνεπαγωγές καταλήγουμε στο συμπέρασμα Q.

πχ: αν $\alpha - \beta = 2$ να δείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha\beta + 2)$

Λύση:

$$\alpha - \beta = 2 \Rightarrow (\alpha - \beta)^2 = 2^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4 + 2\alpha\beta \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha\beta + 2)$$

Απαγωγή σε άτοπο

Για να αποδείξουμε έναν ισχυρισμό **P**:

Βήμα 1: υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός **δεν** ισχύει.

Βήμα 2: χρησιμοποιώντας αυτή την υπόθεση και γνωστές ορθές προτάσεις καταλήγουμε σε κάτι που γνωρίζουμε ότι είναι **άτοπο** (δεν είναι αλήθεια, λανθασμένο).

Βήμα 3: άρα ήταν λάθος η υπόθεση ότι ο ισχυρισμός **P** δεν ισχύει.

Άρα ο P ισχύει!

Παράδειγμα:

έστω x ένας αριθμός ώστε να ισχύει $x^3 + 5x + 2018 = 0$. Να δείξετε ότι $x \neq 0$

Λύση:

Έστω ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός $x \neq 0$. Τότε θα ισχύει $x=0$.

Από τη δοσμένη σχέση (αντικαθιστούμε όπου x το 0) έχουμε

$$0^3 + 5 \cdot 0 + 2018 = 0 \Rightarrow 2018 = 0$$

κάτι που προφανώς είναι άτοπο. Άρα $x \neq 0$

Μέθοδοι απόδειξης ταυτοτήτων

μορφή: $A=\Delta$, Αριστερό μέλος = Δεξί μέλος

 αρχίζουμε από το ένα μέλος (συνήθως από αυτό που υπάρχουν εμφανείς πράξεις που μπορούν να γίνουν) και μετά από διαδικασίες και πράξεις καταλήγουμε στο άλλο μέλος. (δηλαδή $A=\dots=\Delta$ ή $\Delta=\dots=A$)

 παίρνουμε κάθε μέλος ξεχωριστά και καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα. (δηλαδή $A=\dots=\Gamma$ και $\Gamma=\dots=\Delta$ οπότε $A=\Delta$)

 γράφουμε αυτό που θέλουμε να δείξουμε και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε κάτι που ισχύει (ή πάντα ή από υπόθεση). Άρα ισχύει και η αρχική σχέση.

Βασικό παράδειγμα 1

i) Να αποδείξετε ότι $(\alpha + 2\beta)^2 - (\alpha - 2\beta)^2 = 8\alpha\beta$

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left(2018 + \frac{1}{1009}\right)^2 - \left(2018 - \frac{1}{1009}\right)^2$

Λύση:

$$i) (\alpha + 2\beta)^2 - (\alpha - 2\beta)^2 = \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 - (\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2) = 8\alpha\beta$$

$$ii) \left(2018 + \frac{1}{1009}\right)^2 - \left(2018 - \frac{1}{1009}\right)^2 = \left(2018 + 2\frac{1}{2018}\right)^2 - \left(2018 - 2\frac{1}{2018}\right)^2 \\ = 8 \cdot 2018 \cdot \frac{1}{2018} = 8$$

Ασκήσεις στις ταυτότητες

Αναπτύγματα ταυτοτήτων

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

$$(\alpha+4)^2 \quad \left(\frac{1}{3}x+4\right)^2 \quad (2\rho-3t)^2 \quad (3\alpha\beta^2-2\alpha^2\beta)^2 \quad \left(3x-\frac{1}{y^2}\right)^2$$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

$$(\alpha+4)^3 \quad (x^2+2yz)^3 \quad \left(2a^3+\frac{2\beta^2}{3}\right)^3 \quad (\omega-3)^3 \quad (3\kappa\lambda^2-2\lambda^2)^3$$

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

$$(-4x-2y)^2 \quad (-3x-\omega)^3 \quad (-2\alpha+3\beta^2)^3 \quad (-3\chi+4y)(3\chi+4y)$$

4. Να κάνετε τις πράξεις: $A = (4x+5y)(4x-5y)(16x^2+25y^2)$

5. Να συμπληρώσετε τις ισότητες :

i. $(5+ \dots)^2 = \dots + \dots + 9x^2$

ii. $(\dots + \dots)^2 = 4\alpha^2 + \dots + \beta^2$

Αποδεικτικές

6. Να αποδείξετε ότι $(x-2)^3 - x(x-4)^2 - 2(x+2)(x-2) = -4x$

7. Να αποδείξετε ότι $9(a+2)^2 - a(a-8) = 4(a+1)(2a+9)$

8. Να αποδείξετε ότι $(a+1)^2 + (a-1)^2 = 5a + (a-2)(2a-1)$

9. Να αποδειχθούν οι παρακάτω ταυτότητες:

i) $(a^2+4)(x^2+1) - (ax+2)^2 = (2x-a)^2$

ii) $(a+\beta)^2 + 2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha^2$

iii) $(a+2)^2 - 4(a+1)^2 + (a-2)^2 + 6a^2 = 4(a-1)^2$

iv) $a(a-3\beta)^2 + \beta(\beta-3\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^3$

10. Να αποδείξετε ότι:

i) $\text{Αν } (\alpha+\beta) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 4 \text{ τότε } \alpha = \beta$

ii) $\text{Αν } \alpha + \beta = 1 \text{ τότε } \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = 1$

iii) $\text{Αν } \alpha + \beta = 1 \text{ τότε } \alpha^3(\beta+1) - \beta^3(\alpha+1) = \alpha - \beta$

11. Να αποδείξετε ότι:

$$i) 1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} = 5 \Rightarrow \alpha = \beta \quad ii) 2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 \Rightarrow \alpha = \beta$$

12. α. Να αποδειχθεί ότι $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

$$\beta. \text{ Να βρείτε την τιμή της παράστασης : } \kappa = \left(\frac{3456}{2561} + \frac{2561}{3456} \right)^2 - \left(\frac{3456}{2561} - \frac{2561}{3456} \right)^2$$

13. Αν $x + \frac{1}{x} = 3$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$ και $B = x^3 + \frac{1}{x^3}$

14. Αν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = 0$ να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = \gamma$

15. Αν $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι :

$$i) a(a+2) + \beta(\beta+2) + 2\alpha\beta = 3 \quad ii) (2\alpha - \beta)^2 + (2\beta + \alpha)^2 + 10\alpha\beta = 5$$

1. Να αποδείξετε ότι :

$$i) (a + \beta)^2 - (a - \beta)^2 = 4\alpha\beta$$

$$ii) \left(\frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2017} \right)^2 - \left(\frac{2017}{2018} - \frac{2018}{2017} \right)^2 = 4$$

2. Να αποδείξετε ότι :

$$i) a^2 - (a-1)(a+1) = 1$$

$$ii) 1,775^2 - 0,775 \cdot 2,775 = 1$$

3. i) Να αποδείξετε ότι :

$$\left[\frac{x(x+1)}{2} \right]^2 - \left[\frac{(x-1)x}{2} \right]^2 = x^3$$

ii) να υπολογίσετε την τιμή του κλάσματος :

$$\frac{(300 \cdot 301)^2 - (299 \cdot 300)^2}{4}$$

4. Να αποδείξετε ότι :

i) Αν ο αριθμός $(\alpha + 1)^2$ είναι άρτιος, τότε ο αριθμός α είναι περιττός

ii) Αν οι αριθμοί α και $\alpha^2 + \beta^2$ είναι άρτιοι, τότε ο αριθμός β είναι άρτιος

5. Να αποδείξετε ότι αν το γινόμενο δύο ακέραιων αριθμών α και β είναι άρτιος, τότε ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι άρτιος

2.1.4 Μέθοδοι παραγοντοποίησης :

Παραγοντοποίηση : είναι η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε ένα άθροισμα σε γινόμενο

- 1) Κοινός παράγοντας: Αν σε κάθε όρο του αθροίσματος υπάρχει κάποιος κοινός παράγοντας, τότε βγαίνει έξω από μια παρένθεση

$$i) 2x - 2y = 2(x - y)$$

$$ii) x^2 - x = x(x - 1) \quad iii) 4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$$

- 2) Ομαδοποίηση : (κοινός παράγοντας ανά ομάδες)

$$i) ax - ay + 2x - 2y = a(x - y) + 2(x - y) = (x - y)(a + 2)$$

$$ii) x^2 - x + 2x - 2 = x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$$

- 3) Ανάπτυγμα κάποιας γνωστής ταυτότητας :

$$i) x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4) \quad ii) x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

- 4) Τριώνυμο : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$$\text{Βρίσκω τη διακρίνουσα } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

- Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει 2 ρίζες άνισες : $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \chi_1)(x - \chi_2)$$

- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα την $\chi_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \chi_0)^2$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

Βασικό παράδειγμα

$$\text{Δίνεται η παράσταση } A = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 4x}$$

- i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

- ii) Για τις τιμές που βρήκατε να απλοποιηθεί η παράσταση A

Λύση:

- i) Η παράσταση είναι κλασματική επομένως για να ορίζεται πρέπει ο παρονομαστής να είναι διαφορετικός από του μηδενός

$$\text{Δηλαδή } x^3 - 4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) \neq 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \neq 0 \text{ και } x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

- ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0, \pm 2\}$ η παράσταση A γίνεται

$$A = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 4x} = \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{x(x^2 - 4)} = \frac{x(x - 2)(x - 3)}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{x - 3}{x + 2}$$

Ασκήσεις στην παραγοντοποίηση

Παραγοντοποίηση

1. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

- i. $12a^2\beta^2\gamma - 4a^2\beta^3\gamma^2 - 20a^4\beta^4\gamma^3$
- ii. $\alpha(\chi + y) - \beta(\chi + y)$
- iii. $x(3a - \beta) - y(\beta - 3a)$
- iv. $(2a - \beta)(x + y) + (-x - y)(a - 2\beta)$

2. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

- i) $x^2 + xy - x - y$ ii) $2ax - y + ay - 2x$
- iii) $2a^3 - 4a^2 + 5a - 10$ iv) $3a - b - 9a^2\beta + 3a\beta^2$

3. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

- i) $9a^2 - x^2y^2$ ii) $(a - \beta)^2 - 1$ iii) $(a - 2\beta)^2 - 4\beta^2$
- iv) $x^2 - 4x + 4 - y^2$ v) $16 - x^2 + 2xy - y^2$

4. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

- i) $x^3y^3 + 1$ ii) $1 + 64x^3$ iii) $x^3 - 8$ iv) $8x^3 - 27$

5. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

- i) $x^2 - 10x + 25$ ii) $9x^2 + 4y^2 + 12xy$ iii) $x^4 + 9y^2 - 6x^2y$

6. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις :

- i) $x^2 - 4x + 3$ ii) $x^2 + 7x + 10$ iii) $x^2 + 4x + 3$ iv) $x^2 - 5x + 4$
- v) $x^2 + 3x - 10$ vi) $x^2 - 2x - 8$

7. Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις:

- i) $x^5 - x^4 - 2x^3$ ii) $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2$
- iii) $(x + y) - (a + \beta)^2 \cdot (x + y)$ iv) $(x - 3)x^3 + (x - 3)$

8. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

- i) $2(9 - x^2) - (x - 3)^2$ ii) $(x^2 - 4)^2 - (x + 2)^2$ iii) $x(x^2 - 1) + 3(1 - x)^2 + 7x - 7$

9. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

- i) $a^3 + a^2\beta - a\beta^2 - \beta^3$ ii) $(a^3 + 1) + 2(a^2 - 1) - (a + 1)^3$

Απλοποίηση

10. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

- i) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x}$ ii) $\frac{(x^2 - x) + 3x - 3}{x^2 - 9}$ iii) $\frac{x(x - 4) + 4}{x(x - 2) - x + 2}$
- iv) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ v) $\frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 4x}$

11. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$i) \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{1 - x} \quad ii) \frac{3}{2x + 2} - \frac{2}{3x - 3} + \frac{5x + 3}{6x^2 - 6}$$

12. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$i) \frac{x^4 - x^2 - 4x^2 + 4}{x^3 + 8} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 4x} \quad ii) \frac{x^2 - 9}{x - 2} \cdot \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 27} : \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + x}$$
$$iii) \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \quad iv) \frac{x^4 - x^3 - 6x^2}{(2x - 1)(x + 1)^2 + 1 - 2x}$$

13. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα :

$$i) \frac{(\alpha - \beta)^2 + \alpha\beta}{\alpha^3\beta + \beta^4} \quad ii) \frac{\alpha^4x - \beta^4x}{\alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta^3} \quad iii) \frac{(\alpha\beta + 1)^2 - (\alpha - 1)^2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$
$$iv) \frac{x^2 - (\alpha - \beta)x - \alpha\beta}{x^3 + \beta x^2 - \alpha^2x - \alpha^2\beta}$$

2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

Ορισμός: Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β , και γράφουμε $\alpha > \beta$, όταν η διαφορά $\alpha - \beta$ είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι **μικρότερος** του α και γράφουμε $\beta < \alpha$

Ιδιότητες της διάταξης

1. $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\alpha + \beta > 0$
2. $\alpha < 0$ και $\beta < 0$ τότε $\alpha + \beta < 0$
3. α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} > 0$
4. α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 0$
5. $\alpha^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$
6. $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ και $\beta = 0$
7. $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

- i) $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$ (μεταβατική ιδιότητα)
- ii) $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- iii) αν $\gamma > 0$ τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \gamma > \beta \gamma$
- iv) αν $\gamma < 0$ τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \gamma < \beta \gamma$
- v) αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$
- vi) για θετικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha \gamma > \beta \delta$
- vii) για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο n ισχύει η ισοδυναμία $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^n > \beta^n$

1η κατηγορία άσκησης

- i) αν $\alpha > 3 > \beta > 1$ να αποδείξετε ότι $3 + \alpha\beta > \alpha + 3\beta$
- ii) να αποδείξετε ότι $(\alpha + 2\beta)^2 \geq 3\beta^2 + 2\alpha\beta$

Λύση:

- i) $3 + \alpha\beta > \alpha + 3\beta$ αρκεί να δείξουμε ότι $3 + \alpha\beta - \alpha - 3\beta > 0$
Έχω ότι $3 + \alpha\beta - \alpha - 3\beta = (3 - \alpha) - \beta(3 - \alpha) = (3 - \alpha)(1 - \beta) > 0$
Ισχύει Διότι $3 - \alpha < 0$ και $1 - \beta < 0$
- ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $(\alpha + 2\beta)^2 - 3\beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0$
Έχω ότι :

$$(\alpha + 2\beta)^2 - 3\beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 - 3\beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 \geq 0 \text{ ισχύει}$$

2^η κατηγορία άσκησης

Αν $2 \leq \alpha \leq 4$ και $1 \leq \beta \leq 3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή κάθε μιάς παράστασης

i) 2α ii) $2\alpha - \beta$ iii) $\alpha^2 + \beta^2$ iv) $\frac{\alpha}{\beta} + 6$

Λύση:

- i) Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανισότητας $2 \leq \alpha \leq 4$ με το 2 και έχουμε $4 \leq 2\alpha \leq 8$ (1)
- ii) Πολλαπλασιάζουμε την ανίσωση $1 \leq \beta \leq 3$ με το -1 οπότε $-1 \geq -\beta \geq -3$ ή $-3 \leq -\beta \leq -1$ (2)
προσθέτουμε τις ομοιόστροφες ανισώσεις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε $1 \leq 2\alpha - \beta \leq 3$
- iii) Όλοι οι όροι της ανισότητας $2 \leq \alpha \leq 4$ είναι θετικοί οπότε υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε $4 \leq \alpha^2 \leq 16$ (3)
Όμοια $1 \leq \beta^2 \leq 9$ (4)
Προσθέτουμε τις (3) και (4) κατά μέλη και έχουμε $5 \leq \alpha^2 + \beta^2 \leq 25$
- iv) $1 \leq \beta \leq 3$ τότε $1 \leq \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{3}$ (5)
Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (5) κατά μέλη $2 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq \frac{4}{3}$
Άρα $8 \leq \frac{\alpha}{\beta} + 6 \leq \frac{22}{3}$

3^η κατηγορία άσκησης

- i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha + 6\beta + 13 \geq 0$
- ii) Για ποιες τιμές των α και β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha + 6\beta + 13 > 0$;
- iii) Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε να ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha + 6\beta + 13 = 0$

Λύση:

- i) $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha + 6\beta + 13 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\alpha + 4 + \beta^2 + 6\beta + 9 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (\alpha + 2)^2 + (\beta + 3)^2 \geq 0$ ισχύει άρα και η αρχική
- ii) Για να ισχύει η σχέση $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha + 6\beta + 13 > 0$ πρέπει $(\alpha + 2)^2 + (\beta + 3)^2 \neq 0$ αυτό ισχύει αν $\alpha + 2 \neq 0$ ή $\beta + 3 \neq 0$
Άρα όταν $\alpha \neq -2$ ή $\beta \neq -3$
- iii) $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha + 6\beta + 13 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)^2 + (\beta + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 0$ και $\beta + 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -2$ και $\beta = -3$

Ασκήσεις στην διάταξη πραγματικών αριθμών

1) Αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

i) $7\alpha + 2\gamma$ και $7\beta + 2\gamma$

ii) $5\gamma - 3\alpha$ και $5\gamma - 3\beta$

2) Αν $\alpha > 6$, να αποδείξετε ότι $5(\alpha - 1) - 2\alpha > \alpha + 7$

3) Να αποδείξετε ότι :

i) $a^2 + 4 \geq 4a$ ii) $a^2 + 9 \geq -6a$ iii) $a^4 + 16 \geq 8a^2$ iv) $(a + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

v) $2(a^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$ vi) $(a - \beta)^2 + 8a^2 \geq 4\alpha\beta$ v) $\frac{9x^2 + 1}{6} \geq x$ vi) $\frac{x^2}{1 + x^4} \leq \frac{1}{2}$

4) Να αποδείξετε ότι :

i) $x^2 + z^2 - 2xy \geq -y^2$ ii) $x^2 + 4 \geq 4x - y^2$

5) Να αποδείξετε ότι :

i) $13(x^2 + y^2) \geq (2x + 3y)^2$ ii) $(a^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + \beta y)^2$

6) Να αποδείξετε ότι :

i) Αν $0 < x < 1$ τότε $x^3 < x$ ii) αν $x > 1$ τότε $x^3 > x$

7) Αν $x > 2$ να αποδείξετε ότι :

i) $x^3 \geq 2 - 3x + 6x^2$ ii) $x^3 - 4x > 8 - 2x^2$

iii) $x^3 - 6x^2 > 8 - 12x$ iv) $x^3 - 2x^2 > -x + 2$

8) Αν $x \geq 1$, να αποδείξετε ότι :

i) $x^3 - x \geq 1 - x^2$ ii) $x^3 + 4x \geq x^2 + 4$ iii) $x^3 - 3x^2 \geq 1 - 3x$ iv) $x^3 + 3x > x^2 + 3$

9) Να συγκρίνετε τους αριθμούς :

i) $x = 2a^2 + 1$ και $y = 2a(2 - a)$ ii) $x = a^2 + 1$ και $y = 2a - \beta^2$

iii) $x = a^2 - a$ και $y = 3a - 4$ iv) $x = \beta(2\alpha - \beta)$ και $y = 2\alpha(2\alpha - \beta)$

10) Αν $x < -1$ να συγκρίνετε τους αριθμούς

i) $x^3 + 1$ και $x^2 + x$ ii) $x^2(x + 1)$ και $4(x^2 - 1)$

11) Αν $\alpha < \beta$ να αποδείξετε ότι : $\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

12) Αν $\alpha, \beta < 0$, να αποδείξετε ότι : $1 < \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha^2 + \beta^2} \leq 2$

13) Αν $2 \leq \alpha < 4$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις :

$$i) -4\alpha \quad ii) 4\alpha + 1 \quad iii) \alpha - 1 \quad iv) \alpha^2 \quad v) \frac{2}{\alpha}$$

14) Αν $1 \leq \alpha \leq 3$ και $4 \leq \beta < 6$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της καθεμιάς παράστασης

$$i) \alpha + \beta \quad ii) \alpha - \beta \quad iii) \frac{\alpha}{\beta} \quad iv) \alpha^2 + \beta^2$$

15) Αν $4 < \alpha \leq 6$ και $1 \leq \beta < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η τιμή της καθεμιάς παράστασης

$$i) \alpha + 2\beta \quad ii) \alpha - 2\beta \quad iii) 3\alpha - 5\beta - 5 \quad iv) \alpha^2 - \beta^2$$

16) Αν $0 < x < y < z < \omega$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$$A = (3y - x)(3z - 2y)(x - 2\omega)$$

17) Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι :

$$i) \alpha^3 + \beta^3 \geq \alpha\beta(\alpha + \beta) \quad ii) \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$$

18) Αν $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, να αποδείξετε ότι :

$$(\alpha - \beta) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \geq 4$$

19) Να αποδείξετε ότι :

$$i) a^2 + 4a + 5 > 0 \quad ii) a^2 + 3 > 2a \quad iii) 2a^2 > 6a + 9 \\ iv) 2a^2 - 8a + 16 > 0 \quad v) a^2 - 3a + 3 > 0 \quad vi) a^2 + 5a + 7 > 0$$

20) Να αποδείξετε ότι :

$$i) \alpha^2 + \beta^2 + 2 \geq 2(\alpha + \beta) \quad ii) \alpha^2 + \beta^2 + 8 \geq 4(\alpha - \beta) \\ iii) \alpha^2 + \beta^2 + 5 \geq 2(2\alpha + \beta) \quad iv) 2\alpha(\alpha - \beta) \geq 2\alpha - (\beta^2 + 1) \\ v) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 3 \geq 2(\alpha + \beta + \gamma) \quad vi) 2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2\alpha(\beta + \gamma) \\ vii) \alpha^2 + \beta^2 + 13 \geq 2(2\alpha + 3\beta) \quad viii) 2\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 5 \geq 2(\alpha + 2\beta)$$

21) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y , για τους οποίους ισχύει :

$$i) x^2 + y^2 + 9 = 6x \quad ii) x^2 + 2y^2 - 2xy - 6y + 9 \leq 0 \\ iii) x^2 + y^2 - x - y - xy + 1 \leq 0 \quad iv) x^2 + 2y^2 - 2xy + 4y + 4 \leq 0$$

22) Αν $0 < x < 1$, τότε :

i) Να αποδείξετε ότι $x^3 < x$

ii) Να διατάξετε από το μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς :

$$\frac{1}{x}, x^3, x, 0, x^3 - 1, 1$$

23) Αν $\alpha + 2\beta = 2$, να αποδείξετε ότι :

$$i) \alpha\beta \leq \frac{1}{2} \quad ii) \alpha^2 + 4\beta^2 \geq 2$$

24) Αν $\alpha + \beta = 1$, να αποδείξετε ότι :

$$i) \alpha\beta \leq \frac{1}{4} \quad ii) \alpha^2 + \beta^2 \geq \frac{1}{2}$$

25) Αν x, y, z είναι ομόσημοι αριθμοί, να αποδείξετε ότι :

$$i) \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad ii) \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6 \quad iii) (x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

$$iv) \left(x + \frac{1}{y} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{x} \right)^2 \geq 8$$

2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Ορισμός :

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

- Η απόλυτη τιμή ενός θετικού είναι ο ίδιος ο αριθμός
- Η απόλυτη τιμή ενός αρνητικού είναι ο αντίθετός του

Ιδιότητες των απολύτων τιμών

i) $|a| \geq 0, |a| \geq a, |a| \geq -a$

ii) $|a|^2 = |a^2| = a^2$

iii) (Οι παρακάτω ιδιότητες είναι χρήσιμες για την επίλυση εξισώσεων)

- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$
- Αν $\theta > 0$ τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = a \text{ ή } x = -a$

iv) Αν $\theta > 0$ τότε:

- $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
- $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta \text{ ή } x \leq -\theta$

v) $|a\beta| = |a| |\beta|$

vi) $\left| \frac{a}{\beta} \right| = \frac{|a|}{|\beta|}$

vii) $|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$

viii) $d(x, a) = |x - a|$

Απόδειξη :

vi) $|a\beta| = |a| |\beta| \Leftrightarrow |a\beta|^2 = (|a| |\beta|)^2 \Leftrightarrow |a\beta|^2 = |a|^2 |\beta|^2 \Leftrightarrow (a\beta)^2 = a^2 \beta^2$ ισχύει αρα και η αρχική

vii) $|a + \beta| \leq |a| + |\beta| \Leftrightarrow |a + \beta|^2 \leq (|a| + |\beta|)^2 \Leftrightarrow$

$$a^2 + 2a\beta + \beta^2 \leq |a|^2 + 2|a||\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow 2a\beta \leq 2|a||\beta| \Leftrightarrow a\beta \leq |a||\beta|$$

Πώς βρίσκω το πρόσημο της πρωτοβάθμιας $\alpha x + \beta$ με $\alpha \neq 0$;

- βρίσκω τη ρίζα του $\alpha x + \beta$:

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

- Κατασκευάζω πίνακα προσήμου ως εξής

X	$-\infty$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	$+\infty$
$\alpha x + \beta$	Ετερόσημο του α		Ομόσημο του α

1^η κατηγορία άσκησης

Αν ισχύει ότι $1 < x < 4$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$A = |x - 1| + |x - 4|$$

$$B = |x| - |x - 5|$$

Λύση:

i)

- $x > 1$ άρα $x - 1 > 0$
- $x < 4$ άρα $x - 4 < 0$

$$A = |x - 1| + |x - 4| = x - 1 - (x - 4) = x - 1 - x + 4 = 3$$

ii)

- $x > 1 > 0$
- $x < 4 < 5$

$$B = |x| - |x - 5| = x + (x - 5) = 2x - 5$$

2^η κατηγορία άσκησης

Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις

$$i) A = 3 - |x - 3|$$

$$ii) B = 2x + |x - 3| - |2 - x|$$

Λύση:

$$i) A = 3 - |x - 3|$$

- Αν $x < 3$ τότε $x - 3 < 0$ οπότε $A = 3 + (x - 3) = 3 + x - 3 = x$
- Αν $x \geq 3$ τότε $x - 3 \geq 0$ οπότε $A = 3 - x + 3 = 6 - x$

$$ii) B = 2x + |x - 3| - |2 - x|$$

Βρίσκω το πρόσημο των παραστάσεων που βρίσκονται μέσα στα απόλυτα

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x - 3$	-	-	○	+
$2 - x$	+	○	-	-

Αν $x < 2$ τότε

$$B = 2x + |x - 3| - |2 - x| = 2x - (x - 3) - (2 - x) = 2x - x + 3 - 2 + x = 2x + 1$$

Αν $2 \leq x < 3$ τότε

$$B = 2x + |x - 3| - |2 - x| = 2x - (x - 3) + (2 - x) = 2x - x + 3 + 2 - x = 5$$

Αν $x \geq 3$ τότε

$$B = 2x + |x - 3| - |2 - x| = 2x + (x - 3) + (2 - x) = 2x + x - 3 + 2 - x = 2x - 1$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$B = \begin{cases} 2x + 1, & \text{αν } x < 2 \\ 5, & \text{αν } 2 \leq x < 3 \\ 2x - 1, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

3^η κατηγορία άσκησης

Να λυθούν οι εξισώσεις

$$i) |x - 2| = 5 \quad ii) |x - 2| = |x - 3| \quad iii) |x - 3| = -8$$

Λύση:

$$i) |x - 2| = 5$$

$$x - 2 = 5 \quad \text{ή} \quad x - 2 = -5$$

$$x = 7 \quad \text{ή} \quad x = -3$$

$$ii) |x - 2| = |x - 3|$$

$$x - 2 = x - 3 \quad \text{ή} \quad x - 2 = -x + 3$$

$$0x = -1 \quad \text{αδύνατη} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5}{2}$$

$$iii) |x - 3| = -8 \quad \text{αδύνατη διότι η απόλυτη τιμή είναι πάντα θετικός αριθμός ή μηδέν}$$

4^η κατηγορία άσκησης

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $|x - 3| < 5$ ii) $|x - 4| \geq 8$ iii) $|x + 7| < -4$

Λύση :

i) $|x - 3| < 5$

$$-5 < x - 3 < 5$$

$$-5 + 3 < x < 5 + 3$$

$$-2 < x < 8$$

ii) $|x - 4| \geq 8$

$$x - 4 \geq 8 \text{ ή } x - 4 \leq -8$$

$$x \geq 12 \text{ ή } x \leq -4$$

iii) $|x + 7| < -4$ αδύνατη διότι η απόλυτη τιμή δεν γίνεται να είναι μικρότερη από έναν αρνητικό αριθμό

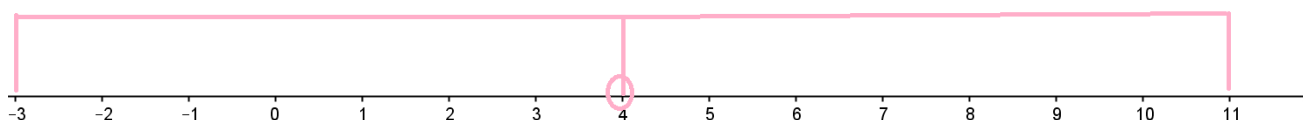
5^η κατηγορία άσκησης

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Απόσταση	Απόλυτη τιμή	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$d(x, 4) < 7$	$ x - 4 < 7$	$x \in (-3, 11)$
$d(x, -3) > 2$	$ x - (-3) > 2$	$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$
$d(x, 3) < 6$	$ x - 3 < 6$	$x \in (-3, 9)$
$d(x, 2) < 4$	$ x - 2 < 4$	$x \in (-2, 6)$
$d(x, 4) > 3$	$ x - 4 > 3$	$x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$

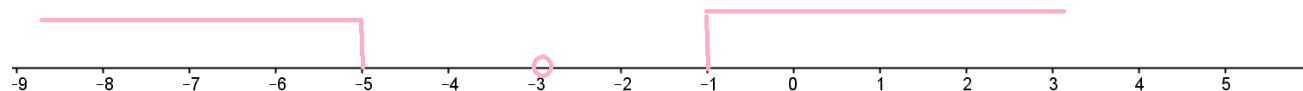
Λύση:

$\Rightarrow d(x, 4) < 7 \Leftrightarrow |x - 4| < 7$ η απόσταση του x από το 4 είναι μικρότερη από 7



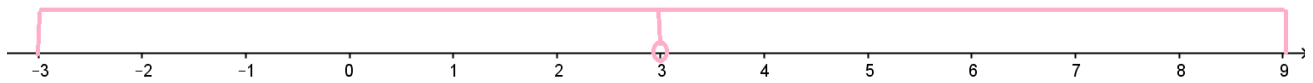
$$x \in (-3, 11)$$

$\Rightarrow d(x, -3) > 2 \Leftrightarrow |x - (-3)| > 2$ η απόσταση του x από το -3 είναι μεγαλύτερη του 2

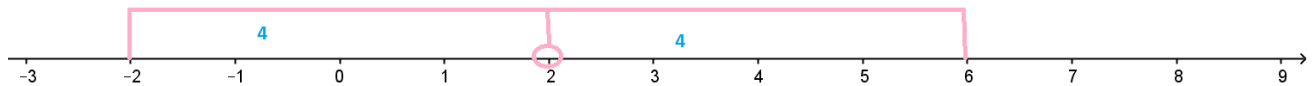


$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$$

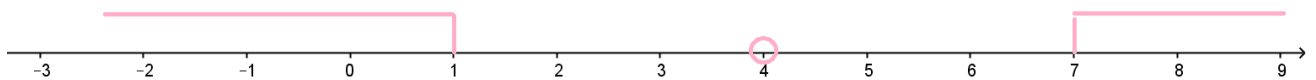
~~✗~~ $|x - 3| < 6$ η απόσταση του x από το 3 είναι μικρότερη του
 $x \in (-3, 9)$



~~✗~~ $x \in (-2, 6)$



άρα $d(x, 2) < 4$ δηλαδή $|x - 2| < 4$



~~✗~~ $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$

$d(x, 4) > 3$ δηλαδή $|x - 4| > 3$

Ασκήσεις στις απόλυτες τιμές

1) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

$$i) A = |x^2 + 7| \quad ii) B = |-x^2 - 3| \quad iii) \Gamma = |x^2 - 4x + 4| \quad iv) \Delta = |-x^2 + 2x - 1|$$

2) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

$$i) A = |x| + 1 \quad ii) B = 1 - |x - 3| \quad iii) \Gamma = |x + 1| + x \quad iv) \Delta = |3|x| + 7|$$

3) Αν $-1 < x < 1$, να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση

$$A = |x + 1| + |x - 1|$$

4) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $A = |x - 4| - |6 - x|$

όταν

$$i) \quad x < 4$$

$$ii) \quad x > 6$$

5) Αν $1 < x < 5$, να αποδείξετε ότι :

$$i) |x - 1| + |x - 5| = 4 \quad ii) |2x - 2| + |2x - 10| = 8$$

6) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$i) A = 2 - |x - 5| + |5 - x| \quad ii) B = \frac{|x - 2|}{|2 - x|} + \frac{|-x - 1|}{|x + 1|}, x \neq 1, 2$$

7) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

$$i) A = |x - 3| + |3 - x| \quad ii) B = 4x + |x - 1| - |5 - 5x|$$

8) Αν $x, y \neq 0$ να βρείτε τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι παραστάσεις :

$$i) A = \frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y} \quad ii) B = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y} + \frac{|xy|}{xy}$$

9) Να αποδείξετε ότι :

$$i) \frac{|x^3 + 2x|}{x^2 + 2} = |x| \quad ii) \frac{|-x^3 + 2x^2 - x|}{(x - 1)^2} = |x|, x \neq 1$$

10) Αν $|5\alpha - 2\beta| = |5\beta - 2\alpha|$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$

11) Αν $|3\alpha - 2\beta| = |2\alpha - 3\beta|$, να αποδείξετε ότι $|\alpha| = |\beta|$

12) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

$$i) d(x, 3) = 0 \quad ii) d(2x, 4) = 0 \quad iii) d(x - 8, 0) = 0$$

$$iv) d(x, 0) = 4 \quad v) d(x, 3) = 5 \quad vi) d(x, -5) = 7$$

13) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

$$i) |5x + 2| = 0 \quad ii) |x| = 7 \quad iii) |x - 3| = 4 \quad iv) |x + 1| = 2 \quad v) |3x - 6| = 12$$

$$vi) |2x - 3| = 5 \quad vii) 2|x - 4| = 6 \quad viii) 3|2x - 5| = 9 \quad ix) 2|x + 5| - 6 = 0$$

14) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

i) $|2x - 1| = |x - 3|$ ii) $|x - 1| = |5 - 2x|$ iii) $|x + 3| = |2x|$ iv) $|x + 2| = |3x - 2|$

15) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

i) $d(x, 0) < 2$ ii) $d(x, 3) < 5$ iii) $d(x, -2) < 4$ iv) $d(x, 1) \leq 3$ v) $d(x, -1) \leq 2$

16) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

i) $|x| \leq 3$ ii) $|x - 4| < 7$ iii) $|x + 4| \leq 6$ iv) $|x + 6| < 3$

v) $2|x - 5| \leq 6$ vi) $|3x - 5| \leq 1$

17) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

i) $d(x, 0) > 5$ ii) $d(x, 6) > 7$ iii) $d(x, -4) \geq 2$ iv) $d(x, -3) > 1$ v) $d(x, 2) \geq 4$

18) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

i) $|x| > 2$ ii) $|x + 6| \geq 3$ iii) $|x - 4| > 4$ iv) $|x - 5| > 6$ v) $|x + 1| \geq 3$ vi) $3|x - 1| > 6$

19) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει :

i) $|x - 1| \leq 0$ ii) $|x + 3| \leq -3$ iii) $|x + 1| < 0$ iv) $|x - 5| > -3$ v) $|x - 2| > 0$ vi) $|x - 4| \geq 0$

20) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x - 3 < 1$	$d(x, 3) < 1$	$(2, 4)$
$ x + 3 < 4$		
	$d(x, 4) < 1$	
		$[-6, 2]$
		$(-3, 3)$
$ x - 2 > 6$		
	$d(x, -1) \geq 3$	
		$(-\infty, -3) \cup (7, +\infty)$
		$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

21) Αν $-3 \leq x \leq 3$,να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

$$i) A = |x - 3| + |x + 3| \quad ii) B = |2x + 6| + |2x - 6| \quad iii) \Gamma = |x - 4| + |x + 4|$$

22) Αν $-1 < x < 1$ να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

$$i) A = |x + 2| + |x - 2| \quad ii) B = |2x + 3| + |2x - 3|$$

23) Αν $-1 < x < 1$,να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

$$i) A = |x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 2| \quad ii) B = 2|2x - 3| + |4x + 5|$$

24) Αν $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 1$, να αποδείξετε ότι :

$$i) |\alpha + \beta - 2| + |\alpha + \beta + 2| = 4 \quad ii) |2\alpha + 3| - |2\beta - 3| = 2(\alpha + \beta)$$

25) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής τις παραστάσεις :

$$i) A = |x + 2| + |x - 3| \quad ii) B = |x - 1| - |5 - x| + 2x$$

26) Να αποδείξετε ότι :

$$i) \frac{2|x|}{x^2 + 1} \leq 1 \quad ii) \frac{9x^2 + 1}{6} \geq |x| \quad iii) 4|xy| \leq (|x| + |y|)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

27) Αν $|\alpha| \leq 2$ και $|\beta| \leq 1$ να αποδείξετε ότι :

$$i) |\alpha + 3\beta| \leq 5 \quad ii) |4\alpha - 3\beta - 2| \leq 13 \quad iii) \left| \frac{\alpha}{4} - \frac{\beta}{2} \right| \leq 1 \quad iv) |-2\alpha + 4\beta + 3| \leq 11$$

28) Αν $|x - 1| < 2$ και $|y - 1| < 6$, να αποδείξετε ότι :

$$i) |x + y - 2| < 8 \quad ii) |x - y| < 8$$

2.4 Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;

ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α και συμβολίζουμε με $\sqrt{\alpha}$ τον μη αρνητικό αριθμό α που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον α

Να αναφέρετε τις ιδιότητες της τετραγωνικής ρίζας

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

Τι ονομάζουμε ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α;

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται $\sqrt[n]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός α που όταν υψωθεί στη ν μας δίνει τον α

Να αναφέρετε τις ιδιότητες των ριζών

- αν $\alpha \geq 0$ $(\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha$, $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$
- αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε $\sqrt[n]{\alpha^n} = |\alpha|$
- Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:
 1. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta}$
 2. $\frac{\sqrt[n]{\alpha}}{\sqrt[n]{\beta}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{\beta}}$
 3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot n]{\alpha}$
 4. $\sqrt[n]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\mu]{\alpha}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε: $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta})^n = (\sqrt[n]{\alpha \cdot \beta})^n \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha})^n \cdot (\sqrt[n]{\beta})^n = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$ που ισχύει

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

3. Έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[\mu \cdot n]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} \right)^{\mu \cdot n} = (\sqrt[\mu \cdot n]{\alpha})^{\mu \cdot n} \Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[n]{\alpha}} \right)^{\mu} \right]^n = \alpha \Leftrightarrow (\sqrt[n]{\alpha})^n = \alpha \text{ που ισχύει}$$

4. Έχουμε:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{\alpha^{\mu \cdot p}}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{\alpha^{\mu p}}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{(\alpha^{\mu})^p}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\alpha > 0$, μ ακέραιος και n θετικός ακέραιος τότε ορίζουμε :

$$\alpha^{\frac{\mu}{n}} = \sqrt[n]{\alpha^{\mu}}$$

1η κατηγορία άσκησης

Να βρείς για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις

$$i) \sqrt{x-2} \quad ii) \sqrt{x^2+1}$$

Λύση :

i) Πρέπει $x - 2 \geq 0$ άρα $x \geq 2$

ii) Πρέπει $x^2 + 1 \geq 0$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

2η κατηγορία άσκησης

A) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$

B) Αν ισχύει $2 < x < 3$ να βρείτε την τιμή της παράστασης A.

Λύση:

A)

$$A = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{|x-3|}{x-3}$$

B) επειδή $2 < x < 3$ συμπεραίνουμε ότι $x-2 > 0$ και $x-3 < 0$ άρα

$$A = \frac{|x-2|}{x-2} - \frac{|x-3|}{x-3} = \frac{x-2}{x-2} - \frac{-(x-3)}{x-3} = 1 - (-1) = 2$$

3η κατηγορία άσκησης

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$\alpha) A = \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{5}} \quad \beta) B = \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \sqrt[5]{\alpha^3 \cdot \sqrt{\alpha}}} \quad , \quad \text{για } \alpha \geq 0$$

Λύση:

$$\alpha) A = \sqrt{5 \sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = \sqrt[6]{5^4} = \sqrt[2 \cdot 3]{5^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{5^2}$$

$$\beta) B = \sqrt[3]{\alpha^2 \cdot \sqrt[5]{\alpha^3 \cdot \sqrt{\alpha}}} = \sqrt[3]{\sqrt[5]{(\alpha^2)^5 \alpha^3 \cdot \sqrt{\alpha}}} = \sqrt[15]{\alpha^{13} \cdot \sqrt{\alpha}} = \sqrt[15]{\sqrt{(\alpha^{13})^2 \cdot \alpha}} = \sqrt[30]{\alpha^{27}} = \sqrt[10]{\alpha^9}$$

4η κατηγορία άσκησης

Να μετατρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

$$i) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ii) \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \quad iii) \frac{2}{3 + \sqrt{5}} \quad iv) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

Λύση:

$$i) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ii) \frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{5}$$

$$iii) \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5})} = \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{2 \cdot (3 - \sqrt{5})}{4} = \frac{(3 - \sqrt{5})}{2}$$

$$iv) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3}$$

5η κατηγορία άσκησης

Να απλοποιηθεί η παράσταση :

$$A = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[6]{\alpha^5}$$

Λύση:

$$A = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha^3} \cdot \sqrt[6]{\alpha^5} = \alpha^{\frac{1}{3}} \cdot \alpha^{\frac{3}{4}} \cdot \alpha^{\frac{5}{6}} = \alpha^{\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6}} = \alpha^{\frac{4}{12} + \frac{9}{12} + \frac{10}{12}} = \alpha^{\frac{23}{12}} = \sqrt[12]{\alpha^{23}}$$

6η κατηγορία άσκησης

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1}$$

Λύση:

$$A = \sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt{\sqrt{5} + 1} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} = \sqrt{4} = 2$$

Ασκήσεις στις ρίζες

1) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{x^2 + 1} \quad ii) B = \sqrt{10 - 2x} \quad iii) \Gamma = \sqrt{(x - 2)^2} \quad iv) \Delta = (\sqrt{x - 2})^2 \quad v) E = \frac{4}{\sqrt[5]{x - 3}} \quad vi) Z = \frac{2}{\sqrt{(x + 1)^2}}$$

2) Να βρείτε τις ρίζες :

$$i) \sqrt[3]{125} \quad ii) \sqrt{\frac{0,121}{0,169}} \quad iii) \sqrt[5]{\frac{32}{243}} \quad iv) \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \quad v) \sqrt{0,0009} \quad vi) \sqrt[3]{0,064}$$

3) Να υπολογίσετε τις ακόλουθες ρίζες :

$$i) \sqrt{(-4)^2} \quad ii) \sqrt[4]{(-7)^4} \quad iii) \sqrt{(-3)^4} \quad iv) (\sqrt[7]{7})^7 \quad v) \sqrt[4]{(-2)^8} \quad vi) \sqrt[3]{(-5)^6}$$

4) Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης :

$$i) A = \sqrt{18} \cdot \sqrt{8} \quad ii) B = \sqrt{30} \cdot \sqrt{0,3} \quad iii) \Gamma = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} \quad iv) \Delta = \frac{\sqrt{0,9}}{\sqrt{0,4}} \quad v) E = \frac{\sqrt{96} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad vi) Z = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{8}}$$

$$vii) H = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{33} \quad viii) \Theta = \sqrt[6]{5^8} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{5^2}} \quad ix) I = \frac{\sqrt[5]{7^9}}{\sqrt[5]{7^4}} \quad x) K = \frac{\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[4]{2^6}} \quad xi) \Lambda = \frac{\sqrt[7]{2^6} \cdot \sqrt[7]{2^5}}{\sqrt[7]{2^4}}$$

5) Να γράψετε τις ακόλουθες παραστάσεις σε απλούστερη μορφή

$$i) A = \sqrt{(3 - \sqrt{10})^2} \quad ii) B = \sqrt{25(1 - \sqrt{2})^2} \quad iii) \Gamma = \sqrt[4]{(\sqrt{8} - 3)^4}$$

6) Να γράψετε τις παραστάσεις χωρίς ριζικά :

$$i) A = \sqrt{25(\chi - 1)^4} \quad ii) B = \sqrt{36x^4y^2} \quad iii) \Gamma = \sqrt[4]{(x + 3)^2} \quad iv) \Delta = \sqrt[4]{x^4y^{16}}$$

7) Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) \sqrt{16\alpha^2\beta^3} \quad ii) \sqrt[3]{27\alpha^3\beta^4} \quad iii) \sqrt[4]{80\alpha^5\beta^{12}}$$

8) Να γράψετε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή:

$$i) A = \sqrt{12a^2} + \sqrt{27a^2} + \sqrt{48a^2}, \quad a \geq 0$$

$$ii) B = \sqrt{50\alpha^2\beta} + \sqrt{18\alpha^2\beta} + \sqrt{32\alpha^2\beta}, \quad \alpha, \beta \geq 0$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{1 + \alpha^2} + \sqrt{4\alpha^2 + 4} - \sqrt{9 + 9\alpha^2}$$

9) Να γράψετε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή:

$$i) A = \sqrt{12x^4(x-3)^2}, \quad x \geq 3 \quad ii) B = \sqrt{49x^8y^9}, \quad y \geq 0 \quad iii) \Gamma = \sqrt[4]{81x^7y^5}, \\ x, y \geq 0$$

10) Να γράψετε τις παραστάσεις σε απλούστερη μορφή αν $\alpha \geq 0$:

$$i) A = \sqrt[12]{\alpha^4} \quad ii) B = \sqrt[8]{\alpha^2} \quad iii) \Gamma = \sqrt[10]{\alpha^6} \quad iv) \Delta = \sqrt[15]{\alpha^6} \quad v) E = \sqrt[4]{\alpha^6} \quad vi) Z = \sqrt[15]{\alpha^5}$$

11) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) A = \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1} \quad ii) B = \sqrt{x^4 + 6x^2y^2 + 9y^4}$$

12) Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 + \sqrt{3}$ να αποδείξετε ότι :

$$3x^2 - 6x + 3 = 2y^2 - 4y + 2$$

13) Αν $-1 \leq x \leq 7$ να αποδείξετε ότι $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-7)^2} = 6$

14) Αν $-2 \leq x \leq 2$, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = 4$

15) Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης:

$$i) A = \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}} \quad ii) B = \sqrt{\sqrt{14 + \sqrt{4}} + \sqrt{19 + \sqrt{36}}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{5 + \sqrt{116 + \sqrt{11 + 2 \cdot \sqrt{49}}}} \quad iv) \Delta = \sqrt{7 \cdot \sqrt{28 - \sqrt{144}} - \sqrt{135 + \sqrt{81}}}$$

16) Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης :

$$i) A = \sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[4]{8 \cdot \sqrt[3]{8}}} \quad ii) B = \sqrt{\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt{4}}} + \sqrt[14]{8} \quad iii) \Gamma = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{27}} + \sqrt[4]{9 + \sqrt{49}}}$$

17) Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα :

$$i) 4\sqrt{3} + \sqrt{75} - \sqrt{48} \quad ii) 7\sqrt{6} + \sqrt{24} - 3\sqrt{54} \quad iii) \sqrt{80} + 2\sqrt{20} - \sqrt{125} \quad iv) 2\sqrt{12} + 3\sqrt{27} \\ - 4\sqrt{75} + \sqrt{48}$$

18) Να υπολογίσετε τα εξαγόμενα :

$$i) (\sqrt{12} + \sqrt{48})(\sqrt{75} - \sqrt{27}) \quad ii) (\sqrt{50} + \sqrt{18})(\sqrt{32} - \sqrt{8}) \\ iii) (\sqrt{50} + \sqrt{18} + \sqrt{8})(\sqrt{50} - \sqrt{32})$$

19) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$\frac{10\sqrt{14} - 8\sqrt{63} + 5\sqrt{28} - \sqrt{7}}{2\sqrt{2} - 3}$$

20) Να βρείτε τα εξαγόμενα :

$$i) (\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{48}) \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{75} + \sqrt{3})$$

$$ii) (\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{20}) \cdot (\sqrt{75} - \sqrt{45} + \sqrt{125})$$

21) Να υπολογίσετε την τιμή της κάθε παράστασης :

$$i) A = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{2}}$$

$$ii) B = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{15} - \sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{15} + \sqrt{6}}$$

$$iii) \Gamma = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{7}} \cdot \sqrt{5 + \sqrt{20 + \sqrt{7}}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{20 + \sqrt{7}}}$$

22) Να αποδείξετε ότι :

$$i) (\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{6} = 12$$

$$ii) (\sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{7})(\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7})(4 - 2\sqrt{14}) = -40$$

23) Να αποδείξετε ότι :

$$i) (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = 8 - 2\sqrt{15} \quad ii) (\sqrt{5} + \sqrt{3})\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} = 2 \quad iii) (2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$$

24) i) Να υπολογίσετε τις παραστάσεις $(2 + 3\sqrt{5})^2$ και $(2 - 3\sqrt{5})^2$

$$ii) \text{Να αποδείξετε ότι : } \sqrt{49 + 12\sqrt{5}} + \sqrt{49 - 12\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}$$

25) Να βρείτε τα γινόμενα :

$$i) \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \quad ii) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[12]{3^5} \quad iii) \sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[6]{4} \quad iv) \sqrt{7} \cdot \sqrt[6]{7^7} \cdot \sqrt[3]{7}$$

$$v) \sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[10]{5^3} \cdot \sqrt{5} \quad vi) \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2}$$

26) Να βρείτε τα πηλίκα :

$$i) \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}} \quad ii) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}} \quad iii) \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt{5}} \quad iv) \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[4]{7}}$$

27) Να γράψετε τις παραστάσεις με τη μορφή μιας ρίζας :

$$i) \sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} \quad ii) \sqrt[3]{5 \cdot \sqrt{5}} \quad iii) \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}} \quad iv) \sqrt[3]{\frac{2^2}{\sqrt{2}}} \quad v) \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{3}}} \quad vi) \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}$$

$$vii) \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^4 \cdot \sqrt{\frac{1}{2^2}}}} \quad viii) \sqrt[3]{3 \cdot \sqrt[5]{3^2 \cdot \sqrt{3}}} \quad ix) \sqrt[5]{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^3}}} \quad x) \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2}}, a > 0$$

28) Να μετατρέψετε τις ακόλουθες παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή

$$\text{i)} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ii)} \frac{4}{\sqrt[3]{5}} \quad \text{iii)} \frac{2}{\sqrt[7]{2^3}} \quad \text{iv)} \frac{30}{\sqrt[7]{5^2}} \quad \text{v)} \frac{24}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{2}} \quad \text{vi)} \frac{6}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}}$$

29) Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

$$\text{i)} \frac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} \quad \text{ii)} \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \quad \text{iii)} \frac{6 + \sqrt{3}}{6 - \sqrt{3}} \quad \text{iv)} \frac{4}{1 + \sqrt{3}} \quad \text{v)} \frac{12}{\sqrt{2}(\sqrt{7} - \sqrt{5})} \quad \text{vi)} \frac{16}{\sqrt[5]{3^2}(\sqrt{12} - 2)}$$

30) Να αποδείξετε ότι :

$$\begin{aligned} \text{i)} \frac{2}{1 + \sqrt{5}} + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} &= -1 \quad \text{ii)} \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3} + 2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3} - 2}\right)^2} = 4 \\ \text{iii)} \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} + \frac{1}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} &= 4 \quad \text{iv)} \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)^2} - \frac{1}{(\sqrt{2} + 1)^2} = 14 \end{aligned}$$

31) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{3 + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = 1$$

32) Να συγκρίνετε τους αριθμούς :

$$\text{i)} 5\sqrt{2} \text{ και } 7 \quad \text{ii)} \sqrt{6} + 2 \text{ και } \sqrt{5} + 3 \quad \text{iii)} 2 - \sqrt{5} \text{ και } \sqrt{3} - \sqrt{5} \quad \text{iv)} \sqrt{3} + \sqrt{2} \text{ και } \sqrt{5}$$

Επαναληπτικές Ασκήσεις στους πραγματικούς αριθμούς

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1. Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{(x^2 + 4x)(x - 4)(x + 3)}{x^3 - 16x}$$

A) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A .

B) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .

Γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $A=0$.

2. Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

$$i) A = \alpha^2 - 4\beta^2 \quad ii) B = x^2 - 8y^2 \quad iii) \Gamma = x^4 - 8x^2 + 16 \quad iv) \Delta = x^4 - 9x^2 + 4(9 - x^2)$$

$$v) E = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 \quad vi) Z = x^5 - 4x^3 - 8x^2 + 32 \quad vii) H = \alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4$$

3. Να απλοποιηθούν τα κλάσματα : $A = \frac{x^2-9}{x^2-3x}$, $B = \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

4. Να απλοποιηθεί η παρακάτω παράσταση αφού πρώτα βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζεται :

$$A = \frac{(x-3)^3 + (x-5)^3 + (8-2x)^3}{x(x-3) - 5x + 15} \cdot \frac{x+1}{12-3x}$$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$A = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 3x + 2} , B = \frac{x^2 + \alpha x - 2\alpha^2}{2x^2 + 3\alpha x - 2\alpha^2}$$

6. Να κάνετε γινόμενο τις παραστάσεις :

$$A = 6 + \alpha x - 2\alpha - 3x \quad B = x^2 - y^2 - 2x + 1 \quad \Gamma = x^2 - 2x + 1 \quad \Delta = x^2 + 6x + 9 \\ E = 4y^2 - 4y + 1 \quad Z = 9(x-2)^2 - 16 \quad H = \alpha^2 - \alpha - 6 \quad \Theta = y^2 + 4y - 5$$

7. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\beta x - \beta y + 2x - 2y}{\beta^2 + 4\beta + 4} \cdot \frac{\beta x + \beta y + 2x + 2y}{x^2 - y^2} = 1$$

8. Δίνεται η παράσταση : $A(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

a) Να κάνετε γινόμενο την παράσταση A .

b) Να λύσετε την εξίσωση $A(x)=0$

9. Να αποδείξετε ότι : $\frac{x^3+y^3}{x+y} : (x^2 - y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2-y^2} = 1$

10. Δίνονται οι παραστάσεις : $A = \frac{(1-x^4)(2x-x^2)}{(x^3-4x)(x^3-x)} \cdot \frac{x^2+2x}{x^2+1}$ $B = \frac{(x-1)(3-x)-(1-x)(5-x)}{1-x^2} \cdot \frac{x+1}{x-4}$

a) Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παραστάσεις A και B ;

b) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις A και B ;

11. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}, B = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}, \Gamma = \frac{(x^2 - x) + 2x - 2}{x^2 - 1}$$

$$\Delta = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2}, E = \frac{x^3 + x^2}{(x + 1)^3} \cdot \left(x - \frac{1}{x}\right)^2, Z = \frac{x(x - 2) + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

12. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A = 2x^2 - 4x + 6, B = -3x^2 - 3x + 6, \Gamma = 2x^2 - 4x + 2$$

$$\Delta = 3x^2 + 2x - 5, E = x^2 + 2x + 2, Z = -2x^2 + 8x - 8$$

13. Δίνονται τα κλάσματα : $A = \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2}, B = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + x - 2}$

a) Για ποιες τιμές του x ορίζονται;

b) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα αυτά

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

14. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) - 4 \Rightarrow \alpha = \beta$

ii) $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta = 1$

iii) $\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha^3(\beta + 1) - \beta^3(\alpha + 1) = \alpha - \beta$

15. Να αποδείξετε ότι:

i) $1 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \frac{\alpha + \beta}{\beta} = 5 \Rightarrow \alpha = \beta$

ii) $2(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 \Rightarrow \alpha = \beta$

16. Να γράψεις με τη μορφή μιας δύναμης τις παραστάσεις :

$$A = [x^5(xy^2)^3] : (x^{-2} : y)^{-2} \quad B = [(xy^{-1})^2 : (x^3y^7)^{-1}]^{-2} : (x^{-1}y^{-1})^{20}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΔΙΑΤΑΞΗ

17. Αν $\alpha, \beta > 0$ να αποδείξεις ότι

i) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2$

ii) $(\alpha - \beta)^2 \geq 4\alpha\beta - 8\beta^2$

iii) $\alpha^2 - 4\alpha + 5 > 0$

iv) $\frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{4}$

18. Να αποδείξετε ότι :

i) $\alpha^2 + \beta^2 + 2 \geq -2(\alpha + \beta)$

ii) $\alpha^2 + \beta^2 + 10 \geq 2\alpha + 6\beta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

19. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων

$$A = |2x - y - 2| - |2y - x - 2| + |x - y| - 2|x - 2|$$

$$B = |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| + |\gamma - \alpha| - |2\alpha - \beta - \gamma|$$

$$\Gamma = |x - 1| + |1 - y| - |x - y| + 1$$

20. Να γράψετε χωρίς απόλυτα την παράσταση $A(x) = 2|x-3| - 3x + 4$ και να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 0$.

21. Αν $3 < \alpha < \beta < \gamma$ να απλοποιηθούν οι παραστάσεις $A = |3 - \alpha| + |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| - |\gamma - 3|$

$$B = |1 - \alpha| + |1 - \beta| + |1 - \gamma| + |\alpha + \beta + \gamma - 3|$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΡΙΖΕΣ

22. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$A = \frac{\sqrt{49} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[5]{32}}{\sqrt{87} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{1024}} \quad B = \frac{\sqrt{121} + \sqrt[3]{125} - \sqrt[4]{81}}{\sqrt{144} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[6]{64}}$$

23. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i) $A = \sqrt[3]{\alpha\beta} \cdot \sqrt[3]{\beta\gamma} \cdot \sqrt[3]{9\alpha^2\beta\gamma^2}$ ii) $B = \sqrt[n]{a^2\beta^{n-3}} \cdot \sqrt[n]{\alpha^{n-3}\beta^n\gamma^{n-1}} \cdot \sqrt[n]{\alpha^{n+1}\beta^3\gamma^{n+1}}$

24. Να ρητοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A = \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}, \quad B = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$$

25. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$A = \left(\sqrt[3]{2\sqrt[5]{3\sqrt{2}}} : \sqrt[5]{3\sqrt[2]{3\sqrt{2}}} \right) \cdot \sqrt[20]{4} \cdot \sqrt[15]{9}, \quad B = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}} - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$$

26. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha, \beta > 0$ τότε: $\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}} \sqrt[3]{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \sqrt[8]{\frac{\beta}{\alpha}} = 1$

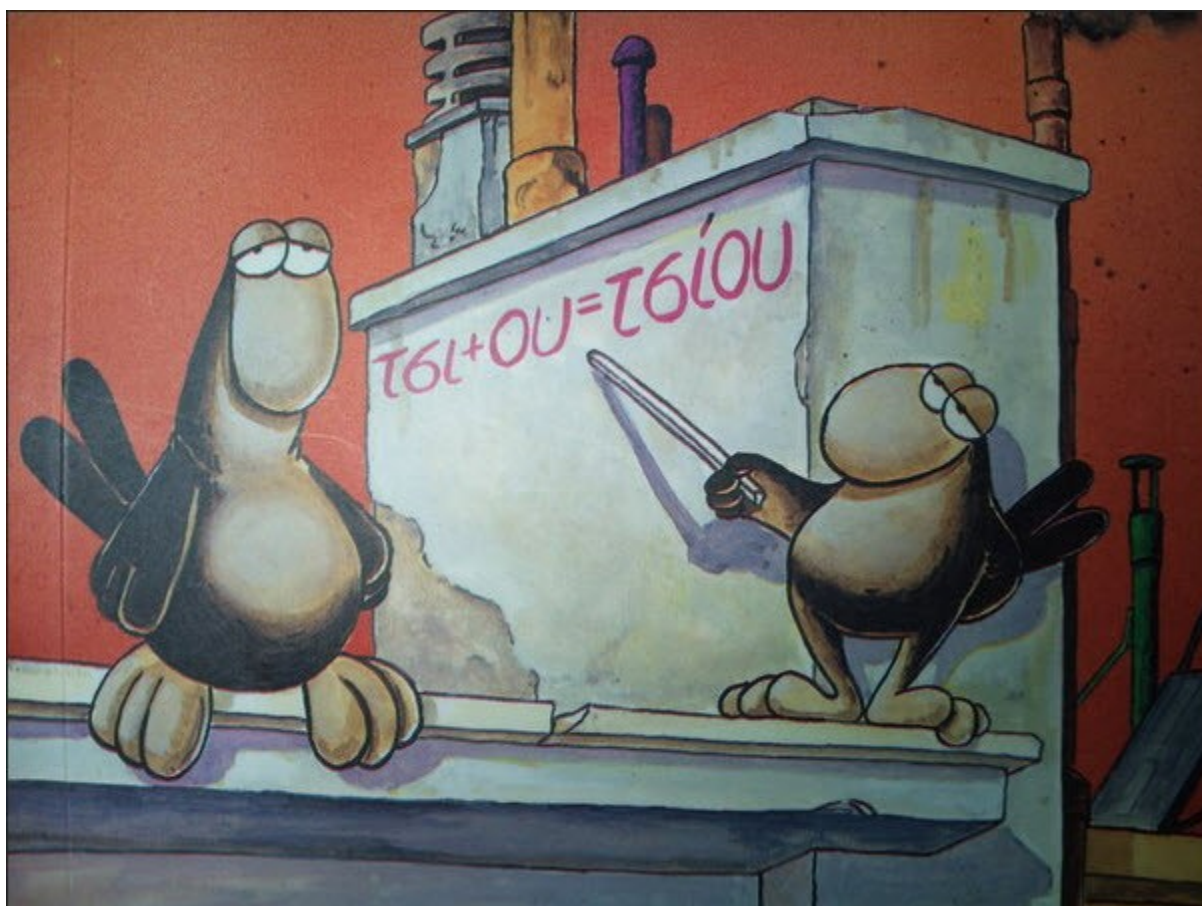
27. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \left(\frac{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} - \sqrt{xy} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y} \right)^2, \quad x, y > 0, x \neq y$

28. Να αποδείξετε ότι ο παρακάτω αριθμός είναι φυσικός :

$$A = \sqrt{54 + 14\sqrt{5}} + \sqrt{12 - 2\sqrt{35}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$$

29. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$ αν ισχύει ότι : $\sqrt{a^2 - 2a + 5} + \sqrt{\beta^2 - 6\beta + 10} = 3$

Εξισώσεις



1 Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Διερεύνηση εξίσωσης 1^{ου} βαθμού

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x = -\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αν } \alpha \neq 0 \text{ τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την } x = -\frac{\beta}{\alpha} \\ \text{αν } \alpha = 0 \text{ και } \beta \neq 0 \text{ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη} \\ \text{αν } \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0 \text{ τότε η εξίσωση είναι αόριστη} \end{cases}$$

παραμετρικές εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

είναι οι εξισώσεις που εκτός από τον άγνωστο x έχουν και κάποια παράμετρο ($\alpha, \beta, \kappa, \lambda$)

παράδειγμα :

Να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2 x - 1 = 2\lambda + x + \lambda^2$

Λύση:

$$\begin{aligned} \lambda^2 x - 1 &= 2\lambda + x + \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 x - x = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \Leftrightarrow \\ (\lambda^2 - 1)x &= (\lambda + 1)^2 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)x = (\lambda + 1)^2 \quad (1) \end{aligned}$$

 Αν $(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0$ τότε η (1) έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$

 Αν $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$ τότε

 αν $\lambda=1$ τότε η (1) γίνεται $0x=2$ αδύνατη

 Αν $\lambda=-1$ τότε η (1) γίνεται $0x=0$ αόριστη

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Λύνονται με παραγοντοποίηση και με την ιδιότητα $\text{αν } \alpha \cdot \beta = 0 \text{ τότε } \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$

Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση : $x^2(x - 3) - 4x(x - 3) + 4(x - 3) = 0$

Λύση:

$$\begin{aligned} x^2(x - 3) - 4x(x - 3) + 4(x - 3) &= 0 \\ (x - 3)(x^2 - 4x + 4) &= 0 \\ (x - 3)(x - 2)^2 &= 0 \\ x - 3 = 0 \text{ ή } x - 2 &= 0 \\ x = 3 \text{ ή } x &= 2 \end{aligned}$$

Κλασματικές εξισώσεις :

Είναι οι εξισώσεις που περιέχουν έναν τουλάχιστον άγνωστο στον παρονομαστή

Βήματα επίλυσης μιας κλασματικής εξίσωσης

1^ο παραγοντοποιώ τους παρονομαστές

2^ο βρίσκω το ΕΚΠ των παρονομαστών

3^ο παίρνω περιορισμούς

4^ο κάνω απαλοιφή παρονομαστών

5^ο λύνω την εξίσωση που προκύπτει

Παράδειγμα :

Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση

$$\frac{4x}{2x-1} - \frac{5}{2x^2-x} = \frac{5}{x}$$

Λύση:

$$\frac{4x}{2x-1} - \frac{5}{2x^2-x} = \frac{5}{x}$$

$$\frac{4x}{2x-1} - \frac{5}{x(2x-1)} = \frac{5}{x}$$

$$x(2x-1) \frac{4x}{2x-1} - x(2x-1) \frac{5}{x(2x-1)} = x(2x-1) \frac{5}{x}$$

$$4x^2 - 5 = 10x - 5$$

$$4x^2 - 10x = 0$$

$$2x(2x-5) = 0$$

$$x = 0 \text{ (απορ)} \text{ ή } x = \frac{5}{2} \text{ (δεκτή)}$$

$$\text{ΕΚΠ: } x(2x-1) \neq 0$$

$$x \neq 0 \text{ και } x \neq \frac{1}{2}$$

Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού και απόλυτα

1^η κατηγορία (απλές)

Η ιδιότητα $|x| = \theta$ ($\theta > 0$) $\Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x-3|=8$$

$$2x-3=8 \text{ ή } 2x-3=-8$$

$$x = \frac{11}{2} \text{ ή } x = -\frac{5}{2}$$

2^η κατηγορία (με θέτω)

Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση

$$\frac{|3x-1|-2}{2} = \frac{|1-3x|}{6} - \frac{5-|6x-2|}{3}$$

Λύση :

$$\frac{|3x-1|-2}{2} = \frac{|1-3x|}{6} - \frac{5-|6x-2|}{3}$$

$$\frac{|3x-1|-2}{2} = \frac{|3x-1|}{6} - \frac{5-2|3x-1|}{3}$$

Θέτω $|3x-1| = y$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$\frac{y-2}{2} = \frac{y}{6} - \frac{5-2y}{3}$$

$$6 \frac{y-2}{2} = 6 \frac{y}{6} - 6 \frac{5-2y}{3}$$

$$3(y-2) = y - 2(5-2y)$$

$$3y - 6 = y - 10 + 4y$$

$$-2y = -4$$

$$y = 2$$

$$|3x-1| = 2$$

$$3x-1 = 2 \text{ ή } 3x-1 = -2$$

$$x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$$

3^η κατηγορία

Να λυθεί η εξίσωση $|x-3| = 3x-1$

Λύση:

Πρέπει : $3x - 1 \geq 0$

Τότε

$$x - 3 = 3x - 1 \quad \text{ή} \quad x - 3 = -3x + 1$$

$$x = -1 \quad (\text{απορ}) \quad \text{ή} \quad x = 1 \quad (\text{δεκτή})$$

4^η κατηγορία (με πινακάκι προσήμου)

Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση : $3|x + 1| - 2|x - 2| = 1$

Λύση :

$$3|x + 1| - 2|x - 2| = 1$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x + 1$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$\circ$	$+$

📖 Αν $x < -1$ τότε

$$3(-x - 1) - 2(-x + 2) = 1$$

$$-x = 8 \quad \text{άρα} \quad x = -8 \quad (\text{δεκτή αφού } x < -1)$$

📖 Αν $-1 \leq x < 2$ τότε

$$3(x + 1) - 2(-x + 2) = 1$$

$$x = \frac{2}{5} \quad (\text{δεκτή})$$

📖 Αν $x > 2$ τότε

$$3(x + 1) - 2(x - 2) = 1$$

$$x = -6 \quad (\text{απορρίπτεται})$$

Ασκήσεις στις εξισώσεις 1^{ου} βαθμού

1) Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) 4(x - 1) = 2x - 3 \quad ii) 5 - 2(x + 2) = 1 - 2x \quad iii) 2(x + 4) - 1 = 2x - 3$$

$$iv) 7 - 4\left(x + \frac{5}{4}\right) = 2 - 6x \quad v) 0,1(x + 2) + 0,6 = 0,4x + 0,2$$

$$vi) 2(2x + 1) - 6 - 2x = 6 + 2(x - 5) \quad vii) 3(x + 2) - (x + 1) = 2(x - 1) + 5$$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \frac{x+5}{3} = \frac{x+1}{2} \quad ii) \frac{3x+1}{6} = \frac{2x-1}{4} \quad iii) \frac{4}{5} - \frac{x+2}{10} = \frac{6-x}{10} \quad iv) \frac{2x+1}{3} - \frac{3x+1}{4} = -1$$

$$v) x + 4 - \frac{x+2}{3} = \frac{2x+5}{3} \quad vi) \frac{x-1}{3} - \frac{2x+5}{5} = \frac{x}{15} - 1 \quad vii) \frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} + x = \frac{5x+1}{6} + 1$$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ

$$i) 2x = \lambda + 1 \quad ii) (\lambda^2 + 2)x = \lambda + 2 \quad iii) 2\lambda x = 4 \quad iv) (\lambda + 1)x = \lambda + 1 \quad v) (\lambda - 1)x = \lambda + 5$$

4) Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ

$$i) \lambda^2 x + 3x = 5 \quad ii) \lambda^2 x - 1 = \lambda^2 - x \quad iii) \lambda x - \lambda = 3x + 4 \quad iv) \lambda x - \lambda = 2 - 2x$$

5) Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ

$$i) \lambda(\lambda + 4)x = \lambda^2 - 4\lambda \quad ii) (\lambda^2 - 2\lambda)x = \lambda^2 - 4 \quad iii) \lambda^2 x - 1 = 2\lambda + x + \lambda^2$$

$$iv) \lambda^2 x - \lambda x = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \quad v) \lambda^2 x - \lambda = \lambda x \quad vi) \lambda(\lambda x - 3) = x - 3$$

6) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση :

$$\lambda x(\lambda - 1) + 2 = (x - \lambda)(1 - \lambda)$$

i) έχει μοναδική λύση ii) είναι ταυτότητα iii) είναι αδύνατη

7) Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) x^4 - 4x^2 = 0 \quad ii) x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \quad iii) x^3 + 4x^2 + 4x = 0 \quad iv) (x - 3)^3 - (x - 3) = 0$$

$$v) x^2(x - 2) + 2x(x - 2) + (x - 2) = 0 \quad vi) (x - 3)^2 - (3 - x)(5 + x) = 0$$

$$vii) x(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 \quad viii) (x^2 - 4)(x + 1) = (x - 2)(x^2 - 1)$$

8) Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) (x + 2)^2 - (2x + 4)(3 - 4x) = 0 \quad ii) x^3 - 3x^2 - (2x - 1)(x - 3) = 0$$

$$iii) (x^2 - 4)^2 + 3(x + 2)^2(2x - 1) = 0 \quad iv) 4(x^3 - 1) - 3(x - 1) = 0$$

9) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \frac{x-2}{x^2-4} - \frac{4}{x^2+4x+4} = 0 \quad ii) \frac{3}{x} - \frac{x-4}{x^2+2x} - \frac{2}{x+2} = 0$$

$$iii) \frac{1}{x-3} - \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{x-2} \quad iv) \frac{4}{4x^2-1} + \frac{4}{2x+1} = 1 + \frac{2}{2x-1}$$

$$v) \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x^2-3x} \quad vi) \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$$

10) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \frac{2}{2x-3} - \frac{1}{2x^2-3x} = \frac{3}{x} \quad ii) \frac{2x}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2} = 0$$

$$iii) \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x^2-3x} + \frac{1}{x} \quad iv) \frac{1}{x} + \frac{2}{4-x} + \frac{8}{x^2-4x} = 0$$

$$v) \frac{x^2-x}{x^2-6x} + \frac{1}{x+6} = \frac{x}{x-6} \quad vi) \frac{x}{x-3} - \frac{x^2-3x}{x^2-9} = \frac{3x}{x^2-3x}$$

11) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |x| = 3 \quad ii) 3|x| = 9 \quad iii) |x-2| = -8 \quad iv) 2|x| - 4 = 8 \quad v) |5x-6| = 4 \quad vi) 2|3x-1| = 10$$

12) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |5x-3| = |x+1| \quad ii) |3x-2| = d(x, -4) \quad iii) 3|x-1| = |2x-1| \quad iv) |2-x| = 2d(x, 3)$$

$$v) |3x+2| - |5-2x| = 0 \quad vi) |5-6x| - |5x-6| = 0 \quad vii) d(3x, 1) - d(x, 3) = 0$$

13) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |x-3| = 2x+1 \quad ii) |3x-1| = x-2 \quad iii) d(x, 2) = 2x-5 \quad iv) |x+4| = 2x+1$$

$$v) |2x-3| + x = 2 \quad vi) |1-2x| - x = 4 \quad vii) |6x+3| - x = 1 \quad viii) 2|x-1| = x+1$$

14) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) 2(|x|-6) - 3(6-2|x|) = 2+4|x| \quad ii) \frac{3|x|-1}{3} - \frac{|x|-2}{2} = \frac{|x|+1}{4}$$

$$iii) \frac{|x|-2}{3} - \frac{|x|+1}{2} = \frac{1-3|x|}{6} \quad iv) \frac{|-x|}{6} - \frac{|x|-6}{3} + \frac{|x|-8}{4} = \frac{1}{2}$$

$$v) \frac{|x-2|}{4} + \frac{2|x-2|+1}{3} = |2-x| \quad vi) \frac{2|2x-1|}{3} + \frac{3|2x-1|}{2} = \frac{9|2x-1|+12}{6}$$

15) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) 3|3x-1| + |6x-2| = 7-2|1-3x| \quad ii) \frac{|x+1|-1}{3} = |-1-x| - \frac{4-|2x+2|}{2}$$

$$iii) |3-x| - \frac{10-|2x-6|}{3} = \frac{|x-3|-2}{2} \quad iv) \frac{4+|x-1|}{6} = \frac{1}{3} - \frac{|2-2x|-3}{2}$$

16) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

$$i) \left| \frac{9-x}{x+3} \right| = 2 \quad ii) |x-2| \cdot |x-7| = |x-2| \quad iii) |(x-5) \cdot (x-3)| = 10 \cdot |x-5|$$

$$iv) |x^2 - 225| = |x - 15| \quad v) |x-3| \cdot |2x-1| = x^2 - 6x + 9$$

17) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \sqrt{x^2 - 6x + 9} = |2x + 7| \quad ii) \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = d(x, -5) \quad iii) |x^2 + 2| - |x^2 - 2x + 1| = 3$$

18) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) ||x-6| + 1| = 3 \quad ii) ||x+4| - 2| = 5 \quad iii) ||x+3| - 4| = 4 \quad iv) ||x-5| - 3| = 2$$

19) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |x-2| = 4 \quad ii) |11 - |x|| = |3|x| - 5| \quad iii) |11 - |x-2|| = |3|x-2| - 5|$$

20) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |4x-1| - 2|x-4| = x \quad ii) |x-3| - |x+1| + 2x = 2$$

$$iii) |x-2| + |2x-1| = x+1 \quad iii) |5-x| - |x+1| = 2x-8$$

21) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) ||x|-4| + ||x-1|-3| = 0 \quad ii) ||x+4|-3| + ||x+2|-1| = 0$$

$$iii) |x^2 - 1| + |x^2 - 3x + 2| = 0 \quad iv) |x^2 - 2x| + |x^2 - 4x + 4| = 0$$

3.2 Η εξίσωση της μορφής $x^v = \alpha$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^v = \alpha$ παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα

α	v	Ρίζες της $x^v = \alpha$
$\alpha = 0$		0
$\alpha > 0$	Άρτιος	$\sqrt[v]{\alpha}$ ή $-\sqrt[v]{\alpha}$
	Περιττός	$\sqrt[v]{\alpha}$
$\alpha < 0$	Άρτιος	Αδύνατη
	Περιττός	$-\sqrt[v]{ \alpha }$

Ασκήσεις στην εξίσωση $x^v = \alpha$

1) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^3 - 125 = 0 \quad ii) x^5 - 32 = 0 \quad iii) 64x^3 - 1 = 0 \quad iv) x^3 + 125 = 0 \quad v) x^5 + 32 = 0 \quad vi) 64x^3 + 1 = 0$$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^6 - 64 = 0 \quad ii) x^4 - 625 = 0 \quad iii) 81x^4 - 16 = 0 \quad iv) 64x^6 - 1 = 0 \quad v) 3x^5 + 81x^2 = 0 \quad vi) 3x^5 + 81x = 0$$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^5 - 125x^2 = 0 \quad ii) x^5 - 81x = 0 \quad iii) x^7 + 64x = 0 \quad iv) x^5 + 64x^2 = 0 \quad v) 3x^5 + 81x^2 = 0$$

4) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) 2(x+3)^4 - 32 = 0 \quad ii) 8(x-2)^3 - 27 = 0 \quad iii) (x-1)^7 + 32(x-1)^2 = 0 \quad iv) (x+2)^5 - 27(x+2)^2 = 0$$

3.3 Εξίσωση 2^{ου} βαθμού

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δυο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα την $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

Απόδειξη :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Θέτω $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

Οπότε

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \quad (1)$$

 Αν $\Delta > 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4\alpha^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x = -\frac{\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

 Αν $\Delta = 0$ τότε $(1) \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ (διπλή ρίζα)

 Αν $\Delta < 0$ τότε η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες

Παραδείγμα :

Να λυθεί η εξίσωση $x^2 - x - 2 = 0$

Λύση

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

Παράδειγμα:

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 1 = 0$

- i) Να βρεθεί η διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης
- ii) Να εξετάσετε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση έχει πραγματικές και άνισες ρίζες

Λύση

- i) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4\lambda + 4 = 8 - 4\lambda$
- ii) Για να έχει η παραπάνω εξίσωση πραγματικές και άνισες ρίζες πρέπει $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2$

Ασκήσεις στις εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

1) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι παρακάτω εξισώσεις είναι δευτέρου βαθμού

$$i) (\lambda^2 + 4)x^2 - (\lambda + 1)x + 3 = 0 \quad ii) (\lambda + 5)x^2 + x - \lambda = 0$$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) 9x^2 - 25 = 0 \quad ii) 8,1x^2 - 3,6 = 0 \quad iii) \frac{16}{7}x^2 - 7 = 0 \quad iv) 7x^2 - 3 = 0 \quad v) 6x^2 - 2x = 0$$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^2 - 7x + 6 = 0 \quad ii) -x^2 + 8x - 12 = 0 \quad iii) x^2 + 2x - 3 = 0 \quad iv) x^2 - 2x - 2 = 0 \\ v) x^2 + 12x + 36 = 0 \quad vi) -x^2 + 10x - 25 = 0 \quad vii) -x^2 + 6x - 10 \\ = 0 \quad viii) x^2 + 5x + 7 = 0$$

4) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x(x - 1) + x(x - 2) = 5 \quad ii) (5x - 3)(5x + 3) \\ = 20x - 9 \quad iii) (2x - 1)^2 + x(5x - 8) + 3 = 0 \\ iv) (x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 5(2x + 3) \quad v) (x - 2)^2 + (x - 3)^2 - (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \\ = 0$$

5) Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω εξισώσεων για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ

$$i) 5x^2 - \lambda x - 2 = 0 \quad ii) (\lambda + 2)x^2 - 2(\lambda + 1)x + \lambda = 0, \lambda \neq 0 \quad iii) 4x^2 - 12\lambda x + 9\lambda^2 \\ = 0$$

6) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda\left(\lambda - \frac{3}{4}\right) = 0$

Έχει δύο ρίζες άνισες

7) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda(\lambda + 1) = 0$ έχει μια διπλή ρίζα

8) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 - (\alpha - 1)x + \alpha - 1 = 0 \text{ έχει μια διπλή ρίζα}$$

9) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α η εξίσωση

$$\alpha x^2 - 2(\alpha - 2)x + \alpha + 4 = 0, \alpha \neq 0, \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες.}$$

10) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^2 - ax - 2a^2 = 0 \quad ii) x^2 - 2(a - 1)x - 4a = 0$$

$$iii) 2x^2 - (3a - \beta)x + a^2 - \beta^2 = 0$$

$$iv) x^2 - 2ax - \beta(2a + \beta) = 0 \quad v) x^2 - 2a\beta x + \beta^2(\alpha^2 - \beta^2) = 0$$

$$vi) (a^2 - 1)x^2 - 2ax + 1 = 0, a \neq \pm 1$$

11) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2} = 0 \quad ii) x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{5})x + \sqrt{10} = 0$$

$$iii) x^2 - 2x - 4\sqrt{3} - 6 = 0$$

12) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση

$$x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda(\lambda - 4) = 0$$

- i) Έχει δυο ρίζες άνισες
- ii) Έχει μια διπλή ρίζα
- iii) Δεν έχει πραγματικές ρίζες
- iv) Έχει μια τουλάχιστον ρίζα

13) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ η εξίσωση :

$$x^2 + 2(\lambda - 3)x + \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

- i) Έχει δύο ρίζες άνισες
- ii) Έχει μια διπλή ρίζα
- iii) Δεν έχει πραγματικές ρίζες
- iv) Έχει μια τουλάχιστον ρίζα

14) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η εξίσωση $(\lambda - 3)x^2 + 2(\lambda^2 - 1)x - (\lambda^2 + 5\lambda - 8) = 0$ να είναι δευτέρου βαθμού και να έχει ρίζα τον αριθμό $x = 1$

15) Αν η εξίσωση $x^2 + (2\lambda + 5)x + \lambda^2 - 15 = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό $x = 3$, να βρείτε

- i) τον αριθμό λ
- ii) την άλλη ρίζα της εξίσωσης

16) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών κ, λ για τις οποίες η εξίσωση

$$2x^2 + (\lambda - 1)x + \kappa + 3 = 0$$

Έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $x = 1$

3.4 Τύποι Vieta

Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 τότε (τύποι Vieta)

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \quad P = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Απόδειξη:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$P = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{\beta^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2 + 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ μετασχηματίζεται σε $x^2 - Sx + P = 0$

Απόδειξη:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Παρατήρηση:

Ισχύουν οι ταυτότητες

1. $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
2. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

1^η βασική άσκηση

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 7x + 6 = 0$ αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

$$i) x_1 + x_2 \quad ii) x_1 \cdot x_2 \quad iii) x_1^2 + x_2^2 \quad iv) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad v) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$$

Λύση :

$$i) x_1 + x_2 = s = -\frac{\beta}{\alpha} = 7$$

$$ii) x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = 6$$

$$iii) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 49 - 12 = 37$$

$$iv) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{7}{6}$$

$$v) \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2^2}{x_1 \cdot x_2} + \frac{x_1^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{37}{6}$$

2^η βασική άσκηση

Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $x_1 = 3, x_2 = 5$

Λύση :

Η εξίσωση θα έχει τη μορφή $x^2 + Sx + P = 0$

Όπου $S = x_1 + x_2 = 3 + 5 = 8$ και $P = x_1 \cdot x_2 = 15$

Άρα η εξίσωση θα είναι $x^2 - 8x + 15 = 0$

Παρατήρηση

- 1) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δύο ομόσημες ρίζες όταν $P > 0$
- 2) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δύο ετερόσημες ρίζες όταν $P < 0$
- 3) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δυο θετικές ρίζες όταν $P > 0$ και $S > 0$
- 4) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δύο αρνητικές ρίζες όταν $P > 0$ και $S < 0$
- 5) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δύο ρίζες αντίθετες όταν $S = 0$
- 6) Μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει δυο ρίζες αντίστροφες όταν $P = 1$

3^η βασική άσκηση :

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda - 1 = 0$

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ
- ii) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι ρίζες της εξίσωσης να είναι ετερόσημες
- iii) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες

Λύση:

- i) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0$ άρα έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ
- ii) οι ρίζες είναι ετερόσημες όταν $P < 0 \Leftrightarrow \lambda - 1 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$
- iii) οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίθετες όταν $S = 0 \Leftrightarrow -\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

Ασκήσεις στο άθροισμα και γινόμενο ριζών

- 1) Να υπολογίσετε το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών των παρακάτω εξισώσεων χωρίς να βρεθούν οι ρίζες

$$i) x^2 + 3x - 7 = 0 \quad ii) 4x^2 + 6x + 1 = 0 \quad iii) -2x^2 + 4x + 3 = 0 \quad iv) -x^2 + 5x - 2 = 0$$

- 2) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x - 2 = 0$, να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2$

iv) $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$

v) $x_1 x_2^2 + x_1 + x_1^2 x_2 + x_2$

vi) $x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2)$

- 3) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $3x^2 - 7x - 5 = 0$, να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

iv) $2x_1 + 2x_2 - \left(\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}\right)$

v) $x_1^2 + x_2^2$

vi) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

- 4) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x - 2 = 0$, να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις :

i) $x_1 + x_2$

ii) $x_1 \cdot x_2$

iii) $x_1^2 + x_2^2$

iv) $(x_1 - x_2)^2$

v) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

vi) $x_1^3 + x_2^3$

- 5) Να προσδιορίσετε τις ρίζες των παρακάτω εξισώσεων χωρίς να λυθούν

$$i) x^2 - 8x + 15 = 0 \quad ii) x^2 - 7x + 10 = 0 \quad iii) x^2 - 3x - 10$$

$$= 0 \quad iv) x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$$

6) Να βρείτε τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη των αριθμών :

i) 3 και 5 ii) 3 και -2 iii) -8 και $-\frac{1}{3}$ iv) -1 και $\sqrt{2}$ v) $\sqrt{2}$ και $\sqrt{5}$ vi) $2 + \sqrt{5}$ και $2 - \sqrt{5}$

7) Αν x_1 και x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 5 = 0$, να βρείτε τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις που έχουν ρίζες τα ζεύγη :

i) x_1^2 και x_2^2 ii) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ iii) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$

8) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - 3(\lambda - 1)x + (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$ έχει :

i) Δύο ρίζες άνισες

ii) Δύο ρίζες αντίστροφες

9) Δίνεται η εξίσωση $x(x - 1) + \lambda(2x - \lambda) = 1(1)$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε πραγματικό αριθμό λ

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του λ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αντίθετες

10) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2(\lambda - 2)x - 4(\lambda - 1) = 0(1)$

a) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του λ

b) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι

i) Αντίθετες

ii) Αντίστροφες

11) i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x - 27 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 + (\lambda - 1)x - 27 = 0$ ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρείτε τις ρίζες και την τιμή του λ

12) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 2(\lambda - 2) = 0(1)$

i) Να αποδείξετε ότι η (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ είναι :

a) $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 5$

b) $|x_1 + x_2 - x_1x_2| < 3$

13) Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - 2x + |\lambda - 2| = 0(1)$

i) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του λ

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ είναι οι ρίζες της (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 1$$

14) Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - 4\lambda x - (\lambda^2 + 4) = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 4\lambda x - (\lambda^2 + 4) = 0$ (1) τότε :

- i. Να αποδείξετε ότι $x_1 \neq 0$ και $x_2 \neq 0$
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$
- iii. Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1)
- iv. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{1}{4 + \sqrt{24}} + \frac{1}{4 - \sqrt{24}}$$

15) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda - 4 = 0$ έχει :

- i. Δύο ρίζες άνισες
- ii. Μια διπλή ρίζα
- iii. Δύο ρίζες αντίθετες
- iv. Δύο ρίζες αντίστροφες
- v. Δύο ετερόσημες ρίζες
- vi. Δύο θετικές ρίζες
- vii. Δύο αρνητικές ρίζες

3.5 Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

Εξισώσεις που λύνονται με τη βοήθεια του θέτω

1^ο παράδειγμα

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

Λύση:

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 5|x| + 6 = 0$$

Θέτω $|x| = y \geq 0$

Οπότε η εξίσωση γίνεται

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$\Delta=1$ άρα $y = 2$ ή $y = 3$

Άρα $|x| = 2$ ή $|x| = 3$

Επομένως $x=2$ ή $x=-2$ ή $x=3$ ή $x=-3$

Διτετράγωνες

2ο Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$

Λύση :

Θέτω $\omega = x^2$ οπότε η εξίσωση γίνεται $4x^2 - 9x + 2 = 0$

$\Delta = 49$ οπότε $\omega_1 = 2$ και $\omega_2 = \frac{1}{4}$ οι οποίες είναι δεκτές αφού είναι θετικές

επομένως $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$

$$x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2}$$

Ασκήσεις στις εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2^{ου} βαθμού

1) Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$i) x^2 - 8|x| + 7 \quad ii) (x+2)^2 - 8|x+2| + 7 = 0 \quad iii) x^2 - 4|x| + 4 = 0$$

$$iv) (x-3)^2 - 4|3-x| + 4 = 0$$

$$v) x^2 - 3|x| + 4 = 0 \quad vi) (1-x)^2 - 3|1-x| + 4 = 0 \quad vii) x^2 - 2|x| - 15 = 0$$

2) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) (x+3)^2 + 3(x+3) - 10 = 0 \quad ii) [d(5x, 1)]^2 - 2d(5x, 1) - 8 = 0$$

$$iii) (x-1)^2 - 7(x-1) + 12 = 0$$

3) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) 3(2x-1) - \frac{1}{2x-1} = 2 \quad ii) \frac{x-2}{x+1} = \frac{8}{x^2+x}$$

$$iii) \frac{x-3}{x} + \frac{6}{x-3} = \frac{18}{x^2-3x} \quad iv) \frac{x-2}{x} + \frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

4) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad ii) x^4 + x^2 - 6 = 0 \quad iii) 16x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \quad iv) x^4 - 4x^2 + 5 = 0$$

5) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{2} \quad ii) \frac{x^2+3}{x^2+1} - \frac{x^2-2}{x^2+2} = \frac{7}{3}$$

6) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) (x+1)^2 + \sqrt{(x+1)^2 - 2} = 0 \quad ii) (x+1)^2 + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2 = 0$$

$$iii) (x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0 \quad iv) (x^2 - 6x)^2 + 18(x^2 - 6x) + 81 = 0$$

7) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0 \quad ii) \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 - 8\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + 7 = 0$$

8) Να λύσετε την εξίσωση :

$$|x^2 - 5|x| + 3| = 3$$

9) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^6 + 7x^3 - 8 = 0 \quad ii) \left(x - \frac{1}{x}\right)^6 - 9\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 8 = 0$$

10) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |x^2 - 36| + |x^2 + 5x - 6| = 0 \quad ii) |x^4 - 2x^2 - 8| + |x^5 - 16x| = 0$$

$$iii) |x^2 - 4x + 3| + |x^4 - 10x^2 + 9| = 0 \quad iv) |x^4 + x^2 - 2| + |x^6 - x^3 - 2| = 0$$

11) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$i) x^4 + 4\alpha\beta x^2 - (a^2 - \beta^2)^2 = 0, \alpha + \beta \neq 0 \quad ii) x^4 - 2(a^2 - \beta^2)x^2 + (a^2 - \beta^2)^2 = 0$$

12) Αν $\alpha \neq \pm 2$, να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x}{x+\alpha} - \frac{2}{x-a} = -\frac{4a}{x^2-a^2}$$

Ανισώσεις



4.1 Ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

Η ανίσωση $\alpha x + \beta > 0$

$$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x > -\beta$$

📖 Αν $\alpha > 0$ τότε $x > -\frac{\beta}{\alpha}$

📖 Αν $\alpha < 0$ τότε $x < -\frac{\beta}{\alpha}$

📖 Αν $\alpha = 0$ τότε η ανίσωση $0x > -\beta$ η οποία :

✗ Αληθεύει για κάθε τιμή του x αν είναι $\beta > 0$

✗ Είναι αδύνατη, αν είναι $\beta \leq 0$

Βασικό παράδειγμα στις ανισώσεις με απόλυτα

Να λύσετε την ανίσωση $\frac{|x-1|+1}{2} - \frac{|2x-2|-5}{6} > \frac{|1-x|}{3}$

Λύση:

Θέτω $|x-1|=y$

$$\frac{|x-1|+1}{2} - \frac{|2x-2|-5}{6} > \frac{|1-x|}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{|x-1|+1}{2} - \frac{2|x-1|-5}{6} > \frac{|1-x|}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{y+1}{2} - \frac{2y-5}{6} > \frac{y}{3} \Leftrightarrow 6\frac{y+1}{2} - 6\frac{2y-5}{6} > 6\frac{y}{3} \Leftrightarrow 3(y+1) - (2y-5) > 2y \Leftrightarrow$$

$$3y + 3 - 2y + 5 > 2y \Leftrightarrow -y > -8 \Leftrightarrow$$

$$y < 8 \Leftrightarrow |x-1| < 8 \Leftrightarrow -8 < x-1 < 8 \Leftrightarrow$$

$$-7 < x < 9$$

Ασκήσεις ανισώσεις 1^{ου} βαθμού

1) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $2(2x - 1) + 3(2 - x) < 0$ ii) $3x + 4(x + 1) > x + 2(x - 1)$ iii) $2x - 4(3 - x) > 3(2x - 3)$
iv) $1 - 2(3x + 4) < 3(1 - 2x)$ v) $5(x + 1) + 2(2x - 1) \leq 2x + 10$ vi) $5x - 2 \leq 3(x - 2) \leq +2(2x - 3)$

2) Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $5x - 3 > \frac{7x + 6}{2}$ ii) $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} > \frac{x}{2} - \frac{1}{6}$ iii) $\frac{x}{4} - \frac{x}{20} > \frac{x}{5} + \frac{1}{10}$ iv) $\frac{x - 1}{3} - \frac{x - 2}{4} > \frac{x - 3}{2}$

3) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων :

i) $2(x - 1) - 3(x + 2) < 2$ και $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} < 1$

ii) $\frac{x}{3} - \frac{x - 1}{4} \leq \frac{5}{6}$ και $\frac{x - 2}{2} - \frac{x}{5} \geq \frac{1}{5}$

iii) $\frac{x}{6} - \frac{3x + 1}{3} \geq \frac{1}{2}$ και $\frac{2x - 1}{3} - \frac{x}{4} < \frac{1}{2}$

iv) $\frac{2x}{7} + \frac{3x}{14} > \frac{1}{2}$ και $\frac{x - 1}{15} + \frac{x + 1}{5} < \frac{x}{3}$

4) Να βρείτε τις ακέραιες κοινές λύσεις των ανισώσεων :

i) $5x - 2 < 3x + 4$ και $2(x - 1) > x - 5$

ii) $2(2x - 1) + x < 3(x + 5) + 5$ και $2(x - 1) - (x - 12) \geq 18$

5) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $2 < 3x - 4 < 5$ ii) $-1 < -2x + 7 \leq 3$ iii) $3 \leq 1 - 2x < 13$ iv) $-8 \leq -8 + 5x \leq 22$

6) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x + 2 <, \leq 3x - 1 < 2x + 5$ ii) $2x + 1 < 3x + 4 < 5x + 2$ iii) $4x - 3 \leq x + 2 \leq 7x - 2$

7) Δίνεται η παράσταση $A = 4x + 3$

Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η παράσταση A να παίρνει :

i. Το πολύ την τιμή 31

ii. Τουλάχιστον την τιμή 23

iii. Τουλάχιστον την τιμή 12 και το πολύ την τιμή 35

8) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|2x + 5| \leq 3$ ii) $|3 - 2x| < 7$ iii) $2|4x - 3| \leq 12$ iv) $3|1 - 3x| < 15$ v) $6|x - 2| \leq 24$

9) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) |7x - 1| \geq 6 \quad ii) |4 - 5x| > 6 \quad iii) 5|3x - 1| \geq 25 \quad iv) 3|-3x + 2| > 9 \quad v) d(4x, 1) \geq 11$$

10) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) |2x - 1| < 0 \quad ii) |5x - 3| \leq 0 \quad iii) |3x - 4| < -2 \quad iv) |3x - 4| \leq -2 \quad v) |2x - 4| > 0$$

11) Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις των ανισώσεων :

$$i) |2x - 1| \leq 3 \quad ii) |2x + 3| < 5 \quad iii) |3x - 1| < 1$$

12) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) \frac{|x - 3| + 5}{4} < \frac{3|x - 3|}{2} \quad ii) \frac{|x + 2| + 2}{5} > \frac{2|x + 2| + 3}{9} \quad iii) \frac{3|x - 2| - 1}{2} - |2 - x| \leq \frac{|2x - 4| - 1}{5}$$

$$iv) \frac{|2x + 1|}{2} < \frac{|6x + 3| - 2}{3} - \frac{|-2x - 1| + 4}{6} \quad v) \left| \frac{x}{2} - 6 \right| + \left| \frac{x}{3} - 4 \right| > 2 - \left| 2 - \frac{x}{6} \right|$$

13) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) \frac{|3 - 3x| + 4}{6} - \frac{|x - 1| - 1}{3} \geq \frac{|1 - x| - 2}{2} \quad ii) \frac{|2x - 6| - 3}{4} - \frac{|3 - x|}{3} \geq \frac{|x - 3| - 5}{12}$$

14) Να βρεθούν οι ακέραιες λύσεις των ανισώσεων :

$$i) |3x - 5| \leq 4 \quad ii) \frac{|3x - 5| - 1}{6} - \frac{1}{4} \leq \frac{|5 - 3x| + 5}{6} - \frac{|3x - 5| + 1}{4}$$

15) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) \sqrt{x^2 - 6x + 9} < \frac{|x - 3| + 4}{2} \quad ii) \sqrt{4x^2 - 4x + 1} > \frac{d(2x, 1) + 4}{3}$$

16) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |6x - 3| = 6x - 3 \quad ii) |2 - 3x| = 3x - 2$$

17) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) 2 < |x| < 9 \quad ii) 0 < |x| \leq 4 \quad iii) 2 \leq |x + 1| < 5 \quad iv) 1 \leq |x - 5| \leq 3$$

18) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) |x - 3| < 3 \quad ii) |x - 3| > 7 \quad iii) ||3 - x| - 5| > 2 \quad iv) ||x + 2| - 3| < 2$$

19) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) |x - 1| > 2x - 5 \quad ii) |2x - 1| < x + 2 \quad iii) |3x - 1| \geq x + 2$$

20) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) |2x - 1| \geq |2x + 3| \quad ii) |3x - 2| < |2x - 3| \quad iii) d(x, -1) > d(x, 3) \quad v) \sqrt{x^2 + 4x + 4} \leq |x - 8|$$

4.2 Ανισώσεις 2^{ου} βαθμού και μορφές τριωνύμου

Μορφές του τριωνύμου

Διακρίνουσα	Μορφή τριωνύμου
$\Delta > 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$
$\Delta = 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$
$\Delta < 0$	$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{ \Delta }{4\alpha^2}\right]$

Πρόσημο τριωνύμου

- Αν $\Delta > 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α	

- Αν $\Delta = 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του α	Ομόσημο του α	

- Αν $\Delta < 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του α	

Παράδειγμα:

Να λυθεί η ανίσωση : $x^2 - 5x + 6 > 0$

Λύση:

$$\Delta = 1, \quad x_1 = 2 \quad \text{και} \quad x_2 = 3$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$	+	○	○	+

Άρα $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

Ασκήσεις στις ανισώσεις 2^{ου} βαθμού

1) Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα :

i) $x^2 - 9x + 14$ ii) $-x^2 + 2x + 3$ iii) $16x^2 - 8x + 1$ iv) $-2x^2 + 8x - 8$ v) $2x^2 - 5x - 7$

2) Να παραγοντοποιηθούν τα παρακάτω τριώνυμα :

i) $x^2 - 7x + 12$ ii) $-x^2 + x + 2$ iii) $x^2 - 6x + 5$ iv) $-x^2 - 3x + 4$ v) $2x^2 + 5x - 7$
vi) $3x^2 - 6x + 3$ vii) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6$ viii) $x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$ ix) $x^2 - (1 - \sqrt{2})x - \sqrt{2}$

3) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις , αφού πρώτα βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται :

i) $\frac{x^2 - 6x - 7}{4x^2 + 3x - 1}$ ii) $\frac{-x^2 + 3x + 10}{2x^2 + 3x - 2}$ iii) $\frac{x^2 - (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3}}{x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 2\sqrt{2}}$ iv) $\frac{2x^2 + 8x + 8}{4x^2 + 7x - 2}$ v) $\frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 - x - 2}$

4) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

i) $x^2 + 3ax + 2a^2$ ii) $x^2 - 3ax - 4a^2$ iii) $6x^2 - 5ax + a^2$ iv) $4x^2 + 3ax - a^2$

5) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

i) $2\alpha^2 - 3\beta\alpha - 2\beta^2$ ii) $\alpha^2 + \alpha\beta - 6\beta^2$ iii) $\alpha^2 - 2\alpha\beta - 8\beta^2$ iv) $3\alpha^2 - 12\alpha\beta + 12\beta^2$

6) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :

i) $x^2 - (1 + 2a)x + 2a$ ii) $x^2 - (2a + 3\beta)x + 6\alpha\beta$ iii) $2x^2 + (2a - \beta)x - \alpha\beta$

Ασκήσεις στις Εξισώσεις - Ανισώσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

ii) $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$

iii) $(x^4 - 4)(x-1) = 2(x^2 - 1)(x-2)$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x - 14$

ii) $\frac{x-1}{7} - \frac{x-23}{5} = 7 - \frac{x+4}{4}$

iii) $\frac{x-1}{4} - \left[\frac{x+2}{3} - \left(\frac{5-x}{12} + 1 \right) - 3 \right] = 1$

3. Να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 4(x-\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

4. Δίνονται οι εξισώσεις: $\lambda(x-1) + \mu = x+3$ και $\lambda^2(x-1) + \mu^2 = x+9$

Αν η πρώτη είναι αόριστη να αποδείξετε ότι η δεύτερη εξίσωση είναι αδύνατη.

5. Δίνεται η εξίσωση : $\lambda^2(x-\lambda^2) = 2(2\lambda^2 - x + 2)$

a) Να λύσετε την εξίσωση

b) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει λύση την $x = \lambda(1+2\lambda)$

6. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{4}{x^2-x-2} + \frac{x+5}{2x+2} = \frac{2x}{3x-6}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

7. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

i) $\frac{2-|x-2|}{3} - \frac{1-|4-2x|}{2} = |2-x| - \frac{8-|2-x|}{6}$

ii) $|2x-1| = |x-5|$

iii) $2(|x-2|-3) + |4-2x| = 10$

iv) $\frac{|2x-1|-1}{3} - \frac{8-|9-3x|}{2} = \frac{|15-5x|-10}{4}$

v) $|x+3| + |2-x| = 4-x$

8. Να λυθούν οι ανισώσεις i) $1 \leq |x-2| \leq 5$ ii) $7 \leq |x+2| < 10$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

9. Να λυθούν οι εξισώσεις :

- i) $(x-1)^2 + (x-2)^2 = (x-3)^2 + x + 2$
- ii) $x(x+2) = x + 6$
- iii) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
- iv) $y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - \beta^2 = 0$
- v) $x^2 - 4\beta x + 4\beta^2 - \alpha^2 = 0$
- vi) $\frac{\alpha^2 x^2}{\beta^2} - \frac{2\alpha x}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} = 0$
- vii) $x^2 - 2\alpha\gamma x + \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2) = 0$

10. Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x} = 4$ ii) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$ iii) $\frac{7-2x}{x^2} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{10}{x^2-1}$
11. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + \lambda x + 1 = 0$ να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση :
 α) να έχει πραγματικές ρίζες
 β) να είναι αδύνατη
 γ) να έχει 1 διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε
12. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 8)x^2 + 2(\lambda + 2)x + (\lambda + 8) = 0$ να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση :
 α) να έχει πραγματικές ρίζες
 β) να είναι αδύνατη
 γ) να έχει 1 διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε
13. Αν η εξίσωση : $(\alpha^2 + 1)x^2 - 2(\alpha + \beta)x + \beta^2 + 1 = 0$ έχει πραγματικές ρίζες ,
 να αποδείξετε ότι :
 α) οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.
 β) η εξίσωση έχει μόνο μια ρίζα την $\rho = \beta$.
14. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ
 i) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-2\lambda} = \frac{3}{x-\lambda}$ ii) $\lambda^2(x-1) = (\lambda+2)x - 1$
15. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τις : α) 2 και -3 β) -5 και 7 γ) 4 και -4 δ) 2 και -1/2
16. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - 27 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης να ισούται με το τετράγωνο της άλλης .
17. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (2\lambda - 4)x + 8 = 0$. Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης τότε :
 α) Να βρείτε το λ
 β) Να λύσετε την εξίσωση.
18. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - 4x - 7 = 0$. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση β' βαθμού η οποία να έχει ρίζες τις :
 i) $p_1 = x_1^2, p_2 = x_2^2$

ii) $p_1 = x_1 + 2x_2, p_2 = x_2 + 2x_1$

iii) $p_1 = x_1^3, p_2 = x_2^3$

iv) $p_1 = \frac{x_1}{x_2}, p_2 = \frac{x_2}{x_1}$

19. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda - 2)x^2 + 2x - \lambda + 4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

a) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες .

b) Να προσδιορίσετε το λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε.

c) Να προσδιοριστεί ο λ αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης αυτής και $x_1^2 + x_2^2 = 10$

20. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ η οποία έχει πραγματικές ρίζες x_1 και x_2

α) Να βρεθεί ο λ .

β) να αποδειχθεί ότι : $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = 1$, για κάθε $\lambda \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

γ) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που να έχει ρίζες τις : $p_1 = \frac{x_1+1}{x_2}, p_2 = \frac{x_2+1}{x_1}$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x^2 + |x| - 6 = 0$ ii) $(x - 3)^4 - (x - 3)^2 - |x - 3|^2 - 8 = 0$

iii) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ iv) $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$

22. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{5}{x^2+x} - \frac{1}{x-x^2} = \frac{2x}{x^2-1}$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{2x-2}{x^2-36} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x}$

ii) $(x^4 + x^2 + 1)^2 - 9x^4 = 3(x^3 - x)^2$

i) ii) $\frac{5}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{20}{x^2+3x+2}$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\chi^2 + (\alpha + \beta)\chi + \alpha\beta = 0$ ii) $\chi^2 - (2\alpha + 3\beta)\chi + 6\alpha\beta = 0$ iii) $-2\chi^2 + (\alpha - 3)\chi + \alpha - 1 = 0$

iv) $2\chi^2 - (3\alpha - 2)\chi + \alpha(\alpha - 2) = 0$ v) $2x^2 + (\alpha - 2\beta)\chi - \alpha(\alpha + 2\beta) = 0$

25. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ ii) $x^2 - 6|x| + 8 = 0$ iii) $-x^2 + |x| + 6 = 0$ iv) $x^2 + 5|x| + 4$

26. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $(x + 1)^2 + |x + 1| - 2 = 0$ ii) $(2x - 1)^2 - 6|2x - 1| + 8 = 0$ iii) $(x - 1)^2 - 4 = 3|x - 1|$

27. Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ii) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ iii) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ iv) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

28. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\text{i)} \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 5\left(x - \frac{2}{x}\right) + 4 = 0 \quad \text{ii)} \left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0 \quad \text{iii)} \left(\frac{x}{x-4}\right)^2 - \frac{x}{x-4} - 2 = 0$$

29. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\text{i)} x_1 + x_2 \quad \text{ii)} x_1 \cdot x_2 \quad \text{iii)} x_1^2 + x_2^2 \quad \text{iiii)} x_1^3 + x_2^3 \quad \text{iv)} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \quad \text{v)} \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$$

30. Δίνεται η εξίσωση : $-2x^2 + (\lambda - 5)x + \lambda - 3 = 0$

- Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ .
- Να βρείτε το λ , ώστε το άθροισμα των ριζών της να είναι ίσο με το γινόμενό τους

31. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1)

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ
- Να βρείτε το λ ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης να είναι διπλάσια της άλλης

32. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + \lambda x + 1 = 0$ (1)

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ
- Να βρείτε το λ ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης να ισούται με το τετράγωνο της άλλης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

33. Δίνεται το τριώνυμο : $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + 4x + \lambda + 2$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το τριώνυμο :

α) Να είναι πάντα θετικό

β) Να έχει πραγματικές και άνισες ρίζες

34. Να βρείτε τα πρόσημα των τριωνύμων

$$f(x) = x^2 - 4x - 5, g(x) = -x^2 + 3x + 4, h(x) = -2x^2 + x + 1, \Phi(x) = x^2 + 4x + 5$$

35. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i)} x^2 - 4x + 5 < 0 \quad \text{ii)} x^2 - x - 6 > 0 \quad \text{iii)} x^2 + 4x + 4 > 0 \quad \text{iv)} x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

36. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda^2 - \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

a) Να αποδείξεις ότι $\Delta = 4(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$

b) Να βρεθεί ο λ αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε

c) Να βρεθεί ο λ ώστε η εξίσωση να έχει πραγματικές ρίζες

d) Να βρεθεί ο λ ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

7) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) \frac{x^2 + 4ax - 5a^2}{x^2 + 8a + 15a^2} \quad ii) \frac{x^2 + ax - \beta x - \alpha\beta}{x^2 - 3ax - 4a^2} \quad iii) \frac{x^2 + 4ax + 3a^2}{x^2 + ax - 6a^2}$$

8) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$i) \frac{\alpha^2 + 3\alpha\beta + 2\beta^2}{a^2 - \alpha\beta - 6\beta^2} \quad ii) \frac{6a^2 - \alpha\beta - \beta^2}{2a^2 + 3a\beta - 2\beta^2} \quad iii) \frac{2\beta^2 - 3\alpha\beta + \alpha^2}{2\beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2}$$

9) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $x^2 - 2(2\lambda - 1)x + 4\lambda^2$

i) Αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων παραγόντων

ii) Είναι τέλει τετράγωνο

iii) Δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων

10) Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριωνύμων :

$$i) -x^2 + x + 6 \quad ii) 3x^2 - 5x + 2 \quad iii) 4x^2 - 4x + 1 \quad iv) -x^2 + 2x - 1$$

11) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

$$i) x^2 - 7x + 6 > 0 \quad ii) -x^2 + 5x - 4 \geq 0$$

$$iii) 2x^2 - 5x + 3 \leq 0 \quad iv) -2x^2 - x + 1 < 0$$

12) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

$$i) x^2 - 8x + 16 > 0 \quad ii) -x^2 + 4x \geq 4 \quad iii) 4x^2 - 12x + 9 < 0 \quad iv) -x^2 + 6x \leq 9$$

13) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) x^2 - x + 5 > 0 \quad ii) 3x^2 - 4x + 5 < 0 \quad iii) -x^2 + 2x - 2 < 0$$

14) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) 2(x + 6)(5 - x) > 0 \quad ii) -4x(x + 2) \leq 0 \quad iii) (x - 3)(4 - x) \leq 0$$

15) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) x(1 - x) > \frac{3 - 5x}{2} \quad ii) (x + \sqrt{3})^2 < \sqrt{3}x + 4 \quad iii) 4x^2 < 3(4x - 3)$$

16) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) 2 - x \leq x^2 < -2x + 8 \quad ii) x < x^2 \leq x + \frac{3}{4}$$

17) Να λύσετε τα συστήματα ανισώσεων :

$$i) \begin{cases} 2x + 8 > 0 \\ x^2 - x - 12 > 0 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 > 0 \\ 2x^2 > 5x + 7 \end{cases}$$

18) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) |x^2 - 5x| = x^2 - 5x \quad ii) |4 - x^2| = x^2 - 4$$

19) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $x^2 - 7|x| + 10 \leq 0$ ii) $x^2 - 3|x| + 2 > 0$ iii) $x^2 - |x| - 2 > 0$

20) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|3x + 1| < |x - 1|$ ii) $|2x + 1| \geq |x + 2|$ iii) $|x - 2| > |3x + 2|$

21) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|x^2 - 5x + 3| \leq 3$ ii) $|x^2 - 7x + 12| < 2$ iii) $|x^2 - 6| \leq 3$

22) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $|-x^2 + x - 5| > 4x + 1$ ii) $|x^2 - 9| > 8x$

23) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $x^4 - 6x^2 + 5 < 0$ ii) $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$

24) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση :

$$x^2 + (\lambda - 2)x + \lambda + 1 = 0$$

- i) Έχει μια διπλή ρίζα
- ii) Έχει δύο ρίζες άνισες
- iii) Δεν έχει πραγματικές ρίζες

25) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ($\lambda \neq 0$) η εξίσωση $\lambda x^2 + 2x + \lambda = 0$

- i) Έχει μια διπλή ρίζα
- ii) Έχει δύο ρίζες άνισες
- iii) Δεν έχει πραγματικές ρίζες

26) Να βρείτε για ποιες τιμές του κ ($\kappa \neq 1$) το τριώνυμο $(\kappa - 1)x^2 + 4x + 2\kappa$ διατηρεί το ίδιο πρόσημο για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

27) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι παρακάτω ανισώσεις αληθεύουν για κάθε τιμή του x

- i) $-x^2 + 4\lambda x - \lambda(\lambda + 1) < 0$
- ii) $x^2 + 2(2\lambda - 1)x + 3\lambda^2 - 2$

Ασκήσεις στις Εξισώσεις - Ανισώσεις

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1^{ΟΥ} ΒΑΘΜΟΥ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0$

ii) $x^3 - 2x^2 - (2x-1)(x-2) = 0$

iii) $(x^2-4)(x-1) = 2(x^2-1)(x-2)$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{5x-7}{2} - \frac{2x+7}{3} = 3x-14$

ii) $\frac{x-1}{7} - \frac{x-23}{5} = 7 - \frac{x+4}{4}$

iii) $\frac{x-1}{4} - \left[\frac{x+2}{3} - \left(\frac{5-x}{12} + 1 \right) - 3 \right] = 1$

3. Να διερευνηθεί για τις διάφορες τιμές του λ η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 4(x-\lambda+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

4. Δίνονται οι εξισώσεις: $\lambda(x-1) + \mu = x+3$ και $\lambda^2(x-1) + \mu^2 = x+9$

Αν η πρώτη είναι αόριστη να αποδείξετε ότι η δεύτερη εξίσωση είναι αδύνατη.

37. Δίνεται η $\lambda^2(x-\lambda^2) = 2(2\lambda^2-x+2)$ εξίσωση :

a) Να λύσετε την εξίσωση

b) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει λύση την $x=\lambda(1+2\lambda)$

38. Να λυθεί $\frac{4}{x^2-x-2} + \frac{x+5}{2x+2} = \frac{2x}{3x-6}$ η εξίσωση :

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

39. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

i) $\frac{2-|x-2|}{3} - \frac{1-|4-2x|}{2} = |2-x| - \frac{8-|2-x|}{6}$ ii) $|2x-1| = |x-5|$

iii) $2(|x-2|-3) + |4-2x| = 10$ iv) $\frac{|2x-6|-1}{3} - \frac{8-|9-3x|}{2} = \frac{|15-5x|-10}{4}$

v) $|x+3| + |2-x| = 4-x$

40. Να λυθούν οι ανισώσεις i) $1 \leq |x-2| \leq 5$ ii) $7 \leq |x+2| < 10$

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

41. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $(x-1)^2 + (x-2)^2 = (x-3)^2 + x + 2$ ii) $x(x+2) = x + 6$

iii) $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ iv) $y^2 - 2\alpha y + \alpha^2 - \beta^2 = 0$

v) $x^2 - 4\beta x + 4\beta^2 - \alpha^2 = 0$ vi) $\frac{\alpha^2 x^2}{\beta^2} - \frac{2\alpha x}{\gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma^2} = 0$

vii) $x^2 - 2\alpha\gamma x + \alpha^2(\gamma^2 - \beta^2) = 0$

42. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x} = 4$ ii) $\frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$ iii) $\frac{7-2x}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{10}{x^2-1}$

43. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + \lambda x + 1 = 0$

να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση :

α) να έχει πραγματικές ρίζες

β) να είναι αδύνατη

γ) να έχει 1 διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε

44. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 8)x^2 + 2(\lambda + 2)x + (\lambda + 8) = 0$

να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση :

α) να έχει πραγματικές ρίζες

β) να είναι αδύνατη

γ) να έχει 1 διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε

45. Αν η εξίσωση : $(\alpha^2 + 1)x^2 - 2(\alpha + \beta)x + \beta^2 + 1 = 0$

έχει πραγματικές ρίζες , να αποδείξετε ότι :

α) οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

β) η εξίσωση έχει μόνο μια ρίζα την $\rho = \beta$.

46. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές του λ

i) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2\lambda} = \frac{3}{x-\lambda}$ ii) $\lambda^2(x-1) = (\lambda+2)x - 1$

47. Να βρείτε τις εξισώσεις που έχουν ρίζες τις : α) 2 και -3 β) -5 και 7 γ) 4 και -4 δ) 2 και -1/2

48. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - 27 = 0$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η μια ρίζα της εξίσωσης να ισούται με το τετράγωνο της άλλης .

49. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (2\lambda - 4)x + 8 = 0$

Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης τότε :

- a) Να βρείτε το λ
 b) Να λύσετε την εξίσωση.

50. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης : $x^2 - 4x - 7 = 0$

Να κατασκευάσετε μια εξίσωση β' βαθμού η οποία να έχει ρίζες τις :

i) $p_1 = x_1^2, p_2 = x_2^2$

ii) $p_1 = x_1 + 2x_2, p_2 = x_2 + 2x_1$

iii) $p_1 = x_1^3, p_2 = x_2^3$

iv) $p_1 = \frac{x_1}{x_2}, p_2 = \frac{x_2}{x_1}$

51. Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda - 2)x^2 + 2x - \lambda + 4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

- a) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες.
 b) Να προσδιορίσετε το λ ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε.
 c) Να προσδιοριστεί ο λ αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης αυτής και $x_1^2 + x_2^2 = 10$

52. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - \lambda x + 1 = 0$

η οποία έχει πραγματικές ρίζες x_1 και x_2

α) Να βρεθεί ο λ .

β) να αποδειχθεί ότι : $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} = 1, \forall \lambda \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

γ) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που να έχει ρίζες τις : $\rho_1 = \frac{x_1+1}{x_2}, \rho_2 = \frac{x_2+1}{x_1}$

53. Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $x^2 + |x| - 6 = 0$ ii) $(x - 3)^4 - (x - 3)^2 - |x - 3|^2 - 8 = 0$
 iii) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ iv) $y^4 - 10y^2 + 9 = 0$

54. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{5}{x^2 + x} - \frac{1}{x - x^2} = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

55. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\frac{2x-2}{x^2-36} - \frac{x-2}{x^2-6x} = \frac{x-1}{x^2+6x}$

ii) $(x^4 + x^2 + 1)^2 - 9x^4 = 3(x^3 - x)^2$

iii) $\frac{5}{x^2-4} - \frac{8}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-3x+2} - \frac{20}{x^2+3x+2}$

56. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ ii) $x^2 - (2\alpha + 3\beta)x + 6\alpha\beta = 0$ iii) $-2x^2 + (\alpha - 3)x + \alpha - 1 = 0$
iv) $2x^2 - (3\alpha - 2)x + \alpha(\alpha - 2) = 0$ v) $2x^2 + (\alpha - 2\beta)x - \alpha(\alpha + 2\beta) = 0$

57. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ ii) $x^2 - 6|x| + 8 = 0$ iii) $-x^2 + |x| + 6 = 0$ iv) $x^2 + 5|x| + 4$

58. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $(x + 1)^2 + |x + 1| - 2 = 0$ ii) $(2x - 1)^2 - 6|2x - 1| + 8 = 0$ iii) $(x - 1)^2 - 4 = 3|x - 1|$

59. Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ii) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ iii) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$ iv) $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

60. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $\left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - 5\left(x - \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$ ii) $\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \frac{6}{x}\right) + 35 = 0$ iii) $\left(\frac{x}{x-4}\right)^2 - \frac{x}{x-4} - 2 = 0$

61. Αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\chi^2 - 3\chi + 1 = 0$, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

i) $\chi_1 + \chi_2$ ii) $\chi_1 \cdot \chi_2$ iii) $\chi_1^2 + \chi_2^2$ iv) $\chi_1^3 + \chi_2^3$ v) $\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2}$ vi) $\frac{\chi_2}{\chi_1} + \frac{\chi_1}{\chi_2}$

62. Δίνεται η εξίσωση : $-2\chi^2 + (\lambda - 5)\chi + \lambda - 3 = 0$

- i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ .
ii. Να βρείτε το λ , ώστε το άθροισμα των ριζών της να είναι ίσο με το γινόμενό τους

63. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ
ii. Να βρείτε το λ ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης να είναι διπλάσια της άλλης

64. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + \lambda x + 1 = 0$ (1)

- i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ
ii. Να βρείτε το λ ώστε η μία ρίζα της εξίσωσης να ισούται με το τετράγωνο της άλλης

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

65. Δίνεται το τριώνυμο : $f(x) = (\lambda + 1)x^2 + 4x + \lambda + 2$

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το τριώνυμο :

α) Να είναι πάντα θετικό

β) Να έχει πραγματικές και άνισες ρίζες

66. Να βρείτε τα πρόσημα των τριωνύμων

$$f(x) = x^2 - 4x - 5, \quad g(x) = -x^2 + 3x + 4,$$

$$h(x) = -2x^2 + x + 1, \quad \varphi(x) = x^2 + 4x + 5$$

67. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i) } x^2 - 4x + 5 < 0 \quad \text{ii) } x^2 - x - 6 < 0 \quad \text{iii) } x^2 + 4x + 4 > 0 \quad \text{iv) } x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

68. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda^2 - \lambda)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

a) Να αποδείξεις ότι $\Delta = 4(\lambda - 1)^3(\lambda + 1)$

b) Να βρεθεί ο λ αν η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την οποία και να βρείτε

c) Να βρεθεί ο λ ώστε η εξίσωση να έχει πραγματικές ρίζες

d) Να βρεθεί ο λ ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

Ακολουθίες



5.1 Ακολουθίες

Τι ονομάζουμε ακολουθία;

Απάντηση:

Ακολουθία λέγεται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}^*$ και ο τύπος της συμβολίζεται με (a_n) αντί για $f(x)$

$n^{\text{ος}}$ όρος μιας ακολουθίας ονομάζεται ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός n και συμβολίζεται με a_n

Αναδρομικό τύπο μιας ακολουθίας ονομάζουμε τον τύπο που συνδέει δύο ή περισσότερους όρους της

Παράδειγμα:

Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες :

$$i) a_n = 2n + 3 \quad ii) a_n = 3^n - 2$$

Λύση:

$$i) a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 3 - 2n - 3 = 2 \quad \text{άρα } a_{n+1} = a_n + 2 \text{ με } a_1 = 5$$

$$ii) a_n + 2 = 3^n$$

$$\frac{a_{n+1} + 2}{a_n + 2} = \frac{3^{n+1}}{3^n} \Leftrightarrow \frac{a_{n+1} + 2}{a_n + 2} = 3 \Leftrightarrow a_{n+1} = 3a_n + 4 \text{ και } a_1 = 1$$

Ασκήσεις στις ακολουθίες

1) Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών

$$i) a_n = 3n - 7 \quad ii) a_n = 2n^2 - n \quad iii) a_n = 2^n - n \quad iv) a_n = \frac{5(-1)^{n+1}}{n}$$

2) Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των ακολουθιών

$$i) a_1 = -2, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3 \quad ii) a_1 = -1, a_{n+1} = 2a_n^2 + 1$$

3) Να ορίσετε αναδρομικά τις ακολουθίες

$$i) a_n = 3n - 1 \quad ii) a_n = 2 - 5n \quad iii) a_n = 4 - 4n \quad iv) a_n = 3 \cdot 4^n - 1 \quad v) a_n = -3^n + 1$$

5.2 Αριθμητική πρόοδος

Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος;

Απάντηση:

Μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού $\alpha_{v+1} = \alpha_v + \omega$

Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$$

Απόδειξη:

Από τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έχουμε

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \omega$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \omega$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\alpha_v = \alpha_{v-1} + \omega$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις v αυτές ανισότητες παίρνουμε

$$\alpha_v = \alpha_1 + (v - 1)\omega$$

Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$

Απόδειξη:

Έστω ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω

Είναι $\beta - \alpha = \omega$ και $\gamma - \beta = \omega$

$$\text{Οπότε } \beta - \alpha = \gamma - \beta \Leftrightarrow 2\beta = \alpha + \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

Έστω ότι για τους τρεις αριθμούς α, β, γ ισχύει $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$

Οπότε θα έχουμε $2\beta = \alpha + \gamma$ ή $\beta - \alpha = \gamma - \beta$

Που σημαίνει ότι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

Τον αριθμό β τον λέμε αριθμητικό μέσο των α και γ

Να γράψετε τον τύπο που μας δίνει το άθροισμα των v πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου

Απάντηση:

$$S_v = \frac{v}{2}(\alpha_1 + \alpha_v) \text{ ή } S_v = \frac{v}{2}[2\alpha_1 + (v - 1)\omega]$$

Ασκήσεις στην αριθμητική πρόοδο

- 1) Να βρείτε τον n° όρο των αριθμητικών προόδων
 - i) 2,6,10,14, ...
 - ii) 12,7,2,-3, ...
 - iii) -5,-3,-1,1, ...
 - iv) $4, \frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}, \dots$
- 2) Να βρείτε τον ζητούμενο όρο σε κάθε μια από τις παρακάτω αριθμητικές προόδους
 - i) τον a_{12} της $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$
 - ii) τον a_{20} της 4,10,16,22, ...
 - iii) τον a_{40} της -4,-1,2,5, ...
- 3) Να βρείτε τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου (a_n) , όταν :
 - i) $a_8 = 12$ και $\omega = -5$
 - ii) $a_{11} = 15$ και $\omega = \frac{5}{2}$
 - iii) $a_{10} = 6$ και $\omega = 2$
- 4) i) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) με $a_1 = -3$ και $\omega = 5$ ισούται με 82
ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) με $a_1 = 6$ και $\omega = 3$ ισούται με 42
- 5) i) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) με $a_3 = 7$ και $\omega = 2$ ισούται με 33
ii) Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου (a_n) με $a_{10} = 22$ και $\omega = -4$ ισούται με 46
- 6) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_1 = -9$ και $a_6 = 16$. Να βρείτε :
 - i) Τη διαφορά της προόδου
 - ii) Τον όρο a_{20}
 - iii) Ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 96
- 7) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_9 = 12$ και $\omega = 3$. Να βρείτε :
 - i) Τον πρώτο όρο της προόδου
 - ii) Τον όρο a_{15}
 - iii) Ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με μηδέν
- 8) Να βρείτε το πλήθος :
 - i) Των ακεραίων από το 7 έως το 325
 - ii) Των πολλαπλασίων του 3 από το 14 έως το 532
- 9) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_{10} = 4$ και $a_{15} = 19$. Να βρείτε :
 - i) τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου
 - ii) Τον όρο a_{25}
- 10) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_6 = 12$ και $a_3 = -3$. Να βρείτε :
 - i) Τον όρο a_{21}
 - ii) τον n -οστό όρο της προόδου
- 11) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_6 - a_2 = 20$ και $a_5 + a_9 = 68$. Να βρείτε :

- i) Τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου
- ii) Τον n -οστό όρο της προόδου
- 12) Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο των αριθμών
i) 12 και 36 *ii)* -25 και -5 *iii)* -17 και 3
- 13) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού x ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $4x - 1$ και $x + 3$ είναι ο αριθμός $2x + 3$
- 14) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί $15, 16 + x, 25$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
- 15) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 30 όρων των αριθμητικών προόδων
i) 6, 11, 16, 21, ... *ii)* $-10, -7, -4, -1, \dots$ *iii)* 7, 4, 1, $-2, \dots$ *iv)* $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \dots$
- 16) Σε μία αριθμητική πρόοδο (a_n) είναι $a_1 = 2$ και $\omega = \frac{3}{2}$ να υπολογίσετε το άθροισμα των πρώτων 20 όρων της
- 17) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :
i) $4 + 5 + 6 + \dots + 77$ *ii)* $5 + 9 + 13 + \dots + 133$ *iii)* $-3 + 2 + 7 + \dots + 397$

4.3 Γεωμετρική πρόοδος

Τι ονομάζουμε γεωμετρική πρόοδο;

Απάντηση:

Μια ακολουθία ονομάζεται γεωμετρική πρόοδος όταν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό $\alpha_{v+1} = \lambda \cdot \alpha_v$

Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον α_1 και λόγο λ

Απόδειξη:

$$\alpha_1 = \alpha_1$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \lambda$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cdot \lambda$$

.....

$$\alpha_v = \alpha_{v-1} \cdot \lambda$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε

$$\alpha_v = \alpha_1 \cdot \lambda^{v-1}$$

Να αποδείξετε ότι τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου αν και μόνο αν $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

Απόδειξη:

Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο λ

Τότε ισχύει $\frac{\beta}{\alpha} = \lambda$ και $\frac{\gamma}{\beta} = \lambda$ επομένως $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

Αντίστροφα

Αν για τους $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ τότε έχουμε $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta}$

Που σημαίνει ότι οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου

Ο β λέγεται γεωμετρικός μέσος των α, β, γ

Να γράψετε τον τύπο που μας δίνει το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου

Απάντηση:

Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ δίνεται από τον τύπο

$$S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$$

ΠΡΟΟΔΟΙ

	Αριθμητική πρόοδος	Γεωμετρική πρόοδος
	$(\alpha_n): \text{Α.Π} \Leftrightarrow \alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$ $(\alpha_n): \text{σταθερή} \Leftrightarrow \omega = 0$	$(\alpha_n): \text{Γ.Π} \Leftrightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lambda$ $\alpha_n \neq 0, \lambda \neq 0$ $(\alpha_n): \text{σταθερή} \Leftrightarrow \lambda = 1$
Ντιστός όρος	$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$	$\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$
Άθροισμα n πρώτων όρων	$S_n = \frac{n}{2} (\alpha_1 + \alpha_n)$ $S_n = \frac{n}{2} [2\alpha_1 + (n - 1)\omega]$	$S_n = \alpha_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$
Διαδοχικοί όροι	$\alpha, \beta, \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$	$\alpha, \beta, \gamma \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

Ασκήσεις στην γεωμετρική πρόοδο

- 1) Να βρείτε τον ν-οστό όρο των γεωμετρικών προόδων:
i) $2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \dots$ ii) $3, -9, 27, \dots$ iii) $-\frac{1}{4}, 1, -4, \dots$
- 2) Να βρείτε τον ζητούμενο όρο σε κάθε μια από τις γεωμετρικές προόδους
i) τον a_7 της $\frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ ii) τον a_8 της $-8, 4, -2, \dots$ iii) τον a_9 της $\frac{1}{81}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \dots$
- 3) Να βρείτε τον πρώτο όρο της γεωμετρικής προόδου (a_n) όταν :
i) $a_7 = \frac{320}{81}$ και $\lambda = \frac{2}{3}$ ii) $a_6 = 448$ και $\lambda = 2$
- 4) Να βρείτε τον λόγο της γεωμετρικής προόδου (a_n) όταν :
i) $a_1 = \frac{1}{2}$ και $a_7 = 32$ ii) $a_1 = -2$ και $a_6 = 6250$
- 5) i) Ποιός όρος της γεωμετρικής προόδου (a_n) με $a_1 = 6$ και $\lambda = 2$ ισούται με 768;
ii) Ποιός όρος της γεωμετρικής προόδου (a_n) με $a_1 = -3$ και $\lambda = \frac{1}{3}$ ισούται με $-\frac{1}{729}$;
- 6) i) Ποιός όρος της γεωμετρικής προόδου (a_n) με $a_3 = 18$ και $\lambda = 2$ ισούται με 576;
ii) Ποιός όρος της γεωμετρικής προόδου (a_n) με $a_4 = \frac{9}{4}$ και $\lambda = \frac{3}{2}$ ισούται με $\frac{2187}{128}$;
- 7) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της γεωμετρικής προόδου όταν :
i) $a_6 = 234$ και $a_4 = 26$ ii) $a_4 = 15$ και $a_7 = -960$ iii) $a_5 = 12$ και $a_5 = 12$ και $a_{10} = 384$
- 8) Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της γεωμετρικής προόδου όταν :
i) $a_1 + a_3 = 7$ και $a_2 + a_4 = 21$ ii) $a_1 + a_2 = 16$ και $a_3 + a_4 = 400$
- 9) Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο των αριθμών :
i) 4 και 49 ii) -32 και -8
- 10) Να βρείτε για ποια τιμή του x ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών x-2 και 7x+4 είναι ο αριθμός 2x
- 11) Να βρείτε για ποιες τιμές του x οι αριθμοί x, $3x-2$, $5x-2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
- 12) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 9 πρώτων όρων των γεωμετρικών προόδων :
i) 2, 8, 32, ... ii) $-4, -8, -16, \dots$ iii) $6, -2, \frac{2}{3}, \dots$ iv) $-\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, -1, \dots$

13) Να υπολογίσετε τα αθροίσματα :

i) $5 + 10 + 20 + \dots + 1280$ ii) $9 + (-3) + 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{243}\right)$ iii) $\left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{4}$
 $+ (-1) + 4 + \dots + 1024$

Γενικές Ασκήσεις στις προόδους

1. Έστω η ακολουθία $a_n = 3n - 2$
 - i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος
 - ii) Να βρείτε την διαφορά και τον πρώτο όρο της
2. Έστω η αριθμητική πρόοδος 7, 4, 1, ...
Να βρείτε το νιοστό και τον 8^ο όρο της
3. Έστω η αριθμητική πρόοδος (a_n) με πρώτο όρο το -10 και πέμπτο όρο το 2.
 - i) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου
 - ii) Να βρείτε τον a_{11}
4. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο 3^{ος} όρος είναι 2 και ο 7^{ος} όρος -10. Να βρείτε τον 11^ο όρο της
5. Σε μια αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του 3^{ου} και 7^{ου} όρου της είναι 10. Αν $a_5 > a_{11}$ και οι a_5, a_{11} διαφέρουν κατά 3 να βρείτε τον a_{13}
6. Αν οι αριθμοί $\alpha = 3\chi + 5$, $\beta = \chi - 1$, $\gamma = \chi + 3$ είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου τότε
 - i. Να βρείτε το χ
 - ii. Να βρείτε τον 5^ο όρο της προόδου αν ο α είναι ο 17^{ος} όρος της
7. Αν δυο αριθμοί διαφέρουν κατά 8 και ο αριθμητικός τους μέσος είναι 11 να βρείτε τους δύο αριθμούς
8. Έστω η αριθμητική πρόοδος -9, -6, -3, ...
 - i. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της
 - ii. Πόσους πρώτους όρους πρέπει να πάρουμε για να έχουμε άθροισμα 45
9. Ένα θέατρο έχει 15 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 60 θέσεις και στην τελευταία 18 θέσεις. Αν το πλήθος των θέσεων ελαττώνεται από σειρά σε σειρά κατά τον ίδιο πάντοτε αριθμό, να βρείτε το πλήθος των θέσεων
 - i. Που ελαττώνεται από σειρά σε σειρά
 - ii. Της μεσαίας σειράς
 - iii. Όλων των θέσεων του θεάτρου
 - iv. Από την 5^η σειρά έως τη 13^η σειρά

10. Ένας αγόρασε έναν υπολογιστή 1000 €. Αν μετά από κάθε χρόνο χάνει το $\frac{1}{10}$ της αξίας που είχε όταν τον αγόρασε, να βρείτε την αξία του υπολογιστή μετά από 5 χρόνια
11. Μια στέγη σχήματος τραπεζίου έχει 156 κεραμίδια. Η πρώτη σειρά έχει 30 κεραμίδια και κάθε επόμενη σειρά έχει 3 κεραμίδια λιγότερα. Πόσες σειρές κεραμιδιών έχει η στέγη;
12. Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = 3 \cdot 2^n$. να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον 1^ο όρο καθώς και τον λόγο λ
13. Έστω η γεωμετρική πρόοδος :6,-3, $\frac{3}{2}$,...
- Να βρείτε τον νιοστό όρο
 - Να βρείτε τον 11^ο όρο
 - Ποιος όρος ισούται με $-\frac{3}{64}$
14. Να βρείτε το λόγο μιας γεωμετρικής προόδου της οποίας ο 1^{ος} όρος είναι -12 και ο πέμπτος $-\frac{4}{27}$
15. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι 7 και ο 8^{ος} όρος του $-\frac{7}{32}$ να βρείτε
- Τη γεωμετρική πρόοδο
 - Το πλήθος των όρων της γεωμετρικής προόδου μέχρι και τον όρο που ισούται με $-\frac{7}{512}$
 - Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων
16. i. Να βρείτε το γεωμετρικό μέσο των αριθμών $2 + \sqrt{3}$ και $2 - \sqrt{3}$
 ii. Να βρείτε το x , ώστε οι αριθμοί $x-1$, $1-x$, $-3x$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου
17. Ένα μπαλάκι του τένις πέφτει από ένα τραπέζι που έχει ύψος 64cm και αναπηδά στο δάπεδο χάνοντας κάθε φορά το $\frac{1}{4}$ του ύψους της προηγούμενης αναπήδησης. Να βρείτε σε τι ύψος θα φτάσει μετά την 3^η αναπήδηση

Συναρτήσεις



5.1 Συναρτήσεις

Τι ονομάζουμε συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B ;

Απάντηση:

Ονομάζουμε συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B τη διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \xrightarrow{f} y = f(x)$$

- Το σύνολο A λέγεται πεδίο ορισμού
- Το σύνολο B λέγεται σύνολο τιμών
- Το x λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή
- Το $y=f(x)$ λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή

Πως βρίσκω πεδίο ορισμού συνάρτησης ;

Συνάρτηση	Περιορισμός
$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{A(x)}$	$A(x) \geq 0$
$f(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{B(x)}}$	$B(x) > 0$

Όταν έχω συνδυασμό περιπτώσεων παίρνω τους κατάλληλους περιορισμούς και κάνω συναλήθευση

1° Παράδειγμα:

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

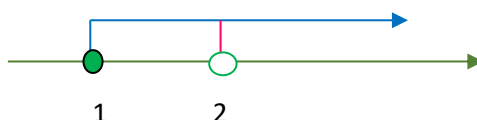
$$f(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-1}$$

Λύση:

Πρέπει :

$$x-2 \geq 0 \text{ και } x-1 \neq 0$$

$$x \geq 2 \text{ και } x \neq 1$$



Άρα $x \in [1,2) \cup (2, +\infty)$ επομένως $A_f = [1,2) \cup (2, +\infty)$

Ασκήσεις στα πεδία ορισμού

- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x$
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3a)$
 - Να αποδείξετε ότι $f(\alpha + \beta) - f(\alpha) = f(\beta) + 4\alpha\beta$
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{αν } x < 0 \\ 3x^2 - 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(2)$
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } x < -1 \\ -x^2, & \text{αν } -1 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$
- Να βρείτε το πεδίο της συνάρτησης f
 - $f(x) = x^2 + 7$
 - $f(x) = \frac{4}{x^2 + 1}$
 - $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$
 - $f(x) = 4x - 3$
 - $f(x) = \frac{1}{4x - 8}$
 - $f(x) = \sqrt{5x - 10}$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x + 15}}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
 - $f(x) = 1 + \frac{2}{x - 2}$
 - $f(x) = \frac{x + 5}{x^2 - 7x + 10}$
 - $f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}$
 - $f(x) = \frac{1}{x - 2} + \frac{x}{x + 3}$
 - $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$
 - $f(x) = \frac{5}{x^2 + 5x}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
 - $f(x) = \frac{x^2}{x}$
 - $f(x) = \frac{x}{|x|}$
 - $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$
 - $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 25}$
- Να βρεις το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
 - $f(x) = \sqrt{x^2}$
 - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$
 - $f(x) = \sqrt{-x}$

8. Να βρείς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

$$i) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \quad ii) f(x) = \sqrt{9x^2-4} \quad iii) f(x) = \sqrt{16-25x^2} \quad iv) f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x^2+x+1}}$$

9. Να βρείς το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$i) f(x) = \frac{1}{|x|-4} \quad ii) f(x) = \frac{x+3}{|x-9|-7} \quad iii) f(x) = \frac{1}{5-|x|} \quad iv) f(x) = \sqrt{6-|x|} \quad v) f(x) = \frac{4x}{\sqrt{4-|x-2|}}$$

10. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

$$i) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}+3}{|x-3|+1} \quad ii) f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-2}{x-1} \quad iii) f(x) = \frac{\sqrt{5-|x|}}{x-2} \quad iv) f(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2-x-2}$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x^2-1}$

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

b) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$i) f(x) = 1 \quad ii) f(x) > 0 \quad iii) f(x) > \frac{3}{2}$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

b) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει :

$$i) f(x) = 10 \quad ii) f(x) < 1$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-6|x|+9}{x^2-3|x|}$

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

b) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$i) f(x) = -2 \quad ii) f(x) < \frac{1}{2}$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + \beta, & \text{αν } x \leq 2 \\ ax^2 + \beta, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

b) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε $f(2)=1$ και $f(3)=6$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + 2\beta - 1, & \text{αν } x < 0 \\ (a^2 + \beta^2)x + 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε $f(-1) = f(1)$

16. Το μήκος ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου είναι x μέτρα, ενώ το πλάτος του είναι 5 μέτρα μικρότερο από το μήκος του

- i) Να εκφράσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του x
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων
- iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του οικοπέδου, αν γνωρίζετε ότι η περίμετρος του είναι 70 μέτρα

5.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Συμμετρικά σημεία

Σημείο	Συμμετρικό ως προς τον χ'χ	Συμμετρικό ως προς τον γ'γ	Συμμετρικό ως προς την αρχή O(0,0)	Συμμετρικό ως προς την γ=χ
M(α,β)	M ₁ (α,-β)	M ₂ (-α,β)	M ₃ (-α,-β)	M ₄ (β,α)

Να αποδείξετε ότι η απόσταση δυο σημείων A(x₁,y₁) B(x₂,y₂)

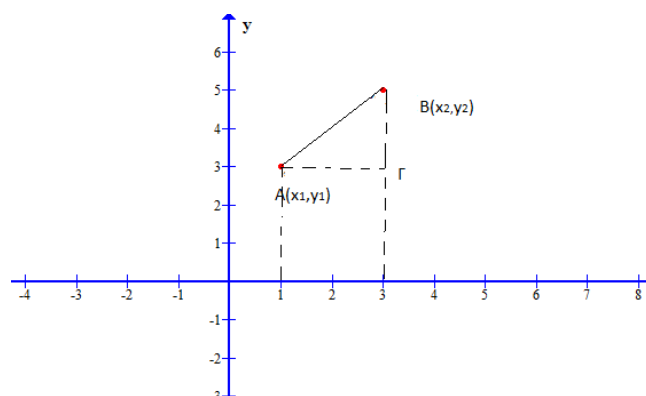
Δίνεται από τον τύπο (AB)=

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Απόδειξη:

Εφαρμόζοντας πυθαγόρειο στο τρίγωνο ABΓ έχουμε

$$\begin{aligned} (AB)^2 &= (A\Gamma)^2 + (B\Gamma)^2 \\ (AB) &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



Γραφική παράσταση συνάρτησης f

Ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f το σύνολο των σημείων M(x,y) για τα οποία ισχύει y=f(x)

Προσοχή!!!

Για να είναι μια γραφική παράσταση, γραφική παράσταση συνάρτησης θα πρέπει οποιαδήποτε κάθετη στον χ'χ να την τέμνει σε ένα το πολύ σημείο

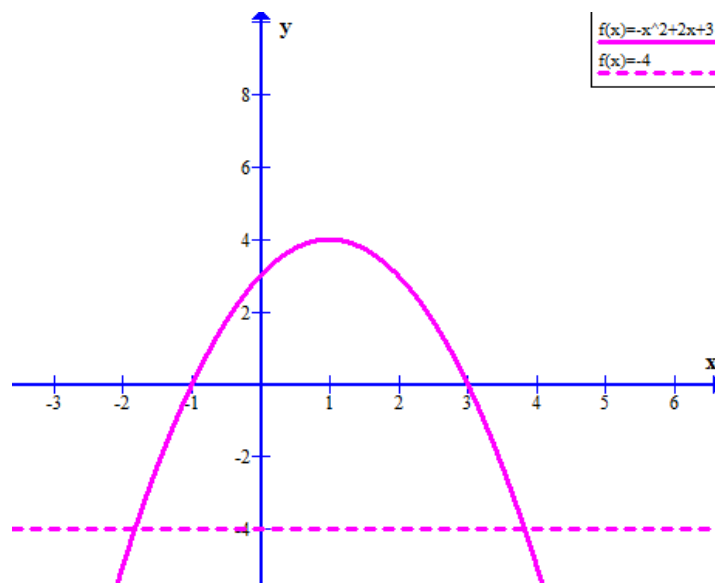
Παρατήρηση:

- Το σημείο K(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν f(α)=β
- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον χ'χ όταν η f(x)=0 έχει λύση
- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον γ'γ όταν το χ=0 ανήκει στο π.ο
- Η γραφική παράσταση της f τέμνει την γραφική παράσταση της g όταν f(x)=g(x)
- Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον χ'χ όταν f(x)>0
- Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον χ'χ όταν f(x)<0
- Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν f(x)>g(x)

Ασκήσεις στη γραφική παράσταση συνάρτησης

1. Να βρείτε και να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το συμμετρικό του σημείου $A(1,-5)$
 - i) Ως προς τον άξονα $x'x$
 - ii) Ως προς τον άξονα $y'y$
 - iii) Ως προς την αρχή O των αξόνων
 - iv) Ως προς τη διχοτόμο της γωνίας xoy
2. Να βρείτε :
 - i) Σε ποιο τεταρτημόριο ανήκει καθένα από τα σημεία $A(1,2)$ $B(-3,5)$ $\Gamma(-4,-4)$
 - ii) Για ποιες τιμές του x το σημείο $M(-2x + 1, 3x + 6)$ ανήκει στο 1^ο τεταρτημόριο
 - iii) Για ποιες τιμές του x το σημείο $N(2x - 4, 6x + 5)$ ανήκει στο 3^ο τεταρτημόριο
3. Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε τα σημεία :
 - i) $A(4, 2\lambda - 1)$ και $B(4, -\lambda + 3)$ να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$
 - ii) $\Gamma(\lambda, 2)$ και $\Delta(\lambda - 2, 2)$ να είναι συμμετρικά ως προς τον $y'y$
 - iii) $E(|\lambda|, 4)$ και $Z(-1, \lambda - 3)$ να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων
 - iv) $H(\lambda^2, 7)$ και $\Theta(\lambda + 4, 9)$ ως προς τη διχοτόμο της γωνίας xoy
4. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε :
 - i) Το σημείο $M(2, (\alpha - 1)^2 + \beta^2)$ να ανήκει στον άξονα $x'x$
 - ii) Το σημείο $N(|\alpha + 1| + |\beta - 2|, -5)$ να ανήκει στον άξονα $y'y$
5. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων :
 - i) $A(1,2)$ και $B(1,4)$
 - ii) $\Gamma(2,5)$ και $\Delta(-2,5)$
 - iii) $E(3,0)$ και $Z(0,-4)$
6. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(2,-2)$, $B(-1,-1)$ και $\Gamma(3,-5)$ είναι ισοσκελές
7. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(2,3)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(5,2)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
8. Δίνονται τα σημεία $A(|\alpha + 1| - 2, |\beta - 2| - 3)$ και $B(1,2)$. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε τα σημεία A και B να είναι συμμετρικά ως προς
 - i) Τον άξονα $x'x$
 - ii) Τον άξονα $y'y$
 - iii) Την αρχή των αξόνων
 - iv) Την διχοτόμο της γωνίας xoy

9. Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(-1,0)$, $B(1,-1)$, $\Gamma(0,-2)$, $\Delta(2,1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 2$
10. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a ώστε το σημείο που δίνεται να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης :
- i) $f(x) = 2x^2 - x - a$, $A(2,3)$
 ii) $g(x) = ax + 2$, $B(-2,4)$
 iii) $h(x) = ax^3 + 4x - 1$, $\Gamma(-1,-6)$
 iv) $\varphi(x) = \frac{a}{\sqrt{x-1}}$, $\Delta(5,-3)$
11. Να βρείτε σε ποια σημεία οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τους άξονες
- i) $f(x) = 3x - 5$ ii) $g(x) = (x+1)(x-2)$ iii) $h(x) = x^2 - 2x - 3$
 iv) $\varphi(x) = x^3 - x$ v) $\sigma(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x+2}$ vi) $\theta(x) = \sqrt{x-1}$
12. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g όταν
- i) $f(x) = x^2 - x + 2$ και $g(x) = 3x - 1$
 ii) $f(x) = x^2 - x - 3$ και $g(x) = -x^2 + x + 1$
 iii) $f(x) = x^2 + 2x$ και $g(x) = -x^2 + 10x - 8$
13. Στο δίπλα σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A[-1,4]$. Να βρείτε :
- i) Τις τιμές $f(0), f(1), f(2)$ και $f(4)$
 ii) Το σύνολο τιμών της f
 iii) Τις ρίζες των εξισώσεων :
 a) $f(x)=0$
 b) $f(x)=3$
 iv) τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :
 a) πάνω από τον άξονα $x'x$
 b) κάτω από τον άξονα $x'x$

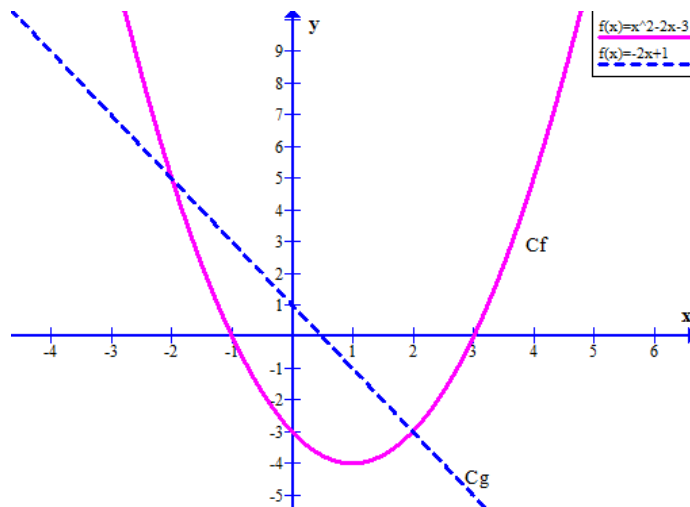


14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$. Να βρείτε :
- i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

ii) Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται:

- a) Πάνω από τον άξονα $x'x$
- b) Κάτω από τον άξονα $x'x$

15. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g που έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$



i) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(0)$,
 $g(1)$, $g(0)$

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις $f(x)=0$
και $f(x)=g(x)$

iii) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$
και $f(x)<g(x)$

16. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 7x + 6$ και $g(x) = -x^2 + 5x - 10$. Να βρείτε :

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

ii) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g

iii) Τα διαστήματα στα οποία :

- a) Η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$
- b) Η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g

5.3 Η συνάρτηση $f(x)=ax+\beta$

Συντελεστή διεύθυνσης ή κλίση μιας ευθείας ονομάζουμε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον $\chi' \chi$

$$\alpha = \epsilon\phi\omega, \quad 0 \leq \omega < 180$$

Συντελεστής διεύθυνσης μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

Απάντηση:

$$\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_2 \neq x_1$$

Εξίσωση ευθείας

Η $y=ax+\beta$ παριστάνει μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης α που τέμνει τον $y' y$ στο σημείο $B(0, \beta)$

Παρατήρηση:

- i) Η $y=ax$ παριστάνει μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- ii) Η $y=x$ είναι η διχοτόμος του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου
- iii) Η $y=-x$ είναι η διχοτόμος του 2^{ου} και 4^{ου} τεταρτημορίου
- iv) Η $x=a$ είναι μια ευθεία κάθετη στον $\chi' \chi$ για την οποία δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης
- v) Η $y=a$ είναι μια ευθεία παράλληλη στον $\chi' \chi$ της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι 0

ω	0	30	45	60	90	120	135	150
$\epsilon\phi\omega$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Delta.O$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Πότε δυο ευθείες είναι παράλληλες πότε ταυτίζονται και πότε είναι κάθετες;

Απάντηση:

Έστω δυο ευθείες $\epsilon_1: y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $\epsilon_2: y=\alpha_2 x+\beta_2$

- $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \text{ και } \beta_1 \neq \beta_2$
- $\epsilon_1 \equiv \epsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \text{ και } \beta_1 = \beta_2$
- $\epsilon_1 \perp \epsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = -1$

Ασκήσεις στην ευθεία

1. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης των ευθειών :

i) $y = 5x$ ii) $y - 1 = 3x$ iii) $y = \frac{6x+1}{3}$ iv) $y = \frac{4-3x}{2}$ v) $y = -\frac{x}{2} + 3$ vi) $y = -1$

2. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ οι ευθείες :

i) $y = x + 3$ ii) $y = \sqrt{3}x$ iii) $y = -x + 1$ iv) $y = \frac{2x+1}{2}$ v) $y = 2$ vi) $y = -\frac{3x+2}{3}$

3. Να βρείτε τα σημεία τομής των αξόνων με τις ευθείες

i) $y = 2x - 1$ ii) $y = -x + 5$ iii) $y = \frac{1}{2}x + 3$ iv) $y = 4$ v) $y = 3x - 2$ vi) $y = -3x + 6$

4. Να βρείτε τα σημεία τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 όταν

i) $\varepsilon_1: y = 5x + 2$ και $\varepsilon_2: y = 3x - 6$

ii) $\varepsilon_1: y = 2x - 5$ και $\varepsilon_2: y = -x + 4$

5. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B

i) A(-2,2) και B(4,5) ii) A(-3,1) και B(2,-3) iii) A(5,1) και B(-1,1) iv) A(1,4) και B(4,1)

6. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B όταν :

i) A(1,1) και B(3,-1) ii) A(2, $\sqrt{3}$) και B(4, $3\sqrt{3}$) iii) A(2,3) και B(-1,3) iv) A(1,2) και B(1,3)

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία :

i) O(0,0) και A(1,3) ii) B(2,0) και Γ(0,-4) iii) Δ(0,1) και E(1, $\frac{1}{2}$) iv) Z(3,1) και H(2,1)

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις

i) Όταν έχει συντελεστή διεύθυνσης -2 και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο K(0,4)

ii) Όταν σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο Λ(0,-2)

iii) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+5$ και διέρχεται από το σημείο M(1,3)

9. Δίνεται η ευθεία ε με εξίσωση $y = (3\lambda - 4)x + \lambda + 2$

Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία ε :

i) Να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 1$

ii) Να είναι παράλληλη στον $x'x$

iii) Να διέρχεται από την αρχή των αξόνων

iv) Να διέρχεται από το σημείο A(1,-2)

v) Να σχηματίζει με τον $x'x$ γωνία 135°

10. Έστω η ευθεία ε με εξίσωση $y = 4x - 2$ και A,B τα σημεία τομής αυτής με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να βρείτε:

- i) Τις συντεταγμένες των A και B
- ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων
- iii) Την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο B και είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x + 1$

11. Αν η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία A(-2,2) και B(1,5) τότε

- i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
- ii) Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ(-3,1) ανήκει στην ευθεία ε
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες
- iv) Να παραστήσετε γραφικά την ευθεία ε
- v) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x'x

12. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι παρακάτω ευθείες να διέρχονται από την αρχή των αξόνων

i) $y = -6x + (2\lambda + 1)$ ii) $y = (\lambda - 1)x + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)$

13. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι παρακάτω ευθείες να είναι παράλληλες

i) $y = (2\lambda + 1)x + 1$ και $y = (\lambda - 2)x - 3$

ii) $y = \lambda x$ και $y = \lambda^2 x - 1$

iii) $y = (\lambda^2 + 10)x + 3$ και $y = 7\lambda x - 2$

iv) $y = (3 - |\lambda - 1|)x$ και $y = -2x + 1$

v) $y = \lambda x + 1$ και $y = \left(\frac{\lambda}{4} - 1\right)x + 2$

14. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι παρακάτω ευθείες να είναι παράλληλες στον άξονα x'x

i) $y = (\lambda^2 - 9)x - 2$ ii) $y = (|\lambda| - 2)x + 4$

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες $y = x + \lambda$ και $y = (|\lambda| - 2)x + 2\lambda - 3$

i) Να είναι παράλληλες

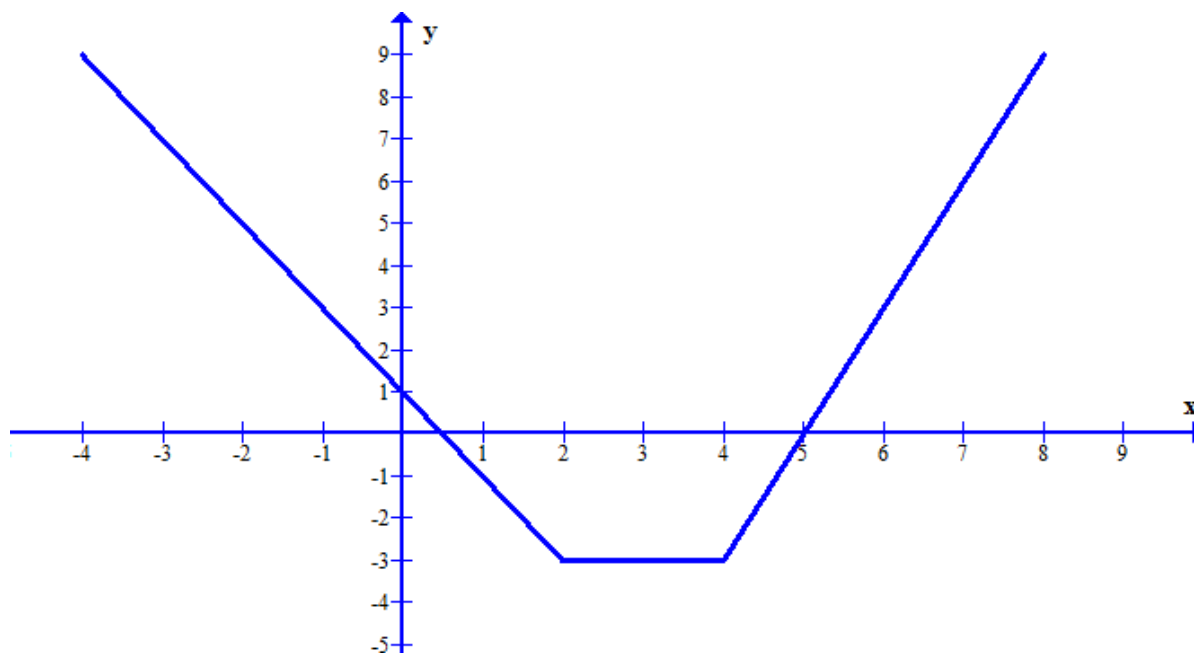
ii) Να συμπίπτουν

16. Να βρείτε για ποιες τιμές των κ και λ οι ευθείες

$$y = (\lambda - 1)x + \kappa + \lambda \text{ και } y = \frac{3x - \lambda + 6}{3}$$

Συμπίπτουν

17. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



1. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{αν } x \leq -1 \\ 3, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ -2x + 5, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x + 3| - 1$

α) Το πεδίο ορισμού της

β) Να γράψετε τον τύπο της χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής

c) Να την παραστήσετε γραφικά

d) Να λύσετε γραφικά :

i) Την εξίσωση $f(x)=0$

ii) Την ανίσωση $f(x)>0$

e) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

b) Να απλοποιήσετε τον τύπο της

c) Να την παραστήσετε γραφικά

4. Το πάγιο μηνιαίο τέλος ενός κινητού τηλεφώνου είναι 10 ευρώ και το 1 λεπτό ομιλίας κοστίζει 0,25 ευρώ . Να βρείτε :

a) Τον τύπο της συνάρτησης που δίνει το μηνιαίο κόστος αν ο συνολικός χρόνος ομιλίας είναι x λεπτά

b) Το πεδίο ορισμού της προηγούμενης συνάρτησης και να παραστήσετε γραφικά αυτή

c) Πόσα λεπτά πρέπει να μιλήσει ο συνδρομητής ώστε να πληρώσει 25 ευρώ το μήνα

18. Η εξίσωση εσόδων ενός καταστήματος από τη στιγμή λειτουργίας του είναι $y=x$ (σε χιλιάδες ευρώ) , ενώ η εξίσωση εξόδων είναι $y=ax+\beta$, όπου X είναι ο χρόνος λειτουργίας του σε μήνες . Το δεύτερο μήνα λειτουργίας τα έξοδα του καταστήματος ήταν διπλάσια από τα έσοδα ενώ τον 6^ο μήνα τα έσοδα ήταν ίδια με τα έξοδα

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και $\beta = 3$

ii) Να βρείτε ποιο ήταν το κέρδος το δωδέκατο μήνα λειτουργίας του καταστήματος

iii) Να βρείτε έπειτα από πόσο χρονικό διάστημα το κέρδος θα είναι 6000 ευρώ

5.4 Μετατόπιση γραφικής συνάρτησης συνάρτησης

Η $\phi(x)=f(x-c)$ προέρχεται από την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες δεξιά, $c > 0$

- Η $\phi(x)=f(x+c)$ προέρχεται από την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες αριστερά, $c > 0$
- Η $\phi(x)=f(x)+c$ προέρχεται από την κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες προς τα πάνω, $c > 0$
- Η $\phi(x)=f(x)-c$ προέρχεται από την κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες προς τα κάτω, $c > 0$

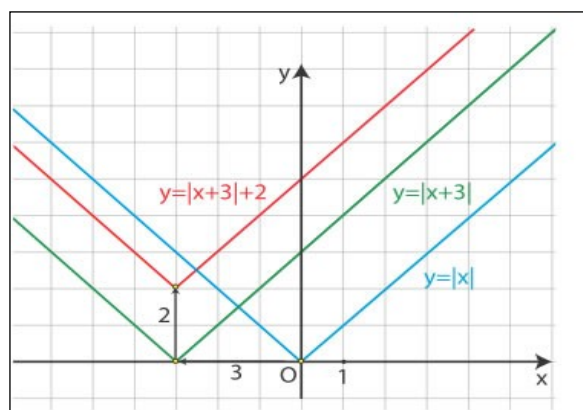
Στο παράδειγμα δίπλα έχουμε

τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = |x|$$

$$g(x) = |x+3|$$

$$h(x) = |x+3|+2$$



Άσκηση

έστω $f(x) = 2x^3 + 1$.

Τι τύπο έχει μια συνάρτηση g , της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την γραφική παράσταση της f αν:

- την μετατοπίσουμε οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά
- την μετατοπίσουμε οριζόντια κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά
- την μετατοπίσουμε κατακόρυφα 2 μονάδες προς τα επάνω
- την μετατοπίσουμε κατακόρυφα 4 μονάδες προς τα κάτω

5.5 Μελέτη συναρτήσεων

Ορισμός

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο A όταν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(\chi_1) < f(\chi_2)$
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο A όταν για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in A$ με $\chi_1 < \chi_2$ ισχύει $f(\chi_1) > f(\chi_2)$

Ορισμός

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει **ολικό ελάχιστο** στο χ_0 το $f(\chi_0)$ όταν $f(x) \geq f(\chi_0)$
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει **ολικό μέγιστο** στο χ_0 το $f(\chi_0)$ όταν $f(x) \leq f(\chi_0)$

Ορισμός

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **άρτια**
 - όταν για κάθε $\chi \in A$ ισχύει $-\chi \in A$ και
 - $f(-\chi) = f(\chi)$
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιττή**
 - όταν για κάθε $\chi \in A$ ισχύει $-\chi \in A$ και
 - $f(-\chi) = -f(\chi)$

Παρατήρηση:

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων

Μελέτη συνάρτησης

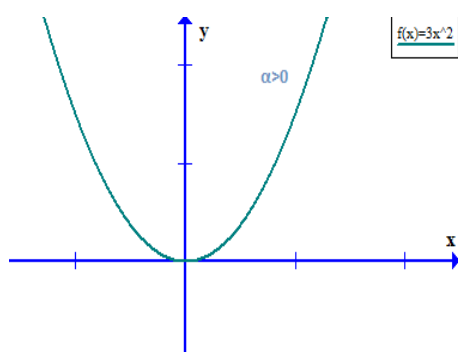
Για τη μελέτη μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα εξής βήματα

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- Εξετάζουμε αν υπάρχουν συμμετρίες, δηλαδή αν είναι άρτια ή περιττή
- Εξετάζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης
- Βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης
- Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης για απολύτως μεγάλες τιμές του χ
- Κάνουμε έναν πίνακα τιμών και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση

Μελέτη της $f(x)=ax^2$, $a>0$

- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια , δηλαδή η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $\chi'\chi$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- Παρουσιάζει στο χ_0 ελάχιστο το $f(0)=0$
- Όταν το χ τείνει στο $-\infty$ το $f(x)$ μεγαλώνει γρηγορότερα τείνοντας και αυτό στο $+\infty$ Όταν το χ τείνει στο $+\infty$ το $f(x)$ μεγαλώνει γρηγορότερα τείνοντας και αυτό στο $+\infty$

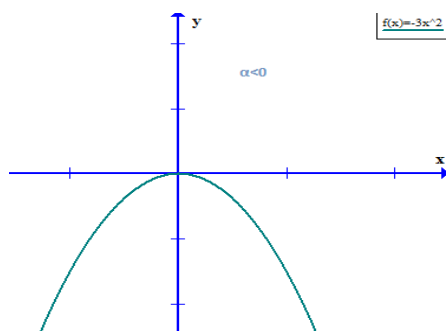
χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$



Μελέτη της $f(x)=ax^2$, $a<0$

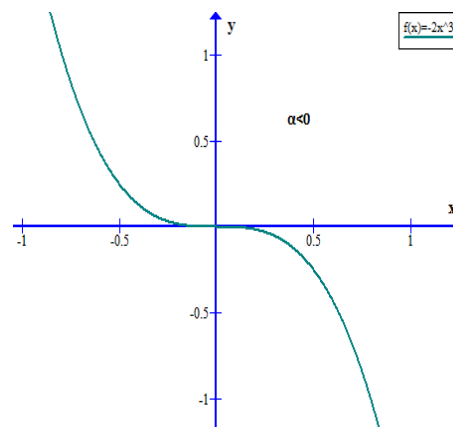
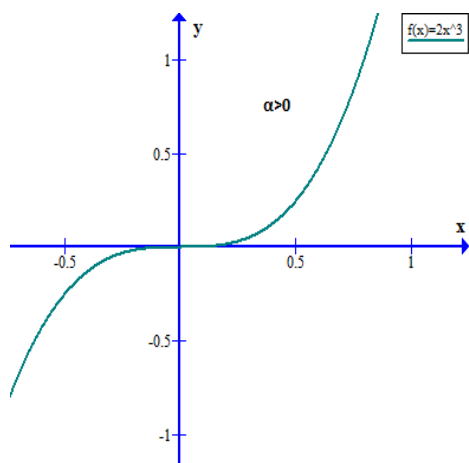
- Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
- Είναι άρτια , δηλαδή η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $\chi'\chi$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$
- Παρουσιάζει στο χ_0 μέγιστο το $f(0)=0$
- Όταν το χ τείνει στο $+\infty$ το $f(x)$ τείνει στο $-\infty$ και όταν το χ τείνει στο $-\infty$ η $f(x)$ τείνει στο $-\infty$

χ	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	

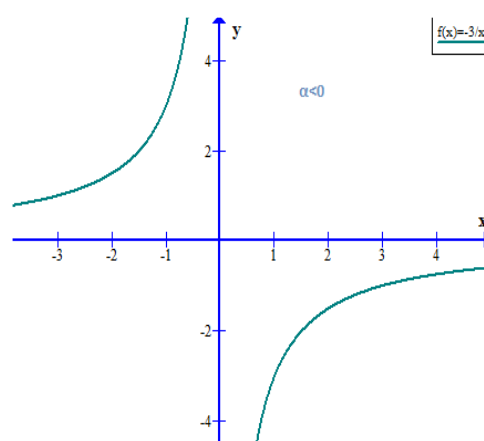
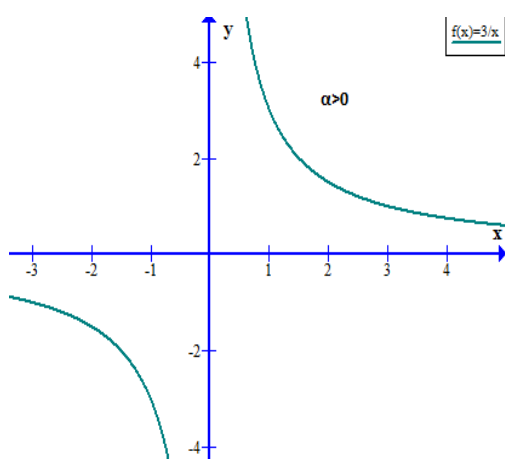


Βασικές γραφικές παραστάσεις

i) $f(x) = \alpha x^3$



ii) Η $f(x) = \frac{a}{x}$

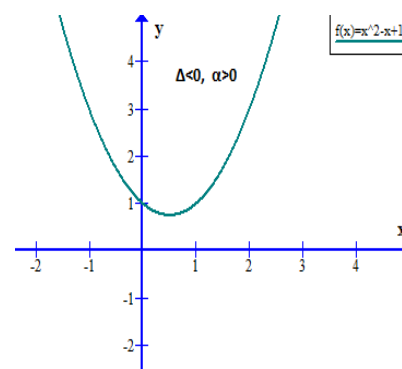
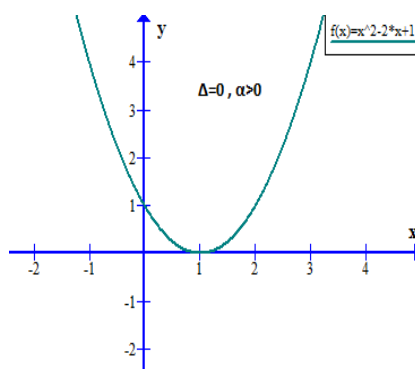
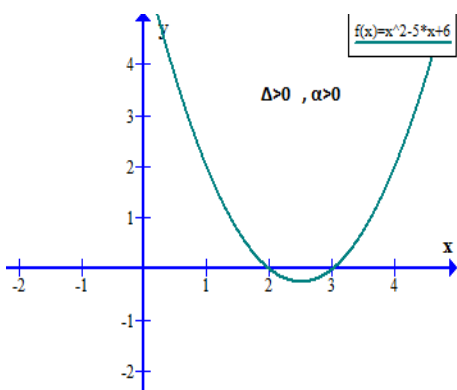


iii) Η $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha > 0$

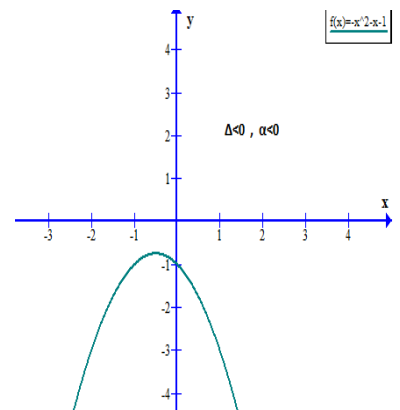
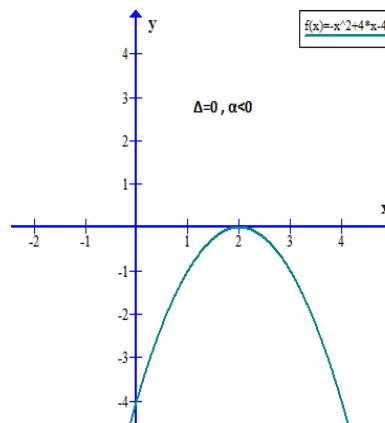
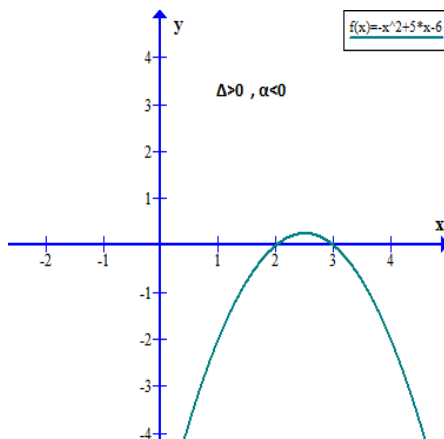
παριστάνει μια παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και

κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$

$\alpha > 0$



iv) Η $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha < 0$ παριστάνει μια παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$



Ασκήσεις στην μελέτη συναρτήσεων

1. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις: $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -4x + 5$,
 $h(x) = \sqrt{x - 2}$
2. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις: $f(x) = 2x^3 + 4x + 5$, $g(x) = -x^3 - 2x + 1$
3. Να βρείτε το λ ώστε η συνάρτηση $f(x) = (9 - \lambda^2)x + 2$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
4. Έστω συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετηθούν ως προς

τη μονοτονία οι συναρτήσεις: $g(x) = -f(x)$, $h(x) = (f(x))^2 + 3$, $B(x) = \frac{1}{f(x)}$

5. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = 4x^4 + 2x^2 - 1, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 9}, \quad h(x) = x^2 + 2|x| + 3$$

$$A(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2 - 9}, \quad B(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}, \quad F(x) = \frac{x - 2}{x^4 - 1}, \quad G(x) = \frac{x + 2}{x}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{4 - |x|}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- β) Να δείξετε ότι είναι άρτια
- γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής A, B της f με τους άξονες
- δ) Να υπολογίσετε την απόσταση (AB)

7. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{|x + 2| + |x - 2|}{|x + 2| - |x - 2|}$$

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- B. Να δείξετε ότι είναι περιττή
- Γ. Να απαλείψετε τα απόλυτα και να απλοποιήσετε τον τύπο της

8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -2|x-1| + 3$$

- A) Να γράψετε το τύπο της f χωρίς το απόλυτο.
 Β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 Γ) Να βρείτε με τη βοήθεια της μονοτονίας τα ακρότατα της f .
 Δ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f .

9. Να γίνει μελέτη και γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$f(x) = x|x| \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ -2x^2, & x > 0 \end{cases}$$

10. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, g(x) = -x^2 + 6x + 7, h(x) = 2x^2 + 4x - 3, \varphi(x) = -3x^2 - 18x + 8$$

11. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις και να χαράξετε τις γραφικές τους παραστάσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

12. Δίνεται η παραβολή: $f(x) = x^2 - 5x + (\lambda - 1)$ η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = 2, x_2 = 3$.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ και στη συνέχεια τον τύπο του τριωνύμου.
 β) Να αναλύσετε το τριώνυμο σε γινόμενο παραγόντων
 γ) Να βρείτε: i) Τα διαστήματα μονοτονίας της f .
 ii) Τις συνεταγμένες της κορυφής.
 iii) Το είδος του ακρότατου.
 i) Τον άξονα συμμετρίας.

13. Δίνεται η παραβολή:

$$f(x) = 2x^2 - (\mu + 1)x + 2\mu$$

- α) Αν η γραφική παράσταση της παραβολής περνά από το σημείο $A(1, 3)$ να προσδιορίσετε το μ .
 β) Για τη τιμή του μ που βρήκατε να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .
 γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατα της f .

Ασκήσεις στις Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση: με $f(-3)=6$.

- a) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- b) Να βρεθεί το α . $f(x) = x^2 - x + \alpha$
- c) Να εξετασθεί αν το $y=0$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

2. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 - 2x + 1$

- a) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- b) Να βρεθούν οι αριθμοί $f(0)$, $f(2)$ και $f(-3)$
- c) Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό α
- d) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x με $f(x)=4$

3. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{x-3} + \frac{x+2}{x-5}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να βρεθεί ο αριθμός $f(-4)$

4. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός $f(-2)$

γ) Για ποιες τιμές του x η τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 2;

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{8}{|x-2|+1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να βρείτε τους αριθμούς $f(-5)$, $f(-1)$

γ) Ανήκει το $y=4$ στο σύνολο τιμών της f ;

6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \sqrt{|x-1|-7} \quad ii) g(x) = \sqrt{|1-2x|-9} \quad iii) h(x) = \frac{x+2}{|x-1|+3} \quad iv) v(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}+1}$$

7. Για μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών ισχύει ότι

$$f(x-1) = x^2 - 2x + 3$$

- a) Να βρείτε τον τύπο της f
- b) Να βρείτε τον αριθμό $f(-3)$

8. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ \frac{16}{x^2}, & x > 2 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- β) Να βρείτε τους αριθμούς f(0), f(-1) και f(4)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=4.

9. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{\alpha x + 10}{x^2 + 4}$$

της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο A(-2,1)

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
- β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.
- γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία B(3,1) και Γ(-1,9)

10. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων με τους άξονες χ'χ και γ'γ

$$i) f(x) = x^2 - 4 \quad ii) g(x) = x^2 - 3x - 10 \quad iii) h(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \quad iv) \phi(x) = \sqrt{x - 2}$$

11. Δίνονται τα σημεία A(1,1) , B(3,4), Γ(-2,3). Να αποδείξετε ότι:

- α) AB=ΑΓ
- β) Το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

12. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 3}$$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- β) Να εξετάσεις αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(-2,4) και B(-4,18)
- γ) Να βρείτε το σημείο που η f τέμνει τον άξονα γ'γ
- δ) Να βρείτε το σημείο που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον χ'χ.

13. Να βρείτε την γωνία που σχηματίζουν οι παρακάτω ευθείες με τον άξονα χ'χ

$$i) y = 2 + x \quad ii) y = 1 - x \quad iii) y = \sqrt{3}x + 5 \quad iv) y = 4 - \sqrt{3}x$$

14. Μια ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία A(-3,-3) και B(2,2) , να εξετάσετε αν η ευθεία διέρχεται από το σημείο M(2007,2007).

15. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\alpha x+2$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,-1)$

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f

16. α) Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

β) Αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει μια γωνία ϕ να αποδείξετε ότι $\phi=90$.

17. Δίνονται τα σημεία $A(2,-3)$, $B(-2,1)$ και $\Gamma(-3,4)$

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB

β) Να βρείτε την γωνία που σχηματίζει η ευθεία AB με τον άξονα $x'x$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από το Γ και είναι παράλληλη με την ευθεία AB .

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3+\alpha x$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $K(-2,5)$

α) Να βρείτε την τιμή του α

β) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $\epsilon: y=f(x)$

γ) Να βρείτε την γωνία ω που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$

δ) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f

ε) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

19. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες : $\epsilon : y = \lambda^2 x + 4$ $\eta : y = (\lambda + 2)x - 5$

α) Να βρείτε τις τιμές του λ

β) Για την μικρότερη τιμή του λ που βρήκατε στο α) να σχεδιάσετε τις ϵ και η , να βρείτε τα σημεία στα οποία αυτές τέμνουν τους άξονες , καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες με τον άξονα $x'x$.

γ) Για $\lambda=2$ και $\lambda=-1$ προκύπτουν 4 ευθείες οι οποίες τεμνόμενες σχηματίζουν ένα τετράπλευρο. Τι είδους τετράπλευρο είναι αυτό και ποιες είναι οι συντεταγμένες των

κορυφών του;

20. Να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

$$f(x) = |x+1| + |x-2| + x - 3$$

$$f(x) = |1-x| - |2-x| + x$$

21. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \alpha x + \beta y = 5$ η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-3, -4)$

- i) Να βρείτε τις τιμές των α και β
- ii) β) Να σχεδιάσετε την ε
- iii) Να εξετάσετε αν η ε διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-1, -3)$ και $\Delta(-5, -4)$
- iv) Σε ποια σημεία η ε τέμνει τους άξονες ;
- v) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ε
- vi) Να βρείτε τον λ ώστε η $\eta: 2x + \lambda y = 8 \parallel \varepsilon$
- vii) Σε ποιο σημείο η ε τέμνει την $\zeta: 2x + 3y = -4$;

22. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως μονότονες και να βρεθεί το είδος μονοτονίας τους

$$i) f(x) = 2 - 3x \quad ii) g(x) = \sqrt{2x-2} + 3 \quad iii) h(x) = \sqrt{5-\sqrt{4-x}} \quad iv) \phi(x) = -x^3$$

23. Μια συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ να λύσετε την ανίσωση:

$$f(3x-2) > f(8-2x)$$

24. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

$$i) f(x) = 2 + x^2 \quad ii) g(x) = 5 - x^4 \quad iii) h(x) = 1 - (x-3)^2 \quad iv) \phi(x) = |x-2| + 4$$

25. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων

$$i) f(x) = 2x^2 \quad ii) g(x) = -x^2 \quad iii) h(x) = -\frac{2}{x} \quad iv) \phi(x) = \frac{3}{x}$$

26. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x}, & x < -1 \text{ ή } x > 1 \end{cases}$$

- a) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;
- b) Να βρεθούν οι αριθμοί $f(0), f(1), f(-1), f(2)$
- c) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f
- d) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f
- e) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια η περιττή
- f) Έχει η γραφική παράσταση της f ασύμπτωτες ; αν ναι , ποιες είναι αυτές;

g) Να βρείτε τα ακρότατα της f

27. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της:

Και στη συνέχεια :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \leq -1 \\ -x^2, & x \in (-1, 1) \\ -\frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή
- b) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f
- c) Να βρείτε τα ακρότατα της f
- d) Να αποδείξετε ότι $-1 \leq f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

28. Να αποδείξεις ότι από τις παρακάτω συναρτήσεις η f είναι άρτια και η g περιττή Όπου:

$$f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}, \quad g(x) = \frac{2-|x-1|}{2+|x+1|} - \frac{2-|x+1|}{2+|x-1|}$$

29. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη με $f(1)=3$ και $f(3)=1$ να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2) > 3$$

30. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|}$$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να εξετάσετε αν είναι άρτια ή περιττή
- iii. Να βρεθούν οι συμμετρίες της f
- iv. Να απλοποιήσετε την f
- v. Να χαράξετε τη γραφική της παράσταση
- vi. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της
- vii. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

31. Να μελετήσεις ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 2x + 3, g(x) = -x^2 + 6x + 7, h(x) = 2x^2 + 4x - 3, \phi(x) = -3x^2 - 18x + 8$$

32. Να μελετήσεις τις παρακάτω συναρτήσεις και να χαράξεις τις γραφικές τους

$$\text{παραστάσεις} \quad f(x) = x^2 - 4x + 3, g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

33. Να βρείτε τα κοινά σημεία της παραβολής

$$y = x^2 + 2x + 3 \quad \text{και της ευθείας με εξίσωση } y = x + 5.$$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της f με τους άξονες $\chi'\chi$ και $\gamma'\gamma$
- γ) Να απλοποιηθεί η f
- δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση
- ε) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$

35. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{x^2-1} \quad ii) f(x) = \sqrt{x^2-x} + \sqrt{6-x-x^2}$$

36. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2-4} + \sqrt{12-x-x^2}$

37. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=(1-3\alpha-\alpha^2)\chi+4-\alpha$ και $\varepsilon_2: y=(\alpha+5)\chi+4\alpha-1$ είναι παράλληλες

i) Να βρείτε τον αριθμό α

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_2 με τους άξονες

iii) Αν το σημείο $M(\mu, \mu-5)$ ανήκει στην ευθεία ε_2 και N είναι το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $\chi'\chi$ να βρείτε α) τον πραγματικό αριθμό μ

β) την απόσταση των σημείων M και N

38. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=(\lambda-1)\chi+2-3\lambda$ και $\varepsilon_2: y=\frac{\lambda-5}{4}\chi + 2(\lambda+1)$ είναι κάθετες

Να βρείτε

α) τον αριθμό λ

β) για το λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να βρείτε το κοινό σημείο των ε_1 και ε_2

39. Δίνονται τα σημεία : $A(2\lambda-1, 4\lambda+2\mu)$ και $B(5-\lambda, \mu+1)$ τα οποία είναι συμμετρικά ως προς τον $\chi'\chi$

α) Να βρείτε τους αριθμούς λ και μ

β) Η ευθεία $\varepsilon: y=\alpha\chi-4$ διέρχεται από το σημείο A

i) Να βρείτε τον αριθμό α

ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες

iii) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε

40. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2, & \text{αν } x \leq 2 \\ \beta x + 5, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(3,2)$

- i) Να βρείτε τους αριθμούς α και β
- ii) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f
- iii) Να βρείτε τα ακρότατα της f

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha x+2$ για την οποία ισχύει $f(-1)=f(4)$

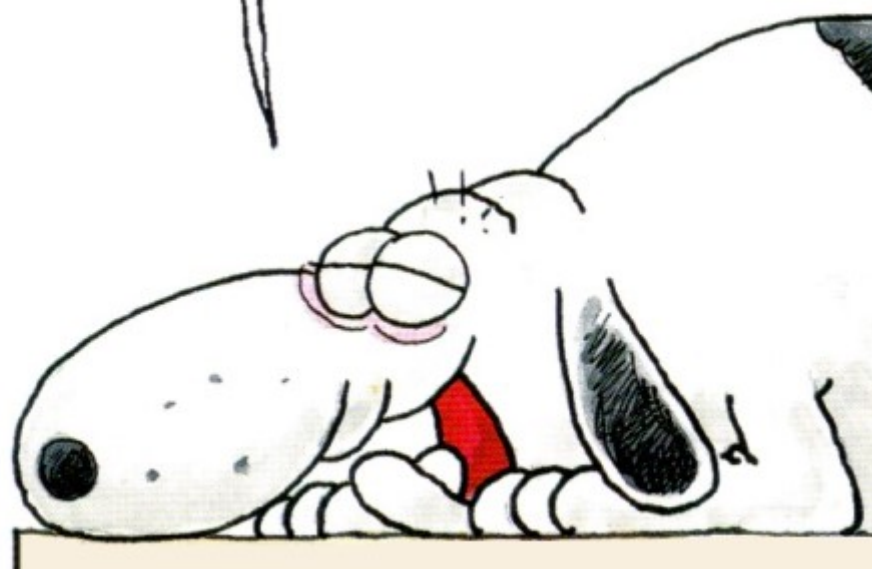
- i) Να βρείτε την τιμή του α
- ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον x'
- iv) Έστω M, N τα σημεία της C_f με τετμημένες -2 και 3 αντίστοιχα και ε η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία M, N .
 - α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των M, N
 - β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε
 - γ) καθώς και το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ε με τους άξονες

42. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x+a} + \sqrt{|x+2|-7}$ Διέρχεται από το σημείο $M(6,4)$

- i) Να βρείτε τον αριθμό α
- ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες
- iv) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{1}{f(5) \cdot f(7)}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρανομαστή

**Επαναληπτικές
Ασκήσεις &
επιλεγμένα θέματα
τράπεζας θεμάτων**

...ΟΤΑΝ ΕΙΣΑΙ ΝΕΟΣ ΘΕΛΕΙΣ ΝΑ
ΕΙΣΑΙ ΚΑΛΟΣ ΣΤΙΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΤΑΝ ΓΕΡΑΣΕΙΣ ΘΕΛΕΙΣ ΝΑ
ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΟΥ ΚΑΛΕΣ!



© Αρκάς

Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου

1. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$

α) να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει 2 ρίζες x_1, x_2 άνισες.

β) να βρείτε το λ ώστε να ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 \geq 4$

γ) Αν $\lambda = 2$ να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(2011)

2. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x - a, & x < 0 \\ -3x + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$

και τα σημεία $A(-2, 0)$ και $B(1, 1)$ τα οποία ανήκουν στην C_f .

α) Να βρεθούν οι αριθμοί a, β .

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $A = f(-3) + f(0) + f(2)$.

γ) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

δ) να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

(2011)

3. Έστω η εξίσωση $x^2 - x + \mu - 1 = 0$

α) να βρεθούν οι τιμές του μ ώστε η εξίσωση να έχει 2 ρίζες άνισες.

β) να βρεθεί η τιμή του μ ώστε η εξίσωση να έχει 1 ρίζα διπλή.

γ) αν $\mu = 5/4$, να λυθεί η εξίσωση.

(2006)

4. Δίνεται η παράσταση $K = \frac{x^2 - 9}{|x| - 3}$

α) για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση K

β) να απλοποιηθεί η παράσταση K

γ) να λυθεί η ανίσωση $K > 3$

(2006)

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = ax^2 + \beta\sqrt{x-1}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(5, 27)$ να βρείτε τους αριθμούς a και β .

γ) Για $a = 1$ και $\beta = 1$ να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και ναδειχθεί ότι έχει ελάχιστο το οποίο και να βρεθεί.

(2006)

6. Δίνονται οι ευθείες (ϵ): $y = 3x$ και (η): $y = (\lambda + 1)x + 1$.

α) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

β) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το σημείο $A(1, 2)$ ανήκει στην (η)

γ) Να βρεθεί το σημείο τομής των 2 ευθειών ως προς λ .

7. α) Να σχηματίσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$

β) Να δείξετε ότι $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 3$

γ) Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{-x} \cdot (x^2 - 2x - 1) = 0$

δ) Αν $|x-1| = |x+\sqrt{2}|$ να δειχθεί ότι $-\frac{1}{4} < x < 0$

8. Δίνεται η συνάρτηση: $\varphi(x) = x - 2 + 3\sqrt{x^2 - 4x + 4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού.

β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της φ .

γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της φ .

δ) Να βρεθούν οι τιμές $\varphi(-2007)$, $\varphi(1+\sqrt{2})$

ε) Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{2\varphi(x)}{x-2} \geq 8x-1$, $x < 2$

(2007)

9. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$

α) να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$

β) να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει 1 διπλή ρίζα.

γ) να βρείτε το λ ώστε για τις ρίζες x_1 , x_2 να ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 \geq 2$

δ) να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες.

(2007)

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1 + \sqrt{x-1}$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) να δειχτεί ότι $f(2) + f(5) = 20 + f(1)$

γ) να βρείτε το λ ώστε οι παρακάτω ευθείες να είναι παράλληλες

$\varepsilon_1 : y = (\lambda^2 + f(2)) \cdot x + 3$, $\varepsilon_2 : y = (3\lambda^2 - f(1)) \cdot x$

(2010)

11. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 2(1 + |\lambda|) \cdot x - 4$, $\varepsilon_2 : y = (\lambda^2 + 3) \cdot x - 3$

α) αν οι ευθείες είναι παράλληλες να βρεθεί το λ .

β) αν $\lambda=1$ να βρεθούν τα σημεία τομής των ευθειών με τους άξονες.

(2012)

12. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = (\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 4)x + 1$

α) Αν $\lambda \in (2, 10)$ να εξετάσετε αν η f έχει ρίζες.

β) Αν ισχύει $2(x_1 + x_2) = 5x_1 x_2$, να βρεθεί το λ .

(2012)

13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x|}}{x-1}$, $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

α) Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να λυθεί η εξίσωση $f^2(x) = g(x)$.

γ) Να βρεθεί το διάστημα του x , όπου η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(2012)

14. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$, $\varepsilon_2 : y = (2\lambda + 3) \cdot x - 4$

α) να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

β) για το λ που βρήκατε, η ε_1 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο A και η ε_2 τον άξονα $x'x$ στο B.

Να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B.

γ) να βρείτε την απόσταση AB.

δ) να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ε_2 να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. (2009)

15. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \lambda x + 5 - \lambda^2 = 0$

α) αν η παραπάνω εξίσωση έχει 2 ρίζες ίσες, να υπολογίσετε το λ και έπειτα να λύσετε την εξίσωση για το λ που βρήκατε.

β) να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει 2 άνισες ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει

$$(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) = 6$$

γ) αν $f(x) = x^2 + \lambda x + 5 - \lambda^2$, να βρείτε το λ ώστε η C_f να μην τέμνει τον άξονα $x'x$.

(2009)

16. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = \frac{\lambda}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$, $\varepsilon_2 : y = (2\lambda + 3) \cdot x + 4$

α) να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

β) για το λ που βρήκατε, η ε_1 και η ε_2 τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα A και B αντίστοιχα.

Να βρείτε τις συντεταγμένες των A και B. Να βρείτε την απόσταση AB.

γ) να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ε_2 να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. (2010)

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + 2)(x - 1)$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

β) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$f(x) = (\lambda + 1) \cdot x^2 + 3x - \lambda$$

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 2|f(0)| - 6$

δ) i) Αν $a > 1$ να αποδείξετε ότι $f(a) + \frac{1}{f(a)} \geq 2$

ii) Για ποια τιμή του a ισχύει $f(a) + \frac{1}{f(a)} = 2$ (2010)

18. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 2)x + 2\lambda = 0$ (1)

α) να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ της εξίσωσης.

β) να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει 2 ρίζες άνισες.

γ) να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης x_1, x_2

δ) να λυθεί η ανίσωση: $|x_1 + x_2| > 5$ (2011)

19. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και να απλοποιηθεί ο τύπος της.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

γ) να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq \frac{1}{x}$

(2011)

Επαναληπτικές Ασκήσεις στην Άλγεβρα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

1. Ρίχνω ένα νόμισμα δύο φορές να βρείτε :
 - a. Τον δειγματικό χώρο του πειράματος
 - b. Τα ενδεχόμενα :
 - A: Να φέρω κορώνα στην πρώτη ρίψη
 - B: Να φέρω κορώνα στην δεύτερη ρίψη
 - Γ: Να φέρω κορώνα σε μια μόνο ρίψη
2. Μία μέρα με άσχημες καιρικές συνθήκες η πιθανότητα να λειτουργήσουν τα υπεραστικά λεωφορεία είναι 30% , η πιθανότητα να μην λειτουργήσουν τα τρένα είναι 40% η πιθανότητα να λειτουργήσει ένα τουλάχιστον συγκοινωνιακό μέσο είναι 90% . Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσουν συγχρόνως .
3. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει : $P(A) = \frac{17}{30}$,
 $P(B) = \frac{7}{15}$ και $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ να βρεθεί η πιθανότητα $P(A \cap B)$
4. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει : $P(A) = \frac{1}{2}$,
 $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ να βρεθεί η πιθανότητα $P(B)$
5. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει : $P(A) = \frac{1}{2}$,
 $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ να βρεθεί η πιθανότητα $P(A \cup B)$
6. Έστω A και B δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα :
 - να μην πραγματοποιηθεί το A είναι $\frac{2}{3}$
 - να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα A και B είναι $\frac{1}{6}$
 - να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα A και B είναι $\frac{11}{12}$να βρείτε την πιθανότητα :
 - i) να πραγματοποιηθεί το A
 - ii) να μην πραγματοποιηθεί το B
 - iii) να πραγματοποιηθεί το B αλλά όχι το A
 - iv) να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα A και B
 - v) να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα A και B
 - vi) να πραγματοποιηθεί ένα ακριβώς από τα A και B

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

7. Αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι να αποδείξετε ότι :

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$$

8. Για κάθε α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

9. α) αν $\alpha > 0$ τότε ισχύει ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$

β) αν $\alpha < 0$ τότε ισχύει ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

10. αν ισχύουν $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ και $\frac{3}{4} < y < \frac{5}{2}$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις α) $2x+4y$ β) $6x-8y$ γ) $\frac{5x}{y}$ δ) $4x^2 + \frac{15}{y}$

11. δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει

$$(\alpha - 1)^2 + (\beta + 3)^2 = 2(2\alpha + \beta) - 3$$

α) να βρείτε τους αριθμούς α και β

β) για $\alpha=3$ και $\beta=-2$ να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\alpha(x^2 - y^2) + 2xy \geq \beta(x + 2y)^2$$

12. να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις :

$$\text{i) } 2x^3 - 8x \quad \text{ii) } x^2 - 4xy + 4y^2 - 9 \quad \text{iii) } x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

13. i) να αποδειχθεί ότι $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

ii) να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$K = \left(\frac{3456}{2561} + \frac{2561}{3456} \right)^2 - \left(\frac{3456}{2561} - \frac{2561}{3456} \right)^2$$

14. Αν $2 < x < 5$ και $1 < y < 4$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις : $A = 2x - 3y + 4$ και $B = x + y^2 - 1$

15. Αν οι αριθμοί α και β είναι ανάλογοι των αριθμών 3 και 5 να βρεις τις τιμές των παραστάσεων : $A = \frac{2\alpha - 4\beta}{\alpha + \beta}$ και $B = \frac{\alpha - \beta}{2\alpha - 6\beta}$

16. Α) να βρεις τις τιμές των x και y έτσι ώστε

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y \leq -25$$

Β) i) αν $x, y > 0$ να αποδείξετε ότι: $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$

ii) αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha + \beta = 1$ να αποδείξετε ότι $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \geq 9$

17. Αν $1 \leq \alpha \leq 2$ και $-2 \leq \beta \leq -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις

$$i) A = \alpha + \beta \quad ii) B = 2\alpha - 3\beta \quad iii) \Gamma = \frac{\alpha}{\beta} - 2$$

18. α) Αν $3 < \chi < 5$ να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \sqrt{\chi^2 - 4\chi + 4} + \sqrt{\chi^2 - 10\chi + 25}$

β) Αν $2 < \alpha < 8$ να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η παράσταση

$$B = 5|\alpha - 1| - 3|\alpha - 9| + 4|\alpha + 2| + 5|10 - \alpha|$$

19. α) Να βρεθούν οι αριθμοί α και β αν $(\alpha - 5)^2 + (\beta - 3)^2 = 0$

β) Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο πρώτο ερώτημα, να βρείτε ππου συναληθεύουν οι ανισώσεις: $|\chi - 1| < \alpha$ και $|\chi - 1| > \beta$

γ) Αν A είναι το σύνολο των αριθμών χ για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις του δεύτερου ερωτήματος, να βρείτε το σύνολο $A \cap Z$, όπου Z το σύνολο των ακέραιων αριθμών

20. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\chi + 1)^2 - (\chi - 1)^2 = 4\chi$

ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\chi \cdot \frac{(\chi + 1)^2 - (\chi - 1)^2}{4} = 4$$

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ (ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ)

21. Δίνεται το τριώνυμο $\chi^2 - (\lambda + 2)\chi + 2\lambda = 0$

i. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $\Delta > 0$

iii. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει $|\chi_1 + \chi_2| > 5$

22. Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 + (\lambda - 1)\chi - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (\lambda + 1)^2$

ii. Να βρείτε τις ρίζες χ_1, χ_2 της παραπάνω εξίσωσης

iii. Αν η απόσταση των ριζών χ_1, χ_2 πάνω στον άξονα είναι ίση με 3 μονάδες να βρείτε τις δυνατές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

23. α) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$i) |3\chi + 1| = |\chi - 2| \quad ii) \frac{2}{\chi} + \frac{2\chi - 3}{\chi - 2} + \frac{2 - \chi^2}{\chi^2 - 2\chi} = 0$$

β) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$i) 1 \leq |x - 2| \leq 3 \quad ii) x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

1. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + x - k^2 = 0$ (1)

- i. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες και άνισες για κάθε πραγματική τιμή του k
- ii. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) να βρείτε το k ώστε $x_1(k + x_2) + kx_2 > -6$
- iii. Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού της οποίας ρίζες να είναι οι αριθμοί $\rho_1 = x_1 + 1, \rho_2 = x_2 + 1$

2. Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $(x - 1)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 1) < 0$ ii) $\frac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x^2-4x+3)} \leq 0$

3. α) Να λυθεί η εξίσωση :

$$\frac{5|x| + 1}{3} - \frac{4|x| + 3}{3} = \frac{5|x| + 4}{6} - 2$$

β) Να λυθεί η ανίσωση :

$$\frac{2|x - 2| - 6}{4} - \frac{2 + |2 - x|}{3} < 1 - 3|x - 2|$$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x + 3)^2 - 5|x + 3| - 14 = 0$

ii) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$

iii) $\frac{2(x + 1)}{x - 2} + \frac{5}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x + 2}{x - 3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

24. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να απλοποιηθεί ο τύπος της f
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες .
- iv. Να δείξετε ότι: $f(x) \geq \frac{1}{x}$

25. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)^2}{(x + 2)x + 1}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 2$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της .
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $|f(x)| < 2$
- iv. Να αποδείξετε ότι :

$$[f(\alpha)]^2 + [f(\beta)]^2 \geq 8(\alpha + \beta) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \neq -1$$

Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β ισχύει το ίσον στην παραπάνω ανισότητα.

26. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 + 3x}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 3$
- ii. Να μετατρέψετε την παράσταση

$$A = \frac{f(10)}{f(6) - \sqrt{f(5)}}$$

Σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή

- iii. Να λυθεί η εξίσωση $|f(1) \cdot x + 1| = |2 + f(2) \cdot x|$
- iv. Να λυθεί η ανίσωση

$$[f(2)]^{2012} \cdot x^2 + \sqrt[3]{f(30)} \cdot x - 10 \leq 0$$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \lambda x - \alpha, & x < 0 \\ -3x + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$ και τα σημεία της $A(-2,0)$, $B(1,1)$

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -4$ και $\beta = 4$ και να βρείτε τον τύπο της
- ii. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία
- iii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = f(-3) + f(0) + f(2)$
- iv. Να βρείτε σε ποια σημεία η f τέμνει την $y=1$
- v. Να φτιάξετε τη γραφική παράσταση της f

28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$ (1)

- ii. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η (1) να έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες
- iii. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) και $x_1^2 + x_2^2 \geq 4$ να βρείτε τις τιμές του λ
- iv. Για $\lambda=2$
 - a. Να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda$
 - b. Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία
 - c. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x - 1| - 4} + \sqrt{3 - |2x + 7|}$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της
- ii. Να βρεθεί το α ώστε η f να διέρχεται από το σημείο $M(-4, \alpha - \sqrt{2})$

70. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^2 - \lambda x + 6}{x^2 - 6x + 9}$$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

- ii. Αν η f διέρχεται από το σημείο $M\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$ να βρείτε την τιμή του λ
- iii. Αν $\lambda=5$ να αποδείξετε ότι η $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$
- iv. Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον $\chi' \chi$.

71. Έστω η συνάρτηση $f(x) = |x^2 - 4| + |x - 2|$

- i. Να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- ii. Αν A το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $\chi' \chi$ να βρεις την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το A και έχει κλίση 4.
- iii. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ , ώστε η ευθεία (ε) να είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $y = (\mu^2 - 5\mu + 10)\chi - 1$

72. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - \kappa x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$

- i. Αν $f(2)=-2$ να βρεθεί η τιμή του κ
- ii. Αν $\kappa=5$ να βρεθούν :
 - a. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και g
 - b. Οι τιμές του χ για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ψηλότερα από τη
 - c. γραφική παράσταση της g
 - d. Η τιμή της παράστασης $f(2 - \sqrt{2}) - g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

73. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1: y = (2\lambda - 1)\chi + \kappa$ $\varepsilon_2: y = 5\chi + 6$

Αν η ευθεία ε_1 διέρχεται από το σημείο $A(1,4)$ να βρείτε :

- i. Τα κ και λ
- ii. Τα σημεία τομής της ε_1 με τους άξονες
- iii. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει η ε_1 με τον άξονα $\chi' \chi$
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^2 - (5\kappa - 1)\chi + 2\lambda - \mu^2 = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες $\forall \mu \in \mathbb{R}$

74. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{1-|1-2x|}}{x}$, να βρείτε :

- a. Το πεδίο ορισμού A , καθώς και τις τιμές $f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$
- b. Σε ποια σημεία η C_f τέμνει τους άξονες;
- c. Την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην $y=5x-1$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, f\left(\frac{1}{2}\right))$.

Ενδεικτικές Ασκήσεις από την τράπεζα Θεμάτων

1. Ένα κουτί περιέχει άσπρες μαύρες κόκκινες και πράσινες μπάλες . Οι άσπρες είναι 5 , οι μαύρες είναι 9 ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη .

Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα :

A: Η μπάλα που επιλέγουμε είναι άσπρη

K: Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη

Π: Η μπάλα που επιλέγουμε είναι Πράσινη

- a) Χρησιμοποιώντας τα A, K , Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα :

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη

- b) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (a)

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες :

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(A - B) = \frac{5}{8} \text{ και } P(B) = \frac{1}{4}$$

- a) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$

- b) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο A ή B

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του παραπάνω ενδεχομένου

3. Δίνεται ο πίνακας :

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

A: Ο διψήφιος να είναι άρτιος

B: Ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3

Γ: Ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

4. Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και τα υποσύνολά του $A = \{1,2,4,5\}$ και $B = \{2,4,6\}$
- Να παραστήσετε στο διάγραμμα Venn με βασικό σύνολο το Ω τα σύνολα A και B , κατόπιν να προσδιορίσετε τα σύνολα $A \cup B$, $A \cap B$, A' , B'
 - Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
 - Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A
 - Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B
 - Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B
5. Ένα λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α' τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' Τάξης είναι 20%. Να βρείτε:
- Το πλήθος των μαθητών της Γ' τάξης
 - Το πλήθος των μαθητών της Β' τάξης
 - Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β' τάξης
6. Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δύο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και δύο γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους
- Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης
 - Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

Α: Να διαγωνιστεί ο Κώστας ή ο Μιχάλης

Β: Να διαγωνιστεί η Ζωή

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης
7. (Δ) Σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά. Τέλος η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο Γλώσσες είναι 0,9.
- Επιλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη.
 - Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;
 - Ποια η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες

b) Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά , πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

8. a) Να αποδείξεις ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

b) Να βρείτε τους αριθμούς x και y ώστε : $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

9. α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι $|\alpha| + \left| \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$

10. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$ να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή κάθε μίας από τις παρακάτω παραστάσεις

a) $x + y$

b) $2x - 3y$

c) $\frac{x}{y}$

11. Δίνονται οι αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι :

$$\alpha) \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \quad \beta) \left(\alpha + \frac{4}{\alpha} \right) \left(\beta + \frac{4}{\beta} \right) \geq 16$$

12. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση $|x+1| < 2$

a) Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

b) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x

13. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά , αντίστοιχα . Αν για τα μήκη x, y ισχύει ότι : $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

a) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου

b) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί , να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμου

14. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$

b) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

15. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 5x - 1$

a) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1 και x_2

b) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

c) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$

16. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν : $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$

a) Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -15$

b) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α και β και να τους βρείτε

17. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$ (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 1 να βρείτε το λ

b) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1)

18. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$

a) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες

b) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 , να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να ισχύει $x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$

19. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0, \lambda \neq -2$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες :

a) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

b) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης να είναι ίσο με 2

20. a) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$P = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

Έχει νόημα πραγματικού αριθμού

b) για τις τιμές του x που βρήκατε στο α ερώτημα να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

21. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Να βρείτε την διακρίνουσα της εξίσωσης

b) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

c) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$$

22. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1, \lambda \in \mathbb{R}$

a) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα :

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

- b) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, την οποία και να βρείτε
- c) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; να αιτιολογήσετε την απάντησή σας
23. a) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$
- b) να βρείτε τις κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων
24. a) Να λύσετε την εξίσωση :
- $$\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$$
- b) Να λύσετε την ανίσωση $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$
- c) Να εξετάσετε αν οι λύσεις του a ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του b ερωτήματος
25. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) των θετικών περιττών αριθμών 1,3,5,7,....
- a) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της
- b) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους
26. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$
- a) Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$
- b) Να βρείτε πόσους πρώτους όρους πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77 ($\sqrt{1849} = 43$)
27. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει 10 σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει a καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7^η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300
- a) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- b) Πόσα καθίσματα έχει η κάθε σειρά;
28. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_n) με θετικό λόγο λ , ισχύει $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$
- a) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της
- b) Να αποδείξετε ότι ο $n^{\text{ος}}$ όρος της προόδου $\alpha_n = 2^{n-3}$
29. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος για την οποία ισχύει $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$
- a) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$

- b) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33 , να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου

30. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$

- a) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega=3$
 b) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152

31. Δίνεται αριθμητική πρόοδος α_n με διαφορά ω

- a) Να δείξετε ότι :

$$\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$$

- b) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου

32. Οι αριθμοί $k-2$, $2k$ και $7k+4$, $k \in \mathbb{N}$ είναι με τη σειρά που δίνονται , διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_n)

- a) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε τον λόγο της προόδου λ
 b) i) Να εκφράσετε το 2^ο όρο , τον 5^ο όρο και τον 4^ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1
 ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$

33. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 , & x < 0 \\ x - 1 , & x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$
 b) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 0$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

- a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
 b) Να δείξετε ότι $f(2) + f(4) = 0$

35. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

- a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
 b) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$, να ανήκει στη γραφική παράσταση της f

36. a) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 + 2x + 3$

- b) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}$$

Και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της

c) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση

37. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 8-x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

a) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$

b) Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού x , ώστε $f(x)=9$

38. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$$

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που

ανήκουν στο πεδίο ορισμού της ισχύει $f(x) = x^2 + 4x$

b) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(0)=5$ και $f(1)=3$

a) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=5$

b) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x' και y'

c) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

a) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$

b) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$

41. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x, x \in \mathbb{R}$

a) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε

b) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$, να αποδείξετε ότι A, B είναι συμμετρικά ως το O

42. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$$

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f

b) Να αποδείξετε ότι $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in A$

c) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$

43. Δίνεται η συνάρτηση g με

$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x + 1}$$

Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$

- a) Να δείξετε ότι $\mu = -6$
- b) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- c) Για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης

44. Οι διαστάσεις του πατώματος (σε m) του εργαστηρίου πληροφορικής ενός σχολείου είναι $x+1$ και x , με $x > 0$

- a) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος
- b) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι $90m^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του.

45. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$$

- a) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος
- b) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$
- c) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$

46. (Δ) Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα η εταιρεία A χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο : $y = 60 + 0,20x$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό χρέωσης σε ευρώ

- a) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας A , ο οποίος σε μια ημέρα ταξίδεψε 400 km;
- b) Πόσα km οδήγησε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ
- c) Μια άλλη εταιρεία B , χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0,10x$
Όπου όπως προηγουμένως x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε
- d) Αν $f(x) = 60 + 0,20x$ και $g(x) = 80 + 0,10x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών A και B αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε

τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος (c)

47. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^\circ$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια ώστε $x+y=10$

a) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x), x \in (0,10)$

b) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$

c) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$; Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ;

48. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 2$ και $g(x) = x + 1, x \in \mathbb{R}$

a) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε

b) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + a$ να δείξετε ότι :

i) Αν $a > 1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν δύο κοινά σημεία

ii) Αν $a < 1$ τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κοινά σημεία

49. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - a = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$

a) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$

b) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$

c) Να βρεθούν οι τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$

50. Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει toner για φωτοτυπικά μηχανήματα. Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ. το κόστος γεμίσματος ενός toner είναι 15 ευρώ η δε τιμή πώλησης του ενός toner είναι 25 ευρώ.

a) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης αν γεμίζει v toner το μήνα

b) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v αριθμού toner το μήνα

c) Να βρείτε πόσα toner πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση :

i) Να μην έχει ζημιά

ii) Να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ

Ασκήσεις της τράπεζας θεμάτων



Τράπεζα Θεμάτων Α' Λυκείου

474

1. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) των θετικών περιττών αριθμών:

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η (α_n) είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της.

Μονάδες 15

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των n πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.

Μονάδες 10

477

2. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 7

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 9

478

3. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0 \quad (1), \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1).

Μονάδες 13

480

4. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει a καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η 7η σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων

του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 12

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά;

Μονάδες 13

481

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2.$$

Μονάδες 9

483

6. α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$

Μονάδες 12

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + 3 = 0$.

Μονάδες 13

484

7. α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$.

Μονάδες 16

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α).

Μονάδες 9

485

8. Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

Μονάδες 8

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

486

9. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$

Μονάδες 13

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

Μονάδες 12

487

10. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

Μονάδες 13

488

11. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A .

Μονάδες 5

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 5x + 3$

Μονάδες 10

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$.

Μονάδες 10

489

12. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5| < 2$

Μονάδες 8

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x| > 5$.

Μονάδες 8

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Μονάδες 9

490

13. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

Μονάδες 5

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης:

$$2x^2 - 3x + 1 < 0$$

Μονάδες 10

491

14. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$3x - 1 < x + 9 \quad \text{και} \quad 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}.$$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 15

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων.

Μονάδες 10

492

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x - 15, x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1) + f(0) - f(1)$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

Μονάδες 15

493

16. α) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = \sqrt{3}$

Μονάδες 10

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

Μονάδες 15

495

17. Σε γεωμετρική πρόοδο (α_v) με θετικό λόγο λ , ισχύει:

$$\alpha_3 = 1 \text{ και } \alpha_5 = 4.$$

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

Μονάδες 13

β) Να αποδείξετε ότι ο v -οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_v = 2^{v-3}$

Μονάδες 12

496

18. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

Μονάδες 8

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$

Μονάδες 9

497

19. Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

A : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

B : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

Μονάδες 15

498

20. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3} - \frac{|x+1|+4}{5} = \frac{2}{3}$.

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος.

Μονάδες 7

499

21. Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

A: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

B: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $B - A$ iv) A'

Μονάδες 12

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου.

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

Μονάδες 13

503

22. α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x - \frac{1}{2}\right| < 4$.

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 5| \geq 3$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος.

Μονάδες 7

504

23. α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$

Μονάδες 15

β) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$

Μονάδες 10

505

24. α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 4| = 3|x - 1|$

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x - 5| > 1$

Μονάδες 9

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

506

25. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

Μονάδες 5

β) $2x - 3y$

Μονάδες 10

γ) $\frac{x}{y}$

Μονάδες 10

507

26. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ , να γράψετε τρεις εξισώσεις.

Μονάδες 6

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

Μονάδες 10

508

27. α) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραιών $1, 2, 3, \dots, n$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45.

Μονάδες 13

509

28. α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι:

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \geq 2$$

Μονάδες 15

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

510

29. Δίνεται η συνάρτηση f , με: $f(x) = \begin{cases} 2x-5, & x \leq 3 \\ x^2, & 3 < x < 10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 8

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

Μονάδες 8

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$.

Μονάδες 9

936

30. Δίνεται η παράσταση:

$$A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1})(\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 13

938

31. α) Να δείξετε ότι: $3 < \sqrt[3]{30} < 4$.

Μονάδες 12

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$

Μονάδες 13

944

32. Δίνεται η παράσταση: $A = \sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$

Μονάδες 12

947

33. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}.$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 12

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$

Μονάδες 13

950

34. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β) Αν $x=-3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$

Μονάδες 12

952

35. Δίνεται η παράσταση:

$$B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι:

$$B^2 + 6B = B^4$$

Μονάδες 12

36. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$.

Μονάδες 13

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$$

Μονάδες 12

37. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση:

$$|x+1| < 2,$$

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

Μονάδες 12

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$$

είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

Μονάδες 13

38. Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x-1| + |y-3|$$

με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει:

$$1 < x < 4 \text{ και } 2 < y < 3.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

Μονάδες 12

β) $0 < A < 4$.

Μονάδες 13

39. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$x^2 - 5x + 6.$$

Μονάδες 12

β) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}.$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης.

Μονάδες 5

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

Μονάδες 8

1003

40. Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

K: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α. Χρησιμοποιώντας τα Α, Κ και Π να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i. Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii. Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη.

Μονάδες 13

β. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α).

Μονάδες 12

1005

41. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{1+x}{x-1} \text{ και } B = \frac{2}{x^2-x},$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A, B πρέπει: $x \neq 1$ και $x \neq 0$

Μονάδες 12

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$A = B.$$

Μονάδες 13

1007

42. α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης:

$$-2x^2 + 10x = 12$$

Μονάδες 15

β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$$

Μονάδες 10

1009

43. Δίνεται η παράσταση:

$$A = |3x - 6| + 2,$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$, $A = 3x - 4$

ii. για κάθε $x < 2$, $A = 8 - 3x$.

Μονάδες 12

β. Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$$

Μονάδες 13

1015

44. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_v) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι ο n -οστός όρος της προόδου είναι ίσος με

$a_n = 2n - 4$, $n \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

Μονάδες 15

1024

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 6), B(-1, 4)$ να βρείτε τις τιμές των α, β .

Μονάδες 13

β. Αν $\alpha = 1$ και $\beta = 5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 12

1032

46. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί:

$$x, 2x + 1, 5x + 4,$$

με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε το λόγο λ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) $x = 1$

ii) $x = -1$

Μονάδες 12

1039

47. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \geq 5$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β).

Μονάδες 8

1042

48. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $f(-1) = f(3)$

Μονάδες 13

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε: $f(x) = 0$

Μονάδες 12

1050

49. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί

$$x+2, (x+1)^2, 3x+2$$

με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x = 1$

ii) $x = -1$.

Μονάδες 12

1055

50. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

Μονάδες 12

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

1057

51. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της n -οστής σειράς.

Μονάδες 9

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

Μονάδες 8

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

Μονάδες 8

1062

52. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει :

$$|y - 3| < 1.$$

Μονάδες 12

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

$$1 < x < 3 \text{ και } 2 < y < 4,$$

τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

Μονάδες 13

1064

53. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_v) για την οποία ισχύει ότι:

$$\alpha_1 = 19 \text{ και } \alpha_{10} - \alpha_6 = 24.$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τον α_{20} .

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

Μονάδες 8

1067

54. Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}.$$

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$2x^2 - 3x - 2.$$

Μονάδες 10

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

Μονάδες 8

1070

55. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta - \beta \cdot \gamma}$$

Μονάδες 15

1074

56. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει :

$$|y - 3| < 1.$$

Μονάδες 12

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με

$$1 < x < 3 \text{ και } 2 < y < 4,$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$6 < \Pi < 14,$$

όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

Μονάδες 13

1077

57. α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$|x - 5| < 4.$$

Μονάδες 10

β) Αν κάποιος αριθμός α επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{9} < \frac{1}{\alpha} < 1$.

Μονάδες 15

1080

58. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y} = -2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y = 2x$

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$

Μονάδες 13

1082

59. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 15

β) Να δείξετε ότι:

$$f(2) + f(4) = 0.$$

Μονάδες 10

1086

60. Οι αριθμοί $A = 1$, $B = x + 4$, $\Gamma = x + 8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n) .

α) Να βρείτε τη τιμή του x .

Μονάδες 10

β) Αν $x = 1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_n) ,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω .

Μονάδες 7

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 8

1088

61. α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

Μονάδες 9

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x .

Μονάδες 9

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x , 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 7

1089

62. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Μονάδες 10

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|x - 10|}{x - 10}$$

Μονάδες 15

1090

63. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α , ώστε το σημείο $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 12

1091

64. Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 1| - |x - 2|$$

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$

Μονάδες 13

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

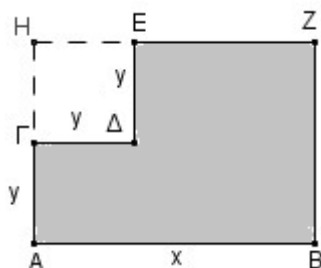
Μονάδες 12

1092

65. Από το ορθογώνιο $ABZH$ αφαιρέθηκε το τετράγωνο $\Gamma Δ Ε Η$ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος $EZBAΓΔ$ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$

Μονάδες 10



β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Μονάδες 15

1093

66. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$ και $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A + B = \frac{1}{2}$

Μονάδες 8

ii) $A \cdot B = \frac{1}{20}$

Μονάδες 8

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.

Μονάδες 9

1096

67. Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μια πόλη A, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση: $y = 35 + 0,8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη A μετά από 25 λεπτά;

Μονάδες 12

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη A;

Μονάδες 13

1097

68. Δίνεται το τριώνυμο

$$\lambda x^2 + \lambda x - 5, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ .

Μονάδες 12

β) Για $\lambda = 3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Μονάδες 13

1100

69. Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - \beta x + \beta^2 = 0 \quad (1)$, με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$.

Μονάδες 12

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1\beta, x_2$ με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 13

1101

70. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - \beta x + (\beta^2 - 4) = 0, \quad (1)$$

με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$

Μονάδες 12

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 13

1102

71. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες:

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(A - B) = \frac{5}{8} \text{ και } P(B) = \frac{1}{4}$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A \cap B)$

Μονάδες 9

β) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: « A ή B ».

Μονάδες 7

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου.

Μονάδες 9

1273

72. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4.$$

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

Μονάδες 12

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

Μονάδες 13

1275

73. Δίνεται το τριώνυμο: $2x^2 + 5x - 1$

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2

Μονάδες 6

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$x_1 + x_2, \quad x_1 \cdot x_2 \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

Μονάδες 9

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

$$\frac{1}{x_1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{x_2}.$$

Μονάδες 10

1276

74. Δίνεται η παράσταση:

$$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}.$$

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 12

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 13

1277

75. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$-x^2 + 5x - 6 < 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad x^2 - 16 \leq 0 \quad (2).$$

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2).

Μονάδες 12

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

Μονάδες 13

1278

76. Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει:

$$d(x, -2) < 1.$$

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$

Μονάδες 10

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$.

Μονάδες 15

1281

77. Δίνεται το τριώνυμο

$$-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:

$$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$$

Μονάδες 12

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

Μονάδες 13

1282

78. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$3x^2 - 2x - 1.$$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση:

$$A(x) = \frac{x-1}{3x^2-2x-1}$$

και στη συνέχεια να την απλοποιήσετε.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$|A(x)| = 1$$

Μονάδες 8

1283

79. α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$x^2 + 2x - 3$$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.

Μονάδες 9

γ) Να παραστήσετε γραφικά την παραπάνω συνάρτηση.

Μονάδες 8

1287

80. Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα.

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

A: ο διψήφιος να είναι άρτιος

Μονάδες 7

B: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

1288

81. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 10x + 21 < 0$

Μονάδες 12

β) Δίνεται η παράσταση:

$$A = |x - 3| + |x^2 - 10x + 21|$$

i) Για $3 < x < 7$, να δείξετε ότι:

$$A = -x^2 + 11 - 24$$

Μονάδες 8

ii) Να βρείτε τις τιμές του $x \in (3, 7)$, για τις οποίες ισχύει $A = 6$

Μονάδες 5

1293

82. Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200.$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου που βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

1297

83. α) Να λύσετε την ανίσωση:

$$3x^2 - 4x + 1 \leq 0.$$

Μονάδες 12

β) Αν α, β δυο αριθμοί που είναι λύσεις της παραπάνω ανίσωσης, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha + \beta}{9}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης.

Μονάδες 13

1298

84. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 2 \text{ και } \alpha \beta + \alpha \beta^2 = -30$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha \beta = -15.$$

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

1300

85. Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = (\sqrt{2})^6, B = (\sqrt[3]{3})^6, \Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A + B + \Gamma = 23.$$

Μονάδες 13

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$\sqrt[3]{3} \text{ και } \sqrt[6]{6}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

1301

86. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) για την οποία ισχύει:

$$\alpha_4 - \alpha_2 = 10$$

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

Μονάδες 12

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο της προόδου.

Μονάδες 13

1302

87. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \begin{cases} 8-x, & x < 0 \\ 2x+5, & x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5) = f(4)$.

Μονάδες 13

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ώστε $f(x) = 9$.

Μονάδες 12

1305**88. α)** Να λύσετε την ανίσωση $|x + 4| \geq 3$.

Μονάδες 12

β) Αν $\alpha \geq -1$, να γράψετε την παράσταση $A = ||\alpha + 4| - 3|$ χωρίς απόλυτες τιμές. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Μονάδες 13

1506**89.** Δίνεται το σύνολο $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και τα υποσύνολά του

$$A = \{1, 2, 4, 5\} \text{ και } B = \{2, 4, 6\}.$$

α) Να παραστήσετε στο ίδιο διάγραμμα Venn, με βασικό σύνολο το Ω , τα σύνολα A και B.

Κατόπιν, να προσδιορίσετε τα σύνολα

$$A \cup B, A \cap B, A' \text{ και } B'.$$

Μονάδες 13

β) Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A.

Μονάδες 4

ii) Να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα A και B.

Μονάδες 4

iii) Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B.

Μονάδες 4

1509**90.** Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$$

με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.**α)** Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ .

Μονάδες 13

β) Για $\lambda = 1$ να λύσετε την εξίσωση (1)

Μονάδες 12

1512**91. α)** Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$

Μονάδες 8

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 12

γ) Να τοποθετήσετε το $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι το $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

1513**92.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n) με $a_1 = 1$ και $a_3 = 9$.**α)** Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο n , ώστε να ισχύει $a_n > 30$.

Μονάδες 13

1520**93.** Από τους σπουδαστές ενός Ωδείου, το 50% μαθαίνει πιάνο, το 40% μαθαίνει κιθάρα, ενώ το 10% των σπουδαστών μαθαίνει και τα δύο αυτά όργανα. Επιλέγουμε τυχαία ένα σπουδαστή του Ωδείου.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει πιάνο**B:** ο σπουδαστής αυτός μαθαίνει κιθάρα

Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου:

α) Ο σπουδαστής αυτός να μαθαίνει ένα τουλάχιστον από τα δύο παραπάνω όργανα.

Μονάδες 12

β) Ο σπουδαστής αυτός να μην μαθαίνει κανένα από τα δύο παραπάνω όργανα.

Μονάδες 13

1529

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 5$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x' και y' .

Μονάδες 7

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 8

1532

95. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει

$$f(x) = x^2 + 4x.$$

Μονάδες 15

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει

$$f(x) = 32.$$

Μονάδες 10

1533

96. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + \lambda - 2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2 , να προσδιορίσετε το λ ώστε να ισχύει:

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$$

Μονάδες 15

1537

97. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$.

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \frac{5}{2}$.

Μονάδες 15

1541

98. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα.

Αν για τα μήκη x και y ισχύει:

$$4 \leq x \leq 7 \text{ και } 2 \leq y \leq 3$$

τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μονάδες 10

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Μονάδες 15

1542

99. α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = x^3 - x^2 + 3x - 3$$

Μονάδες 13

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ και } g(x) = x^2 - x + 3$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$

Μονάδες 12

1544

100. α) Να αποδείξετε ότι

$$x^2 + 4x + 5 > 0,$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .

Μονάδες 10

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

Μονάδες 15

1553

101. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = x^3 \text{ και } g(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται σε τρία σημεία τα οποία και να βρείτε.

Μονάδες 13

β) Αν A, O, B είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραφικών παραστάσεων, όπου $O(0,0)$,

να αποδείξετε ότι

A, B είναι συμμετρικά ως προς το O .

Μονάδες 12

2212

102. Δίνεται η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \frac{2x^2 - 6|x|}{2|x| - 6}$$

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

β) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = |x|,$$

για κάθε $x \in A$

Μονάδες 10

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

Μονάδες 5

103. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = |2x - 4| \quad \text{και} \quad B = |x - 3|$$

όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \leq x < 3$ να αποδείξετε ότι $A+B = x - 1$.

Μονάδες 16

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

3378

104. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 6

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1		1	2	
y			-1			-3

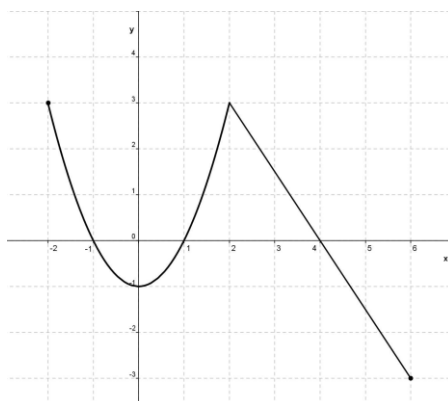
Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

Μονάδες 6

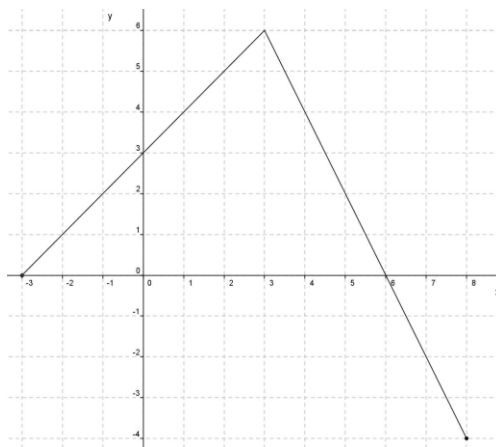
δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα του πεδίου ορισμού στα οποία η συνάρτηση παίρνει αρνητικές τιμές.

Μονάδες 7



3379

105.



Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 6

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

Μονάδες 6

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

Μονάδες 7

3380

106. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 13

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (α). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

3381

107. Δίνεται η συνάρτηση g , με $g(x) = \frac{2x^2 - 4x + \mu}{x+1}$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(1, -4)$,

α) να δείξετε ότι $\mu = -6$.

Μονάδες 9

β) να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 9

γ) για $\mu = -6$ να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης.

Μονάδες 7

3382

108. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 4$.

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x + A| = 1$.

Μονάδες 13

3383

109. Το 70% των κατοίκων μιας πόλης έχει αυτοκίνητο, το 40% έχει μηχανάκι και το 20% έχει και αυτοκίνητο και μηχανάκι. Επιλέγουμε τυχαία έναν κάτοικο αυτής της πόλης. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο κάτοικος να έχει αυτοκίνητο

M: ο κάτοικος να έχει μηχανάκι.

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup M$ ii) $M - A$ iii) M'

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο κάτοικος που επιλέχθηκε:

i) Να μην έχει μηχανάκι.

Μονάδες 7

ii) Να μην έχει ούτε μηχανάκι ούτε αυτοκίνητο.

Μονάδες 9

3384

110. Από τους 180 μαθητές ενός λυκείου, 20 μαθητές συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, 30 μαθητές συμμετέχουν στην ομάδα στίβου, ενώ 10 μαθητές συμμετέχουν και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή του λυκείου. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

B: ο μαθητής συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $B - A$ iii) A'

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέχθηκε:

i) Να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

Μονάδες 9

ii) Να συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου.

Μονάδες 7

3828

111. Οι αριθμοί

$$k-2, 2k \text{ και } 7k+4, k \in \mathbb{N}$$

είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (αν).

α) Να αποδείξετε ότι $k=4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

Μονάδες 12

β) i) Να εκφράσετε το 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1 .

Μονάδες 6

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

Μονάδες 7

3839

112. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2 .

Μονάδες 12

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

Μονάδες 13

3847

113. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \neq -2.$$

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 13

β) το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

Μονάδες 12

3852

114. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν:

$$2 \leq \alpha \leq 4 \quad \text{και} \quad -4 \leq \beta \leq -3$$

Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$

Μονάδες 12

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

Μονάδες 13

3857

115. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\beta = 4 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β , και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

3863

116. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha + \beta = 1 \quad \text{και} \quad \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 = -12$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -12$.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α , β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

3870

117. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 \quad \text{και} \quad \Lambda = 2\alpha(3 - \beta), \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι:

$$K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$$

Μονάδες 3

β) Να δείξετε ότι: $K \leq \Lambda$, για κάθε τιμή των α , β .

Μονάδες 10

γ) Για ποιες τιμές των α , β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 12

3874

118. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α , β , με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\alpha^{22} \cdot (\beta^3)^8}{\alpha^{-2} \cdot (\alpha\beta)^{25}}$$

Μονάδες 12

3878

119. Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α' τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ' τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

α) Το πλήθος των μαθητών της Γ' τάξης

Μονάδες 10

β) Το πλήθος των μαθητών της Β' τάξης.

Μονάδες 5

γ) Την πιθανότητα ο μαθητής που επιλέξαμε να είναι της Β' τάξης.

Μονάδες 10

3884

120. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$d(2x, 3) = 3 - 2x$$

α) Να αποδείξετε ότι: $x \leq \frac{3}{2}$.

Μονάδες 12

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$K = |2x - 3| - 2|3 - x|$$

είναι ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 13

4288

121. α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x , οι αριθμοί

$$x+4, 2-x, 6-x$$

με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 13

β) Αν $x = 5$ και ο $6 - x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρική προόδου, να βρείτε

i) το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

Μονάδες 6

ii) τον πρώτο όρο a_1 της προόδου.

Μονάδες 6

4290

122. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει:

$$|x - 2| < 3$$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$

Μονάδες 12

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$

Μονάδες 13

4295

123. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει:

$$|y-2| < 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$

Μονάδες 12

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1|+|y-3|}{2}$

Μονάδες 13

4299

124. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν:

$$3 \leq x \leq 5 \text{ και } -2 \leq y \leq -1,$$

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$

Μονάδες 12

β) $x^2 + y^2$

Μονάδες 13

4300

125. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

Μονάδες 12

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

Μονάδες 13

4301

126. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_n) με διαφορά ω .

α) Να δείξετε ότι:
$$\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$$

Μονάδες 13

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

Μονάδες 12

4302

127. Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha + 3)x = \alpha^2 - 9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$

Μονάδες 5

ii) όταν $\alpha = -3$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε τις τιμές του α , για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

Μονάδες 12

4303

128. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) ισχύουν: $\alpha_4 - \alpha_9 = 15$ και $\alpha_1 = 41$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3 .

Μονάδες 12

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο n , ώστε $\alpha_n = n$.

Μονάδες 13

4304

129. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει:

$$\alpha_6 + \alpha_{11} = 40.$$

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

Μονάδες 12

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 13

4305

130. α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x - 3| \leq 5$

Μονάδες 9

ii) $|2x - 3| \square 1$

Μονάδες 9

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες 7

4306

131. α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2x^2 - x - 6 = 0 \quad (1)$$

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$|x - 1| < 2 \quad (2)$$

Μονάδες 9

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

Μονάδες 7

4308

132. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 10

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0$$

Μονάδες 15

4309

133. Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20\text{cm}$ και εμβαδόν $E = 24\text{cm}^2$.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

Μονάδες 15

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Μονάδες 10

4310

134. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β , τέτοιοι ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \text{ και } \alpha^2 + \beta^2 = 272.$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2,$$

να δείξετε ότι:

$$\alpha\beta = -64.$$

Μονάδες 8

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

Μονάδες 10

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

Μονάδες 7

4311

135. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(x-2)^2} \text{ και } B = \sqrt[3]{(2-x)^3},$$

όπου x πραγματικός αριθμός

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;

Μονάδες 7

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;

Μονάδες 8

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A=B$.

Μονάδες 10

4312

136. Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω .

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega=4$.

Μονάδες 12

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

Μονάδες 13

4313

137. Δίνονται οι αριθμοί:

$$A = \frac{1}{3-\sqrt{7}} \quad B = \frac{1}{3+\sqrt{7}}$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A+B=3 \quad \text{και} \quad A \cdot B = \frac{1}{2}$$

Μονάδες 12

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A , B .

Μονάδες 13

4314

138. Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$

Μονάδες 15

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A , B .

Μονάδες 10

4315

139. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_v) , για την οποία ισχύει

$$\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$$

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 3$.

Μονάδες 10

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 .

Μονάδες 15

4316

140. Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

Μονάδες 13

4317

141. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \neq -2$.

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 12

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε

$$x_1 \cdot x_2 = -3$$

Μονάδες 13

4318

142. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x - 1| < 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $0 < x < 1$

Μονάδες 15

β. Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$1, x, x^2$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

4319

143. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε πόσους αρχικούς (πρώτους) όρους πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

Μονάδες 13

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

7518

144. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - kx - 2$, με $k \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $\Delta \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

Μονάδες 13

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1),

i. Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1, ρ_2 , όπου

$$\rho_1 = 2x_1 \text{ και } \rho_2 = 2x_2.$$

Μονάδες 12

7519

145. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4\alpha$

Μονάδες 12

β. $(\alpha + \frac{4}{\alpha})(\beta + \frac{4}{\beta}) \geq 16$

Μονάδες 13

7520

146. Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β .

Μονάδες 12

β. Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

Μονάδες 13

7521

147. α. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1-2x| < 5$ και

Μονάδες 9

ii. $|1-2x| \geq 1$

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες 7

8173

148. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις): $\sqrt{2} \cong 1,41$ $\sqrt{3} \cong 1,73$ $\sqrt{5} \cong 2,24$ $\sqrt{7} \cong 2,64$

α. Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$

Μονάδες 12

β. Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

Μονάδες 13

1. Σε ένα τμήμα της Α' Λυκείου κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα Αγγλικών και κάποιοι Γαλλικών.

Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί Γαλλικά είναι 0,8.

Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί Αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί Γαλλικά.

Τέλος, η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί μαθήματα τουλάχιστον μιας από τις δύο γλώσσες είναι 0,9.

α. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη.

i. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;

Μονάδες 9

ii. Ποια είναι η πιθανότητα αυτός να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;

Μονάδες 9

β. Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο Αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

Μονάδες 7

1874

2. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda + 5 = 0 \quad (1), \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

Μονάδες 7

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 10

γ. Αν η εξίσωση (1) έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 και $d(x_1, x_2)$ είναι η απόσταση των x_1, x_2 στον άξονα των πραγματικών αριθμών, να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{24}$$

Μονάδες 8

1880

3. Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

Μονάδες 7

γ. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x' και y' αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα A και B .

Μονάδες 8

1890

4. Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda + 2)x^2 + (2\lambda + 3)x + \lambda - 2 = 0 \quad (1), \text{ με παράμετρο } \lambda \neq -2.$$

α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta = 12\lambda + 25$$

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \neq -2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 7

γ. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$.

Μονάδες 4

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση :

$$(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$$

Μονάδες 8

1936

5. Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα

δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάσθηκαν 100 μαθητές.

Στο πρώτο θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές.

Στο δεύτερο θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά 30 μαθητές.

Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα.

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

i) Να απάντησε σωστά μόνο στο δεύτερο θέμα.

ii) Να βαθμολογηθεί με άριστα.

iii) Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

iv) Να πέρασε την εξέταση.

Μονάδες 12

1955

6. Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A , t_B , t_Γ και t_Δ , για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B$$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \text{ και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|.$$

α) i) Να δείξετε ότι: $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$.

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 10

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει:

$$t_A + t_B = 6 \text{ και } t_A \cdot t_B = 8$$

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A

και t_B

Μονάδες 5

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

Μονάδες 5

1963

7. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 \text{ και } g(x) = \lambda x + (1 - \lambda), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \lambda \text{ παράμετρος με } \lambda \neq 0.$$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Μονάδες 8

β) Για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

Μονάδες 8

γ) Αν $\lambda \neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g , να βρεθεί η παράμετρος λ ώστε να ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 = |x_1 + x_2| + 2.$$

Μονάδες 9

2046

8. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες.

Μονάδες 5

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

ι) Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι:

$$f(x) = 30 - \frac{3}{4}x$$

Μονάδες 7

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β(i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

Μονάδες 4

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες 9

2047

9. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε το n -οστό όρο αυτής της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

Μονάδες 6

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη;

Μονάδες 6

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη Α συλλέγει το μέλι, από μία κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει πάλι πίσω στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη;

Μονάδες 6

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

Μονάδες 7

2052

10. Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση

$$K(x) = 12,5x + 120$$

και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση

$$E(x) = 15,5x.$$

α) Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης;

Μονάδες 6

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)

Μονάδες 6

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

2055

11. Δίνεται η εξίσωση:

$$(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0, (1) \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}$$

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή:

$$\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$$

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 7

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

Μονάδες 6

2064

12. Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

α) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας των συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχθηκε:

i) να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι.

Μονάδες 6

ii) να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι.

Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχθηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι.

Μονάδες 13

2073

13. Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν μ' ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε πρώτο και τέταρτο ψηφίο το 2 . Το δεύτερο ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το τρίτο ψηφίο του ήταν 4 ή 7.

α) Με χρήση δένδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου.

Μονάδες 13

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

A: Το τρίτο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

B: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το δεύτερο ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

Μονάδες 12

2080

14. Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί.

Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: ο μαθητής πίνει γάλα

B: ο μαθητής τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι,

α) Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

ii) ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει δυο φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

iii) ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα.

Μονάδες 12

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του α) ερωτήματος.

Μονάδες 13

2081

15. Δίνεται η εξίσωση

$$\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0, (1) \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

β) Έστω $\lambda \neq 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

Μονάδες 10

ii. Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει

$$|x_1 - x_2| > 1.$$

Μονάδες 10

2083

16. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε την χωρητικότητα του σταδίου.

Μονάδες 5

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

Μονάδες 10

2084

17. Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου A με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου B με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d , το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου A και κάθε πλακάκι τύπου B.

Μονάδες 6

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου A είτε με 128 τύπου B, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

Μονάδες 12

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

Μονάδες 7

2220

18. Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$$

α) Να βρείτε τις τιμές $h(0)$, $h(1)$ και $h(2)$, και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

Μονάδες 8

γ) Να δείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t) = 5 \left[1,21 - (t-1)^2 \right]$$

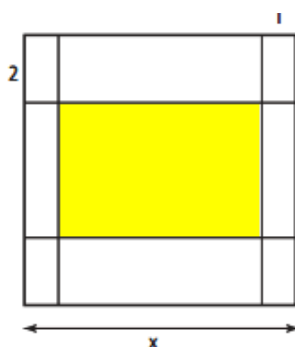
Μονάδες 5

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,05m.

Μονάδες 6

2226

19. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = (x-2)(x-4)$$

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 .

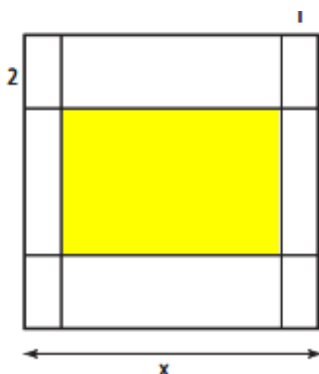
Μονάδες 7

γ) Να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 .

Μονάδες 10

2229

20. Για την τύπωση επαγγελματικής κάρτας επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x \text{ cm}$ ($5 \leq x \leq 10$), στο οποίο η περιοχή τύπωσης περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά (όπως στο σχήμα).



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = x^2 - 6x + 8$$

Μονάδες 8

β) Να βρεθεί το η τιμή του x ώστε το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 24 cm^2 .

Μονάδες 7

γ) Αν το εμβαδόν της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων είναι το πολύ 35 cm^2 , να βρεθούν οι τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου.

Μονάδες 10

2234

21. Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις **Π1** και **Π2**:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

Μονάδες 8

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν ($^{\circ}\text{K}$) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) είναι η:

$$\text{K} = \frac{\text{F} - 32}{1,8} + 273$$

Μονάδες 7

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278°K μέχρι 283°K . Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε $^{\circ}\text{F}$.

Μονάδες 10

2238

22. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ , οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2, 4)$.

Μονάδες 13

2244

23. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|x - 2| < 3 \text{ και } x^2 - 2x - 8 \leq 0.$$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 4]$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Μονάδες 10

2255

24. Δίνονται οι ανισώσεις:

$$2 \leq |x| \leq 3 \text{ και } x^2 - 4x < 0.$$

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

Μονάδες 10

2273

25. Δίνονται οι ανισώσεις $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

Μονάδες 10

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

Μονάδες 5

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$

Μονάδες 10

2287

26. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση:

$$d(x, 5) \leq 9.$$

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

Μονάδες 5

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x .

Μονάδες 5

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

Μονάδες 10

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x + 4| + |x - 14| = 18$$

Μονάδες 5

2301

27. Δίνονται τα σημεία A , B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2 , 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x + 2|$

Μονάδες 4

ii) $|x - 7|$

Μονάδες 4

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος:

$$|x + 2| + |x - 7|$$

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = |x + 2| + |x - 7|$$

γεωμετρικά.

Μονάδες 5

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Μονάδες 7

28. Σε έναν άξονα τα σημεία A, B και M αντιστοιχούν στους αριθμούς

5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων

$$|x - 5| \text{ και } |x - 9|.$$

Μονάδες 10

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$,

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου M αναγνωρίζετε;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο M. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Μονάδες 8

29. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 4x + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - 9$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3,0)$ και $(-3,0)$.

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο του άξονα $x'x$ που η τετμημένη του να ικανοποιεί τη σχέση $f(x) = g(x)$.

Μονάδες 8

δ) Να βρείτε συνάρτηση h που η γραφική της παράσταση να είναι ευθεία και να τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε σημείο του άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

30. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

Μονάδες 7

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

Μονάδες 7

2332

31. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 2 - \lambda^2 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

Μονάδες 10

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S = x_1 + x_2$.

ii) Να βρείτε το $P = x_1 \cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

Μονάδες 5

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 + \sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2 - \sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ .

Μονάδες 10

2336

32. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 5x + 6$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

β) Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{4}x^2 + (2 - \lambda)x + \lambda - 2 = 0$ (1) με παράμετρο λ .

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ρίζες της (1) είναι ομόσημοι αριθμοί.

Μονάδες 5

2338

33. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \alpha x - \alpha + 2 \text{ και } g(x) = x^2 - \alpha + 3 \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

Μονάδες 7

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 4

ii) Για την τιμή του α που βρήκατε υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

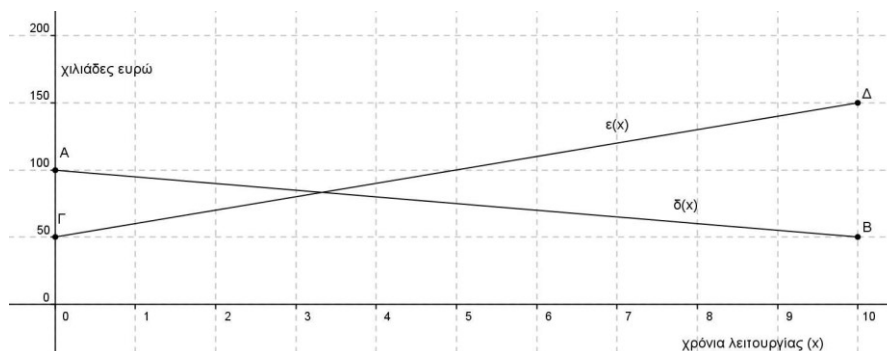
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν δύο σημεία τομής.

Μονάδες 10

2339

34. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων το ευθύγραμμο τμήμα AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\epsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της. Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τα έξοδα τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

Μονάδες 4

β) i) Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

Μονάδες 15

ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των τμημάτων AB και ΓΔ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

Μονάδες 6

2340

35. Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα A πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 1 ευρώ, το 2^ο μήνα 2 ευρώ, τον 3^ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα B πρέπει να καταθέσει τον 1^ο μήνα 100 ευρώ, το 2^ο μήνα 110 ευρώ, τον 3^ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) i) Να βρείτε το ποσό α_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα A.

Μονάδες 4

ii) Να βρείτε το ποσό β_n που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό το n° μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα B.

Μονάδες 4

iii) Να βρείτε το ποσό A_n που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από n μήνες σύμφωνα με το

πρόγραμμα Α.

Μονάδες 5

iv) Να βρείτε το ποσό B_v που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από v μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

Μονάδες 5

β) i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

Μονάδες 3

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

Μονάδες 4

4542

36. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 < x$

στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

Μονάδες 10

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα: $\sqrt{1+\alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$

Μονάδες 7

4545

37. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 6}{|x| - 3}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$f(x) = |x| - 2.$$

Μονάδες 9

γ) Για $x \in A$, να λύσετε την εξίσωση:

$$(f(x) + 2)^2 - 4f(x) - 5 = 0$$

Μονάδες 10

4548

38. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1)

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

Μονάδες 6

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ .

Μονάδες 9

4551

39. Δίνεται το τριώνυμο:

$$\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

Μονάδες 8

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

Μονάδες 5

γ) Αν $\lambda < 0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

ii) να αποδείξετε ότι

$$|x_1 + x_2| \leq 2x_1x_2,$$

όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

Μονάδες 6

4558

40. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda, \text{ με } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

Μονάδες 10

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Μονάδες 4

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \leq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

Μονάδες 8

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 3

4575

41. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 4x + \alpha \text{ και } g(x) = \alpha x - 5, \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2) = g(2)$, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 7

β) Για $\alpha = 1$,

i) να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = g(x)$$

Μονάδες 8

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x) \leq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση:

$$|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$$

Μονάδες 5+5=10

4607

42. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 8

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο και να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

Μονάδες 10

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$

Μονάδες 7

4629

43. Ένα μυρμήγκι περπατάει πάνω σε ένα ευθύγραμμο κλαδί μήκους 1 m, με τον ακόλουθο τρόπο:

Ξεκινάει από το ένα άκρο του κλαδιού και το 1^ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2^ο λεπτό προχωράει 3cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση κατά 2cm μεγαλύτερη από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει το μυρμήγκι κάθε λεπτό της κίνησής του, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο a_n αυτής της προόδου.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τη συνολική απόσταση που κάλυψε το μυρμήγκι τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του.

Μονάδες 4

γ) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι θα φτάσει στο άλλο άκρο του κλαδιού.

Μονάδες 4

δ) Υποθέτουμε τώρα ότι, την ίδια στιγμή που το μυρμήγκι ξεκινάει την πορεία του, από το άλλο άκρο του κλαδιού μία αράχνη ξεκινάει και αυτή προς την αντίθετη κατεύθυνση και με τον ακόλουθο τρόπο: Το 1^ο λεπτό προχωράει 1 cm, το 2^ο λεπτό προχωράει 2 cm, το 3^ο λεπτό προχωράει 4 cm και, γενικά, κάθε λεπτό διανύει απόσταση διπλάσια από αυτήν που διήνυσε το προηγούμενο λεπτό.

(i) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις που διανύει η αράχνη κάθε λεπτό της κίνησής της, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να βρείτε τον n -οστό όρο β_n αυτής της προόδου.

Μονάδες 7

(ii) Να βρείτε σε πόσα λεπτά το μυρμήγκι και η αράχνη θα βρεθούν αντιμέτωπα σε απόσταση 1 cm.

Μονάδες 5

4647

44. Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f , με

$$f(x) = (\lambda + 1)x^2 - (\lambda + 1)x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ , η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0, 2)$.

Μονάδες 3

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 4

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

Μονάδες 8

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

4654

45. α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

Μονάδες 10

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1)

με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 15

46. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

Μονάδες 10

γ) Έστω $M(x, y)$ σημείο της C_f . Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x - 1| < 3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

Μονάδες 10

47. Δίνεται η συνάρτηση f , με

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{αν } x < 0 \\ x + 2, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 3

β) i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y = 3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

Μονάδες 5

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

γ) i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α , η ευθεία $y = \alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = \alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

Μονάδες 8

48. Δίνεται η εξίσωση: $\alpha x^2 - 5x + \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha| \leq \frac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha = 2$.

Μονάδες 5

γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

Μονάδες 10