

Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

1 Περιεχόμενα

1. Συστήματα.....	7
1.1 Βασικές έννοιες συστημάτων.....	7
Ασκήσεις στα Συστήματα	9
1.2 Η μέθοδος των οριζουσών	11
Ασκήσεις στην επίλυση συστημάτων με την μέθοδο των οριζουσών.....	13
Ασκήσεις στα μη γραμμικά συστήματα	16
1.3 ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ	17
1.4 Θέματα τράπεζας θεμάτων στα Συστήματα.....	20
2. Συναρτήσεις	27
2.1 Μονοτονία συνάρτησης	27
Ασκήσεις στην μονοτονία συνάρτησης	29
2.2 Ακρότατα συνάρτησης	31
Ασκήσεις στα ακρότατα	33
Ασκήσεις στην μετατόπιση συνάρτησης	38
Γενικές Ασκήσεις στις Συναρτήσεις	38
3. Τριγωνομετρία	47
3.1 Βασικές έννοιες τριγωνομετρίας	47
Ασκήσεις στις βασικές έννοιες τριγωνομετρίας.....	49
3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες	51
Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές ταυτότητες	53
3.3 Αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο	55
Ασκήσεις στην αναγωγή στο 1° τεταρτημόριο	57
3.4 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	59
Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.....	67
3.5 Τριγωνομετρικές εξισώσεις.....	71
Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές εξισώσεις :	77
3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών	80
Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος	83
3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου τόξου	85
Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς διπλάσιου τόξου	86
3.8 Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων στην τριγωνομετρία	88
4. Πολυώνυμα.....	100
3.1 Βασικές έννοιες πολυωνύμων.....	100

Ασκήσεις στα πολυώνυμα:	102
3.2 Διαίρεση πολυωνύμων:.....	104
Ασκήσεις στη διαίρεση πολυωνύμων	109
3.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις.....	113
Ασκήσεις στις πολυωνυμικές εξισώσεις :.....	119
3.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.....	126
Ασκήσεις :.....	133
Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων στα πολυώνυμα	136
5. Εκθετική – Λογαριθμική συνάρτηση	148
5.1 Εκθετική συνάρτηση:	148
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	154
5.2 Λογάριθμοι:.....	159
Ασκήσεις στους Λογάριθμους :.....	162
5.3 Λογαριθμική Συνάρτηση	165
Ασκήσεις στην λογαριθμική συνάρτηση	171
5.4 Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων στην Εκθετική – Λογαριθμική Συνάρτηση	178
6. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στα Συστήματα	184
7. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στην Τριγωνομετρία	186
8. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στα Πολυώνυμα.....	189
9. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στις Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις.....	193
10. Ερωτήσεις Σωστού Λάθους	197

Συστήματα



Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

1. Συστήματα

1.1 Βασικές έννοιες συστημάτων

1^η μέθοδος : Η μέθοδος της αντικατάστασης

Λύνουμε την μια εξίσωση ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο

1^ο παράδειγμα :

Να λυθεί το σύστημα :
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 & (1) \\ -x + 2y = 2 & (2) \end{cases}$$

Λύση :

Λύνοντας την δεύτερη σχέση ως προς x έχουμε : $x=2y-2$

Και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε : $2(2y-2)-3y=0$ οπότε $y=4$ και $x=6$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι $(x,y)=(6,4)$

2^η μέθοδος : Η μέθοδος των αντίθετων συντελεστών (ή μέθοδος Gauss)

Πολλαπλασιάζουμε τις δύο εξισώσεις του συστήματος με κατάλληλους αριθμούς έτσι ώστε ο ίδιος άγνωστος να προκύψει με αντίθετους συντελεστές στις δύο εξισώσεις , οπότε με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε εξίσωση με έναν άγνωστο.

2^ο παράδειγμα :

Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Λύση:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - y = 4 \end{cases} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \cdot (2) \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 9y = -15 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases}$$

$$7y = -7$$

Απο την τελευταία εξίσωση παίρνουμε ότι $\frac{7y}{7} = \frac{-7}{7} \Leftrightarrow y = -1$

για $y = -1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $x = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Σε ένα γραμμικό σύστημα κάθε μια από τις εξισώσεις παριστάνει μια ευθεία

Είναι γνωστό από την γεωμετρία ότι δυο ευθείες μπορούν:

- Είτε να τέμνονται (οπότε λέμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση)
- Είτε να ταυτίζονται (οπότε λέμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις)
- Είτε να μην έχουν κανένα κοινό σημείο (πότε το σύστημα είναι αδύνατο)

Ασκήσεις στα Συστήματα

1. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα

$$i) \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + 4y = 14 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 3x + 5y = -18 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

2. Να λυθούν τα συστήματα

$$i) \begin{cases} \kappa - 2\lambda = -3 \\ 3\kappa - 2\lambda = -1 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 4\omega - 6\varphi = 5 \\ 6\omega - 9\varphi = 2 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} \alpha - 4\beta = 8 \\ \frac{\alpha}{2} - 2\beta = 4 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 4x + 15y = -3 \\ -x + 6y = 5 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 5x + 6y = 19 \\ 6x - y = -10 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} -2x + 5y = 1 \\ 6x - 15y = -2 \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2(2x - 1) + 8y = 4 \\ 3(x + 4y - 2) + 3x = 3 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 6y + 3(x - y) = -9 \\ 6x + 4(y - x) = -10 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} -6(x - 2y) - 6 = 5(x - 2y + 1) \\ 7 - 2(3x - 4y) = -(x - 6) \end{cases}$$

5. Να λυθούν τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 4(x - 1) + 6y = 2x + 10 \\ \frac{x + 1}{3} + \frac{2y + 1}{2} = \frac{19}{6} \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \frac{x + 4y - 3}{2} + \frac{7y - 6x + 9}{3} = \frac{17}{6} \\ \frac{2x + y - 6}{3} + \frac{4y - x + 4}{5} = \frac{13}{5} \end{cases}$$
$$iii) \begin{cases} \frac{4y + 3(x - 1)}{2} - \frac{7(x - y) + 6}{5} = -\frac{93}{10} \\ \frac{2(x - 3y) + 1}{3} + \frac{4[3(x - 2y) + 5]}{8} = -\frac{103}{6} \end{cases}$$

6. Να λυθούν τα συστήματα

$$i) \begin{cases} (2x + 1)^2 - y^2 + 36 = 4(x - 1)^2 - (-1 - y)^2 \\ 3x = y - 10 \end{cases}$$
$$ii) \begin{cases} 2y(1 - x) - 10 = x(4 - 2y) \\ (1 - x)^2 - y(2y + 1) = x^2 - 2(y - 1)^2 - 10 \end{cases}$$

7. Να βρείτε δύο αριθμούς που έχουν άθροισμα 25 και η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 4

8. Ένας κτηνοτρόφος έχει στο κτήμα του 50 ζώα, κότες και κατσίκια. Αν όλα τα ζώα μαζί έχουν 170 πόδια, να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κατσίκια που υπάρχουν στο κτήμα

9. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθαινε 9 χρόνια αργότερα θα βασιλεύε το μισό της ζωής του, ενώ αν πέθαινε 9 χρόνια νωρίτερα θα βασιλεύε το 1/8 της ζωής του. Πόσα χρόνια έζησε και πόσα χρόνια βασιλεύε ο Μέγας Αλέξανδρος;

10. Ένα ξενοδοχείο διαθέτει 28 δίκλινα και τρίκλινα δωμάτια στα οποία υπάρχουν 76 κρεβάτια. να βρείτε πόσα είναι τα δίκλινα και πόσα είναι τα τρίκλινα δωμάτια

11. i) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A(1,1) και B(2,4) έχει εξίσωση (ε): $y=3x-2$
- ii) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$
- iii) Αν τα σημείο στο οποίο η ευθεία (ε) τέμνει τον άξονα $y'y$ αποτελεί λύση του συστήματος

$$\begin{cases} (2a - \beta)(x + 1) + (\beta - 1)(3y - 2) = 4 \\ a(x - 1) - (2\beta + 3)(y - 1) = 5 \end{cases}$$

Να βρεθούν τα α και β

12. Δίνεται η εξίσωση :

$$3x^2 + (\mu - 5\lambda)x + 2\lambda + 5\mu + 5 = 0 \quad (1)$$

Αν το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι τριπλάσιο από το γινόμενο των ριζών και οι αριθμοί μ, λ είναι αντίθετοι , τότε :

- i) Να δείξετε ότι $\lambda=1$ και $\mu=-1$
- ii) Για τις παραπάνω τιμές των μ, λ να λύσετε την εξίσωση (1)

1.2 Η μέθοδος των οριζουσών

3^η μέθοδος: Η μέθοδος των οριζουσών

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

- Αν $D \neq 0$, έχει μοναδική λύση την $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$
- Αν $D=0$, είναι αδύνατο ή έχει άπειρο πλήθος λύσεων

Απόδειξη:

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση που $\beta \neq 0$ και $\beta' \neq 0$

Τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta} & (\varepsilon_1) \\ y = -\frac{\alpha'}{\beta'}x + \frac{\gamma'}{\beta'} & (\varepsilon_2) \end{cases}$$

Και οι εξισώσεις τους παριστάνουν ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης

$$\lambda_1 = -\frac{\alpha}{\beta} \text{ και } \lambda_2 = -\frac{\alpha'}{\beta'}$$

- Αν $-\frac{\alpha}{\beta} \neq -\frac{\alpha'}{\beta'}$, δηλαδή αν $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2

Έχουν διαφορετικούς συντελεστές διεύθυνσης, οπότε τέμνονται σε ένα σημείο του οποίου η τετμημένη προσδιορίζεται από τη λύση της εξίσωσης $-\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\gamma}{\beta} = -\frac{\alpha'}{\beta'}x + \frac{\gamma'}{\beta'} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha'}{\beta'}\right)x = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\gamma'}{\beta'} \Leftrightarrow x = \frac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\beta'\alpha - \alpha'\beta}$$

$$\text{Και η τεταγμένη } y = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\beta'\alpha - \alpha'\beta}$$

$$\text{Θέτοντας } D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \gamma'\beta \text{ και } D_y = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

Έχουμε ότι η λύση του συστήματος είναι η $(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$

- Αν $-\frac{a}{\beta} \neq -\frac{a'}{\beta'}$, δηλαδή αν $a\beta' - a'\beta \neq 0$, τότε οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν τους ίδιους συντελεστές διεύθυνσης οπότε ή είναι παράλληλες (άπειρες λύσεις) ή ταυτίζονται (αδύνατο)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1. Για να λύσω ένα γραμμικό 3X3 σύστημα λύνω την μια από τις τρεις εξισώσεις ως προς έναν άγνωστο, αντικαθιστώ στις άλλες δύο και προκύπτει ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους το οποίο λύνω κατά τα γνωστά
2. Για να λύσω ένα μη γραμμικό σύστημα χρησιμοποιώ τη μέθοδο της αντικατάστασης

Ασκήσεις στην επίλυση συστημάτων με την μέθοδο των οριζουσών

1. Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες

$$i) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \quad ii) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \quad iii) \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \quad iv) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -9 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Να λυθούν τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 6x + 3y = -1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \quad iv) \begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ 5x - 3y = 25 \end{cases}$$

3. Να λυθούν τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2(x - y) = x + 5 \\ 2(y - x) = -2(y + 5) \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \frac{x-2}{3} + \frac{y+1}{4} = 1 \\ 2(x + 2y) - y = 2(6 - x) \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα συστήματα

$$i) \begin{cases} (1 - \sqrt{2})x - y = 3 \\ x + (1 + \sqrt{2})y = 1 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} (1 + \sqrt{3})x + 3y = 3\sqrt{3} \\ -x + (1 - \sqrt{3})y = \sqrt{3} - 3 \end{cases}$$
$$iii) \begin{cases} \sqrt{\pi}x + 2\sqrt{\pi}y = 1 \\ x + 2y = -\sqrt{\pi} \end{cases} \quad iv) \begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{5})x + y = 0 \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

5. Να βρείτε το πλήθος των ριζών των παρακάτω συστημάτων χωρίς να τα λύσετε

$$i) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \frac{3x + 3y}{4} = 2\left(x - \frac{5}{8}\right) + 2y \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} x - y = 3 + y \\ 2(1 - x + 3y) = x - 7 \end{cases}$$

6. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ x + \lambda y = 0 \end{cases}$$

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

7. Να λύσετε , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, τα συστήματα

$$i) \begin{cases} (\lambda + 2)x + \lambda y = 1 \\ -3x + (\lambda - 2)y = -1 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \lambda x + y = 2 \\ x + \lambda y = \lambda + 1 \end{cases}$$

8. Να λύσετε , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, τα συστήματα

$$i) \begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)y = \lambda \\ (\lambda + 1)x + (\lambda + 3)y = 2 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} (\lambda^2 + 1)x + (\lambda + 1)y = \lambda - 1 \\ (\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)y = \lambda + 1 \end{cases}$$

9. Να λύσετε , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, τα συστήματα

$$i) \begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + (2\lambda - 1)y = \lambda \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \lambda x - 2 = x + y \\ -3x + \lambda y = -3\lambda x + 6 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} \lambda^2 x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$$

10. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda - 2)y = -5 \end{cases}$$

- i) Να βρείτε τις τιμές των οριζουσών D, D_x, D_y
- ii) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του λ
- iii) Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος, να βρείτε το λ ώστε

$$\left| \frac{5}{x_0} - \frac{5}{y_0} \right| = 1$$

11. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)y = 3 \\ 2\lambda x + 8y = 6 \end{cases}$$

- i) Να έχει μοναδική λύση
- ii) Να είναι αδύνατο
- iii) Να έχει άπειρες λύσεις

12. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda(x - 1) + 4y = x \\ \lambda(x + \lambda y) = x + 2 \end{cases}$$

- i) Να έχει μοναδική λύση
- ii) Να είναι αδύνατο
- iii) Να έχει άπειρες λύσεις

13. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 2\lambda \\ 4x + \lambda y = \lambda - 1 \end{cases}$$

- i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)
- ii) Να βρείτε τους αριθμούς $\lambda \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η μοναδική λύση (x_0, y_0) ικανοποιεί τη σχέση $2x_0 + y_0 > -1$

14. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11 - \lambda \\ x + 5y - \lambda = 7 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- i) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό λ
- ii) Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0)
- iii) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η λύση (x_0, y_0) να επαληθεύει τη σχέση

$$x_0 + y_0 = \frac{11}{13}$$

15. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ισχύει :

$$D_x + D_y = D \text{ και } D_x - D_y = 3D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση , να βρείτε τη λύση αυτή

16. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ισχύει :

$$2D_x - D_y = D \text{ και } D_x + D_y = 2015 D$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση , να βρείτε τη λύση αυτή

17. Σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους x και y ισχύει :

$$D^2 + D_x^2 = 2(3D_x + D) - 10 \text{ και } D^2_x + 6DD_y - D^2_y = 0$$

Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση , να βρείτε τη λύση αυτή

18. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7\omega = 6 \\ 3x - 2y + 5\omega = 5 \\ 4x + 3y - 9\omega = 8 \end{cases}$$

19. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ x + y - 2\omega = 2 \\ 2x + 2y - 3\omega = 1 \end{cases}$$

20. Να λύσετε το σύστημα

$$\begin{cases} x + y - \omega = 1 \\ x - y + 2\omega = 2 \\ 2x + \omega = 3 \end{cases}$$

Ασκήσεις στα μη γραμμικά συστήματα

1. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x + 2y = -7 \\ x^2 + 3y^2 = 28 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} 7x^2 - y^2 = -19 \\ x^2 + 7y^2 = 33 \end{cases} \quad iv) \begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 10 \\ 4x^2 + 5y^2 = 21 \end{cases}$$

2. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} x + y = -5 \\ xy = 6 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 3x - y = 11 \\ xy = 4 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = -3 \end{cases}$$

4. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 12 \\ \sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -5 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 5 \\ 16x - 9y = 55 \end{cases}$$

5. Να λυθούν τα συστήματα

$$i) \begin{cases} 2|x| - |y| = 5 \\ 4|y| - 3|x| = -5 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 2|x| - |y + 3| = 1 \\ 3|y + 3| - 2|x| = 5 \end{cases}$$

6. Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} |x| - 2|y| + 3|\omega| = 6 \\ 2|x| + 3|y| - |\omega| = 5 \\ 3|x| - |y| - 4|\omega| = -11 \end{cases}$$

7. Να λύσετε τα συστήματα

$$i) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 10 \\ \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 3 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 3 \end{cases}$$

1.3 ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 5x + 3y = 4 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{y+1}{3} = 2 \\ \frac{2x+1}{3} + \frac{y+4}{2} = 4 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} (x+1)(y+2) - (x-1)(y+3) = 5 \\ (2x+1)(y-1) - (x+3)(2y-3) = 2 \end{cases}$$

3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 3x - y = -7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases} \quad \gamma) \begin{cases} 2x + 13y = 11 \\ -7x + 5y = 12 \end{cases} \quad \delta) \begin{cases} -8x + 3y = 14 \\ 5x - 11y = -27 \end{cases}$$

4. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο των οριζουσών:

$$\alpha) \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 4y = -9 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$$

5. Δίνεται το σύστημα (Σ) $\begin{cases} 5x - (2 - \lambda)y = 5 \\ (\lambda + 2)x + y = 5 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις ορίζουσες D , D_x , D_y

β) Για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση και ποια είναι αυτή;

γ) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο.

δ) Για ποια τιμή του λ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ποιες είναι αυτές;

6. Να διερευνηθούν τα συστήματα :

$$\alpha) \begin{cases} \lambda x + 4y = 8 \\ x + \lambda y = 4 \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} \lambda x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

7. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\lambda + 1)x + 8y = 4\lambda \\ \lambda x + (\lambda + 3)y = 3\lambda - 1 \end{cases}$ και τα τριώνυμα:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3, \omega(\lambda) = 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 \text{ και } \rho(\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $\varphi(\lambda)=0$, $\omega(\lambda)=0$ και $\rho(\lambda)=0$

β) Να γράψετε ως γινόμενο τα $\varphi(\lambda)$, $\omega(\lambda)$ και $\rho(\lambda)$

γ) Να βρείτε τις ορίζουσες D , D_x , D_y του συστήματος

δ) Πότε το σύστημα έχει μόνο μια λύση και ποια είναι αυτή;

ε) Πότε το σύστημα είναι αδύνατο; Πότε έχει άπειρες λύσεις και ποιες είναι αυτές;

8. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x - y = 3\mu \\ x + y = -\mu^2 + 1 \end{cases}$

- α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να βρείτε
β) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $2x_0 + y_0 \geq 1$

9. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x + y = -\lambda \\ -\lambda x + 2y = \lambda^2 \end{cases}$ το οποίο έχει μοναδική λύση

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda \neq -2$
β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|2x_0 - y_0| \leq 6$

10. Να λύσετε τα συστήματα :

α) $\begin{cases} x + y + \omega = 11 \\ 2x - y + \omega = 5 \\ 3x + 2y + \omega = 24 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x - y + \omega = 7 \\ x + y - \omega = 1 \\ -x + y + \omega = 3 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y + \omega = 1 \\ 2x - 3y - 2\omega = 2 \\ 3x - 2y - \omega = -3 \end{cases}$

11. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 3|x| - 2y = 12 \\ 5|x| + 4y = -2 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3|x| - 4|y| = -6 \\ 4|x| + |y| = 11 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{7}{y} = -2 \\ \frac{8}{x} - \frac{9}{y} = 17 \end{cases}$

12. Ένας απάντησε σε ένα τεστ με 20 ερωτήσεις . Για κάθε σωστή απάντηση έπαιρνε 4 μονάδες , ενώ για κάθε λανθασμένη του αφαιρούνταν 2 μονάδες . Αν συνολικά συγκέντρωσε 50 μονάδες , σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και σε πόσες λανθασμένα;

13. Ένας χωρικός έχει κότες και κουνέλια συνολικά 50 κεφάλια και 160 πόδια. Πόσες κότες και πόσα κουνέλια έχει;

14. Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2m και αυξήσουμε το πλάτος του κατά 5m το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 94m². Αν όμως αυξήσουμε το μήκος του κατά 4m και ελαττώσουμε το πλάτος του κατά 6m το εμβαδόν του ελαττώνεται κατά 104m². Ποιές είναι οι διαστάσεις του αρχικού ορθογωνίου;

15. Να λυθούν τα παρακάτω μη γραμμικά συστήματα:

α) $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 64 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y + \sqrt{x+y} = 6 \end{cases}$

16. Να βρείτε τα κοινά σημεία :

- α) Του κύκλου $C_1: x^2 + y^2 = 13$ και της παραβολής $C_2: y = x^2 - 1$
β) Της παραβολής $C_1: y = x^2 - 2x$ και της ευθείας $\epsilon: y = x - 2$

17. i) Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2(x-1) - y = 1 - (x-2) \\ \frac{2x-1}{2} - \frac{2y-x}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

ii) Να βρείτε τα α και β , ώστε το σύστημα : $\begin{cases} 2\alpha x + \beta y = 3 \\ \alpha^2 x - \alpha\beta y = 3 \end{cases}$

Να έχει λύση τη λύση του συστήματος του ερωτήματος i

18. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 2 - \lambda \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, να βρείτε το λ , ώστε το σύστημα :

i) Να έχει άπειρες λύσεις

ii) α) Να έχει μοναδική λύση

β) Να έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) και να ισχύει $x_0 = 2y_0$

19. Να λύσετε το σύστημα : $\begin{cases} 2x - y - \omega = 2 \\ x + 2y - 3\omega = 1 \\ 3x - y - 2\omega = 3 \end{cases}$

1.4 Θέματα τράπεζας θεμάτων στα Συστήματα

1. α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με

συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο. (Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

2. Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1). (Μονάδες 10)

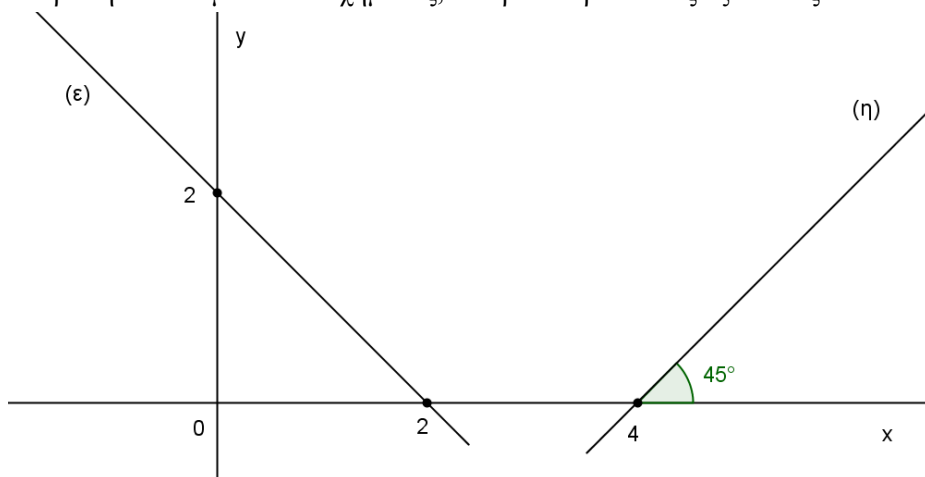
β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

3. Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

4. α) Με βάση τα δεδομένα του σχήματος, να προσδιορίσετε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).



(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους. (Μονάδες 13)

5. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$$
 με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$ (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους α, β, γ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο. (Μονάδες 12)

6. Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος $X \text{ cm}$, πλάτος $Y \text{ cm}$, περίμετρο ίση με 38 cm και με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 2 cm και μειώσουμε το πλάτος του κατά 4 cm , θα

προκύψει ένα ορθογώνιο με εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του αρχικού.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές των διαστάσεων x, y του ορθογωνίου. (Μονάδες 15)

7. Στο δημοτικό parking μιας επαρχιακής πόλης στις 10 το πρωί, το σύνολο των δίκυκλων και τετράτροχων οχημάτων που έχουν παρκάρει είναι 830 και το πλήθος των τροχών τους 2.700.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τον αριθμό των δίκυκλων καθώς και τον αριθμό των τετράτροχων οχημάτων. (Μονάδες 12)

8. **α)** Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$
 (Μονάδες 15)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 10)

9. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$$
 με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση.

(Μονάδες 8)

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε.
(Μονάδες 9)

10. Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1): 2x - y = -1$
 $(\varepsilon_2): (\lambda - 1)x - y = 6$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

(Μονάδες 8)

β) Να παραστήσετε γραφικά τις (ε_1) και (ε_2) , για $\lambda = 3$.

(Μονάδες 8)

γ) Υπάρχει τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να ταυτίζονται; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 9)

11. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + y = 5$, $(\varepsilon_2): -2x + 3y = -9$, $(\varepsilon_3): 3x + 2y = 7$

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των (ε_1) , (ε_2)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των (ε_1) , (ε_3)

(Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των (ε_2) και (ε_3) είναι σημείο της (ε_1)
(Μονάδες 13)

12. Ένα θέατρο έχει 25 σειρές καθισμάτων χωρισμένες σε δύο διαζώματα. Η κάθε μια από τις σειρές του κάτω διαζώματος έχει 14 καθίσματα και η κάθε μια από τις σειρές του πάνω διαζώματος έχει 16 καθίσματα, ενώ η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι 374 καθίσματα.

α) Αν x ο αριθμός σειρών του κάτω και y ο αριθμός σειρών του πάνω διαζώματος, να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα δύο εξισώσεων.

(Μονάδες 12)

β) Πόσες σειρές έχει το πάνω και πόσες το κάτω διάζωμα;

(Μονάδες 13)

13. Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): 2x + y = 6$, $(\varepsilon_2): x - 2y = -3$

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε για ποια τιμή του α , η ευθεία $3x + \alpha y = \alpha + 5$ διέρχεται από το M.

(Μονάδες 12)

14. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x - 2y = 9 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(1, -4)$ (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

15. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \alpha x + \beta y = \gamma \end{cases}$ με παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

α) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(-1, 5)$ (Μονάδες 13)

β) Να επιλέξετε τιμές για τις παραμέτρους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα αυτό να είναι αδύνατο και να επαληθεύσετε γραφικά την επιλογή σας. (Μονάδες 12)

16. Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας το πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός.

(Μονάδες 12)

17. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ με εξισώσεις $x + (\lambda + 2)y = 3$, $(\lambda - 2)x + 5y = 3$ αντίστοιχα και $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη σχετική θέση των δύο ευθειών.

(Μονάδες 13)

β) Στην περίπτωση που οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ τέμνονται, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των δύο ευθειών.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σημείο Α ανήκει στην ευθεία με εξίσωση: $x + 2y = 3$
(Μονάδες 5)

18. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\alpha - 1)x + 3y = 3 \\ x + (\alpha + 1)y = 3 \end{cases}$$
, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) , τότε $x_0 = y_0$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα:

i. έχει άπειρες σε πλήθος λύσεις και να δώσετε τη μορφή τους. (Μονάδες 6)

ii. δεν έχει λύση. (Μονάδες 4)

γ) Να εξετάσετε τις σχετικές θέσεις των δύο ευθειών που προκύπτουν από τις εξισώσεις του παραπάνω συστήματος για $\alpha = 3, \alpha = 2, \alpha = -2$ (Μονάδες 5)

19. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14

2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24

3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας.
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα.

(Μονάδες 15)

Συναρτήσεις

Mathematical Dance Moves



$\sin(x)$



$\cos(x)$



$\tan(x)$



$\cot(x)$



$|x|$



x



x^2



$x^2 + y^2$



$\sqrt{x}$



$\sqrt{-x}$



$\frac{1}{x}$



crap.

Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

2. Συναρτήσεις

2.1 Μονοτονία συνάρτησης

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα;

Απάντηση:

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται γνησίως αύξουσα στο A όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται γνησίως φθίνουσα στο A όταν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

Μεθοδολογία :

Πως μελετάμε μια συνάρτηση f ως προς την μονοτονία;

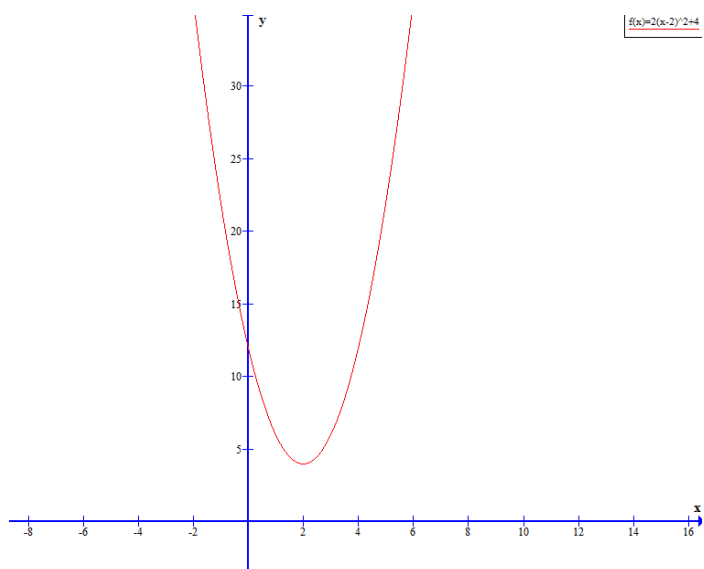
1ος τρόπος

Γραφικά

Αν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης τότε, βλέποντας το γράφημα βρίσκουμε τα διαστήματα στα οποία η f ανεβαίνει και τα διαστήματα στα οποία η f κατεβαίνει

Παράδειγμα:

Με τη βοήθεια της διπλανής γραφικής παράστασης να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f



Στο διάστημα $(-\infty, 2]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

2ος τρόπος

Κατασκευαστικά

- Θεωρούμε δύο τυχαίους αριθμούς $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2$
- Συνεχίζουμε κατασκευάζοντας ταυτόχρονα και στα δύο μέλη της ανίσωσης τον τύπο της f
- Αν καταλήξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα
Αν καταλήξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα

Παράδειγμα:

Να μελετήσεις ως προς την μονοτονία την συνάρτηση $f(x) = 9 - \sqrt{2x - 6}$

Λύση:

Βρίσκω το πεδίο ορισμού

Πρέπει $2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$ άρα $A_f = [3, +\infty)$

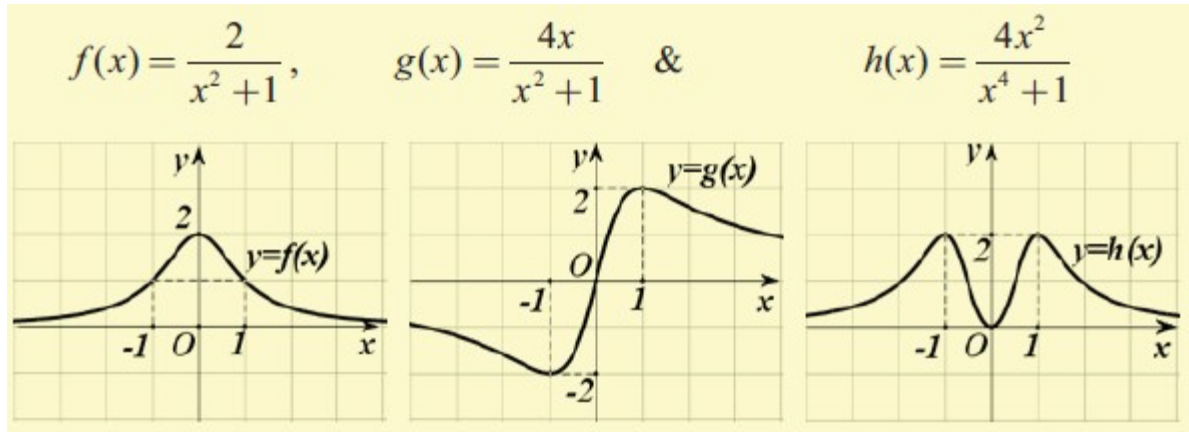
Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2$

$$\begin{aligned} 2x_1 &< 2x_2 \\ 2x_1 - 6 &< 2x_2 - 6 \\ \sqrt{2x_1 - 6} &< \sqrt{2x_2 - 6} \\ -\sqrt{2x_1 - 6} &> -\sqrt{2x_2 - 6} \\ 9 - \sqrt{2x_1 - 6} &> 9 - \sqrt{2x_2 - 6} \\ f(x_1) &> f(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της .

Ασκήσεις στην μονοτονία συνάρτησης

1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων



2. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις

i) $f(x) = x^3 + 2x - 5$ ii) $f(x) = -2x^5 - 7x + 5$ iii) $f(x) = \sqrt{6 - 2x} - 5x$

3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = -2x + 3$

β) $f(x) = \sqrt{x}$

γ) $f(x) = 2 - \sqrt{3 - x}$

δ) $f(x) = 3 + \sqrt{1 - x}$

ε) $f(x) = \frac{1}{x}$

ζ) $f(x) = \frac{1}{x} x$

4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $g(x) = 4 - \sqrt{x - 3}$

β) $h(x) = 1 - \sqrt{4 - 2x}$

5. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \sqrt{12 - 4x} - 3x$

β) $f(x) = 21 - \sqrt{7 - x} + \sqrt{x + 13}$

γ)

$f(x) = \sqrt{12 - 3x} - 4x - \sqrt{x + 6}$

6. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία:

α) $f(x) = x^2 + 6x - 2$

β) $f(x) = x^2 - 4x - 3$

γ) $f(x) = -2x^2 + 12x - 5$

δ) $f(x) = 3 - x(x + 8)$

7. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις που ακολουθούν:

α) $f(x) = \begin{cases} -\frac{x-5}{3}, & \text{αν } x \geq 5 \\ 2, & \text{αν } 3 < x < 5 \\ 7 - \sqrt{6 - 2x}, & \text{αν } x \leq 3 \end{cases}$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \text{αν } x \geq 1 \\ 5 - 4x, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

8. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 2x - \sqrt{4-x}, & \text{αν } x \leq 4 \\ \frac{3}{x} - 4x, & \text{αν } x > 4 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 3x - \sqrt{x}, & \text{αν } x > 0 \\ 2x^3 - \frac{1}{x} - 3x^2, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

9. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η συνάρτηση:

$$\alpha) f(x) = (2\lambda - 8)x + 3 \quad \text{είναι γνησίως αύξουσα,}$$

$$\beta) f(x) = (6 - 3\lambda)x - 5 \quad \text{είναι γνησίως φθίνουσα.}$$

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

10. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 5)$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) f(|2x - 1| - 4) = 5$$

$$\beta) f(x^2 - 4) - f(2x - 1) = 0$$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$.

$\alpha)$ Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

$$\beta) \text{ Να λύσετε την εξίσωση: } (x^3 + x^7)^5 + x^3 = (x^7 + 8)^5 + 8$$

12. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λύσετε τις ανισώσεις:

$\alpha)$

$$f(x - 4) < f(3x) \quad \beta) f(|x|) < f(2) \quad \gamma) f(x^2 - 5) - f(3 - 2x) < 0$$

13. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3, 1)$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) f(|x + 2|) > 1$$

$$\beta) f(f(x^2 - 1) + 2) < 1$$

14. Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(3, 2)$.

$\alpha)$ Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

$$\beta) \text{ Να λύσετε την ανίσωση: } 2 < f(|x - 2|) < 5.$$

$$\gamma) \text{ Να λύσετε την ανίσωση: } (f(10) - f(7))x < f(7) - f(10)$$

15. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = -f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

16. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ και ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{3}{f(x)} - 2f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

2.2 Ακρότατα συνάρτησης

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και πότε ολικό μέγιστο;

Απάντηση:

- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$
- Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_0 το $f(x_0)$ όταν $f(x) \leq f(x_0)$

Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια και πότε περιττή;

Απάντηση:

- ✓ Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται άρτια όταν
 - για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και
 - $f(-x) = f(x)$
- ✓ Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιττή όταν
 - για κάθε $x \in A$ ισχύει $-x \in A$ και
 - $f(-x) = -f(x)$



Παρατήρηση:

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον y
- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$

Προσοχή!!!

Στην εύρεση ακροτάτων πολύ χρήσιμες είναι οι παρακάτω σχέσεις

$$x^2 \geq 0 \text{ και γενικά } x^{\text{αρτιο}} \geq 0, \\ |x| \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

Παράδειγμα 1

Να μελετηθεί ως προς τα ακρότατα την συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + 5$$

Λύση:

$$A_f = \mathbb{R}, \text{ έχουμε } x^2 \geq 0$$

$$x^2 + 5 \geq 5$$

$$f(x) \geq 5$$

Οπότε η f έχει ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = 5$

$$x_0^2 + 5 = 5$$

$$x_0 = 0$$

στο $x_0 = 0$

παράδειγμα 2

Να εξετάσεις αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι άρτια ή περιττή

Λύση

Πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων άρα

- Αν $x \in A$ τότε $-x \in A$
- $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

Άρα η f είναι περιττή

Ασκήσεις στα ακρότατα

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$

β) $f(x) = |x|+1$

γ) $f(x) = |x-1|$

δ) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

ε) $f(x) = \frac{-3}{x^2+2}$

ζ) $f(x) = \frac{4}{|x|+1}$

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x} - 5$, με $x \in (0, +\infty)$.

3. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

β) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

γ) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

δ) $f(x) = -4x^2 + 4x - 5$

4. Η συνάρτηση $f: [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο: $f(x) = ax + 2$ είναι γνησίως φθίνουσα. Για τον αριθμό a ισχύει $|a-1| - 4 = 0$. Να βρείτε:

α) τον αριθμό a

β) τα ακρότατα της f .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = (-1 - |\lambda|)x + \lambda - 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Αν η f έχει ελάχιστο το -10 και μέγιστο το 10 , να βρείτε τον αριθμό λ .

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 9] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \alpha - \sqrt{x} + \beta x$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $M(1, 2)$ και $N(4, -5)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της f .

ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

7. Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x) = x^2$

β) $f(x) = x^3$

γ) $f(x) = x^4 - x - 2$

δ) $f(x) = x^3 - x + 5$

ε) $f(x) = x^2 - 4$

ζ) $f(x) = |3-x| + |x+3|$

8. Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές:

α) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+9}$

β) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$

γ) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$

δ) $f(x) = \frac{-x}{x^2+3}$

$$\varepsilon) f(x) = \frac{4}{2-x}$$

$$\zeta) f(x) = \frac{2x}{x^2+3x}$$

$$\eta) f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\theta) f(x) = \sqrt{2 - x^2}$$

$$\iota) f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\kappa) f(x) = \frac{2}{x}$$

9. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \\ x^3 + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

$$\beta) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^3}, & \text{αν } x \leq -1 \\ |x|, & \text{αν } -1 < x < 1 \\ \frac{1}{x^3}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{αν } |x| \geq 2 \\ -\frac{x}{2}, & \text{αν } |x| < 2 \end{cases}$$

10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2+\alpha|x|}$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α και το πεδίο ορισμού της f .

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 \leq \frac{f(999)}{f(-999)}x$.

11. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και ισχύει:
 $\alpha^2 + \beta^2 - 4(\beta - \alpha - 2) = f(-3) + f(0) + f(3)$

α) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση: $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{x^3 - \beta x |x|}{|x| - \alpha}$ είναι άρτια ή περιττή.

12. Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή. Να αποδείξετε ότι:

α) Η $g(x) = xf(x) - |f(x)|$ είναι άρτια,

β) Η $h(x) = f(f(x)) - x^4 f(x)$ είναι περιττή.

13. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2f(x) + f(-x) = 2x^3 - x|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

14. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(x) - 5f(-x) = x^2 - 3|x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

15. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(y - x) = f(y) - f(x)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(0)$,

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Πως μελετάμε μια συνάρτηση;

Απάντηση:

Για τη μελέτη μιας συνάρτησης ακολουθούμε τα εξής βήματα

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- Εξετάζουμε αν υπάρχουν συμμετρίες, δηλαδή αν είναι άρτια ή περιττή
- Εξετάζουμε τη μονοτονία της συνάρτησης
- Βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης
- Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης για απολύτως μεγάλες τιμές του x και για απολύτως μικρές τιμές του x
- Κάνουμε έναν πίνακα τιμών και σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση

Έστω η $f(x)$ μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ περιγράψτε όσα είδη μετατοπίσεων της f γνωρίζετε

Απάντηση

- Η $\phi(x)=f(x-c)$ προέρχεται από την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες δεξιά, $c>0$
- Η $\phi(x)=f(x+c)$ προέρχεται από την οριζόντια μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες αριστερά, $c>0$
- Η $\phi(x)=f(x)+c$ προέρχεται από την κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες προς τα πάνω, $c>0$
- Η $\phi(x)=f(x)-c$ προέρχεται από την κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά c μονάδες προς τα κάτω, $c>0$

Παράδειγμα

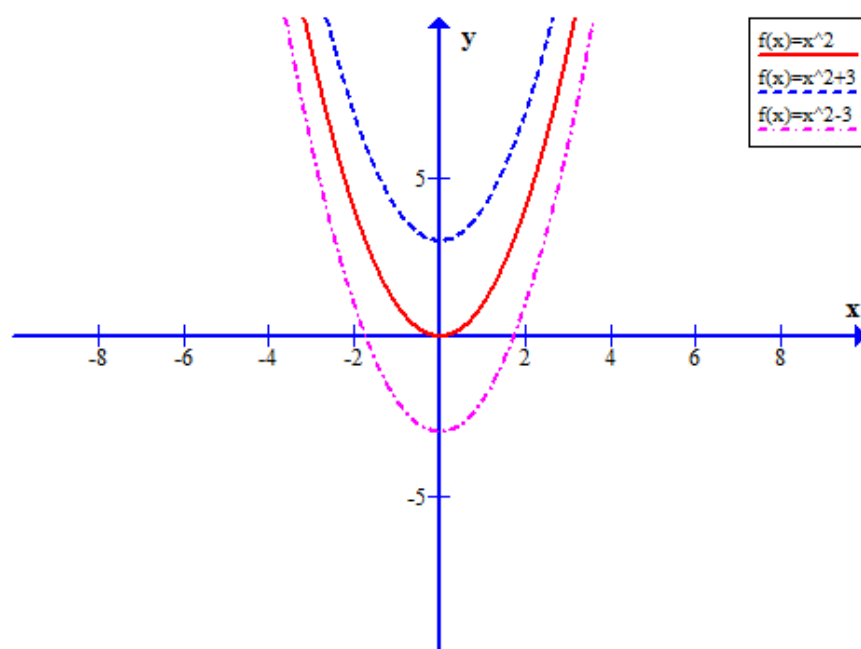
Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$i) f(x) = x^2 \quad g(x) = x^2 + 3 \quad h(x) = x^2 - 3$$

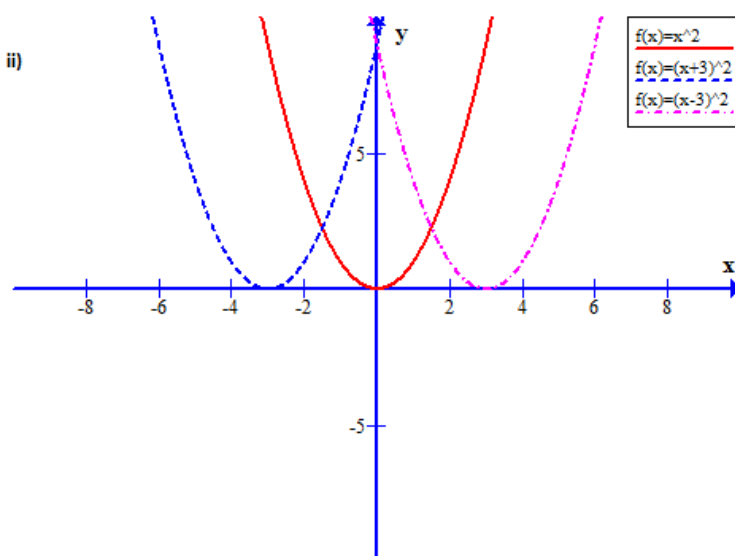
$$ii) f(x) = x^2 \quad g(x) = (x + 3)^2 \quad h(x) = (x - 3)^2$$

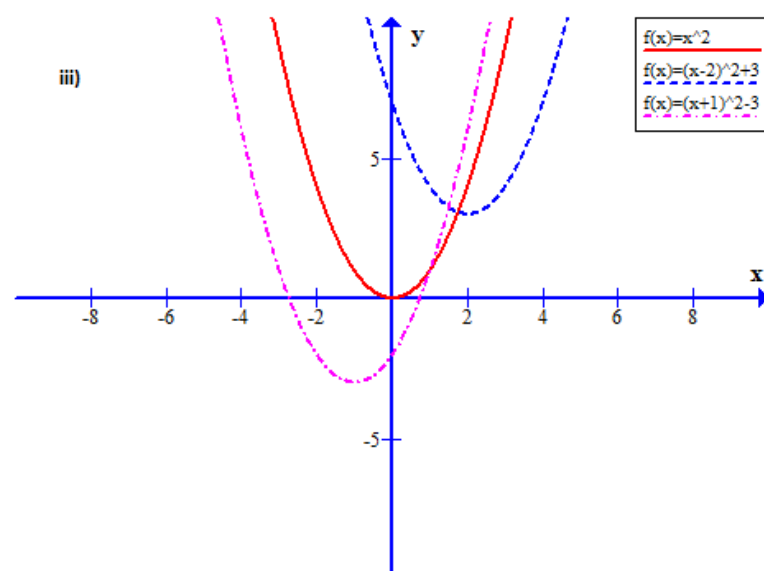
$$iii) f(x) = x^2 \quad g(x) = (x - 2)^2 + 3 \quad h(x) = (x + 1)^2 - 3$$

i)



ii)





Ασκήσεις στην μετατόπιση συνάρτησης

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:
α) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| - 1$, $h(x) = |x| + 1$
β) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x + 1|$, $h(x) = |x - 1|$
γ) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x + 1| + 2$, $h(x) = |x - 1| - 2$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της f :
α) κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.
β) κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.
γ) κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα πάνω.
δ) κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και κατά 2 μονάδες προς τα κάτω.

Γενικές Ασκήσεις στις Συναρτήσεις

1. Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις
α) $f(x) = 3x - 4$ β) $f(x) = -2x + 5$ γ) $f(x) = x^3 - 1$
δ) $f(x) = -x^3 + 1$ ε) $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ στ) $f(x) = (x-1)^2 + 1$,
 $x \geq 1$
2. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γνησίως μονότονες συναρτήσεις. Να λύσετε την ανίσωση:
α) $f(x^2) > f(x+6)$, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα
β) $g(x^2 + x) \leq g(2x + 12)$, αν η g είναι γνησίως αύξουσα
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{5 - \sqrt{4 - x}}$
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της
γ) Να βρείτε σε ποιιά σημεία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x' και y'
δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) = \sqrt{2}$
4. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση, με $f(2010) < f(2014)$
α) Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x-2) > f(8-2x)$
5. Να αποδείξετε ότι:
α) Η συνάρτηση $f(x) = 3 - |x-2|$ παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ μέγιστο

β) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ παρουσιάζει στο $x_1=1$ μέγιστο και στο

$x_2=-1$ ελάχιστο

γ) Η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 2x^3 + 3$ παρουσιάζει στο $x_0=1$ ελάχιστο

6. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = 2x^4 - 1 \quad \beta) f(x) = -2(x-1)^2 + 1 \quad \gamma) f(x) = |x-3| + 12$$

7. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

8. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή

γ) Να βρείτε τις συμμετρίες της γραφικής παράστασης της f

δ) Να βρείτε το ελάχιστο της f

9. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων , να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = |x| \quad g(x) = |x| + 5 \quad h(x) = |x| - 5$$

$$\beta) f(x) = x^2 \quad g(x) = -x^2 \quad h(x) = -x^2 + 3$$

$$\gamma) f(x) = |x| \quad g(x) = |x+3| \quad h(x) = |x-5| + 3$$

Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων στις συναρτήσεις

1. Η γραφική παράσταση μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης $f : \square \rightarrow \square$ διέρχεται από τα σημεία $A(5,2)$ και $B(4,9)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

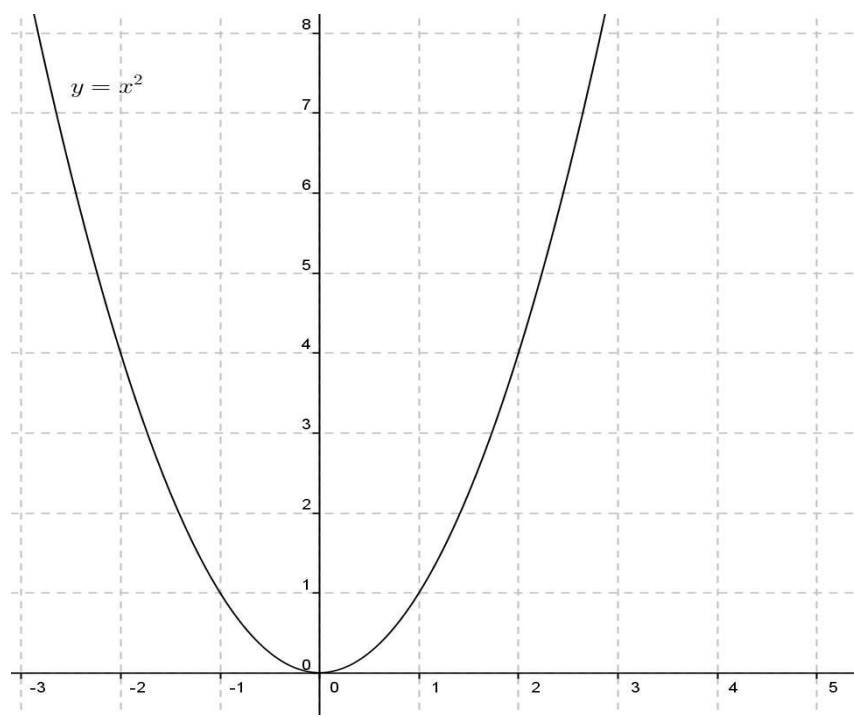
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(5-3x) < 2$

(Μονάδες 13)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \in \square$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x-2)^2 + 1$ (Μονάδες 12)

β) Στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$ (Μονάδες 13)



3. Δίνεται η συνάρτηση ,

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι η $f(x) \leq 1$ (Μονάδες 8)

β) Είναι το 1 η μέγιστη τιμή της συνάρτησης; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$

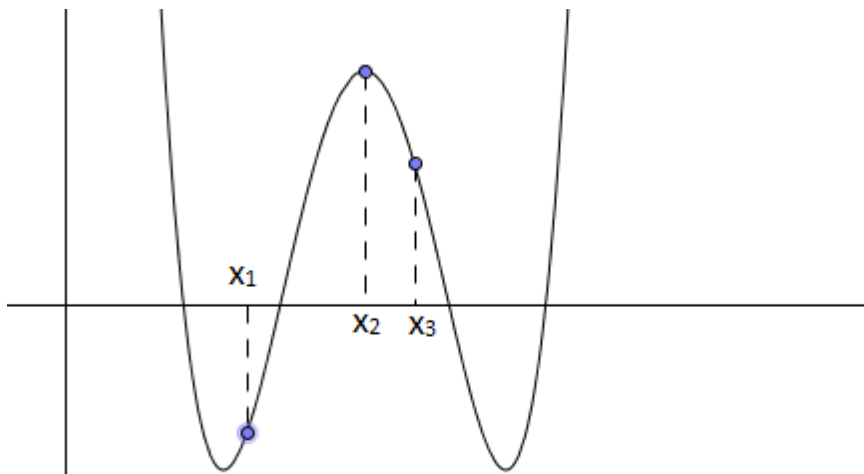
(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γενίσιως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



5. Έστω γενίσιως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράστασή της οποίας διέρχεται από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(4,5)$

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της f (Μονάδες 13)

β) Αν η γραφική παράστασή της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 , να δείξετε ότι $f(0) > 0$

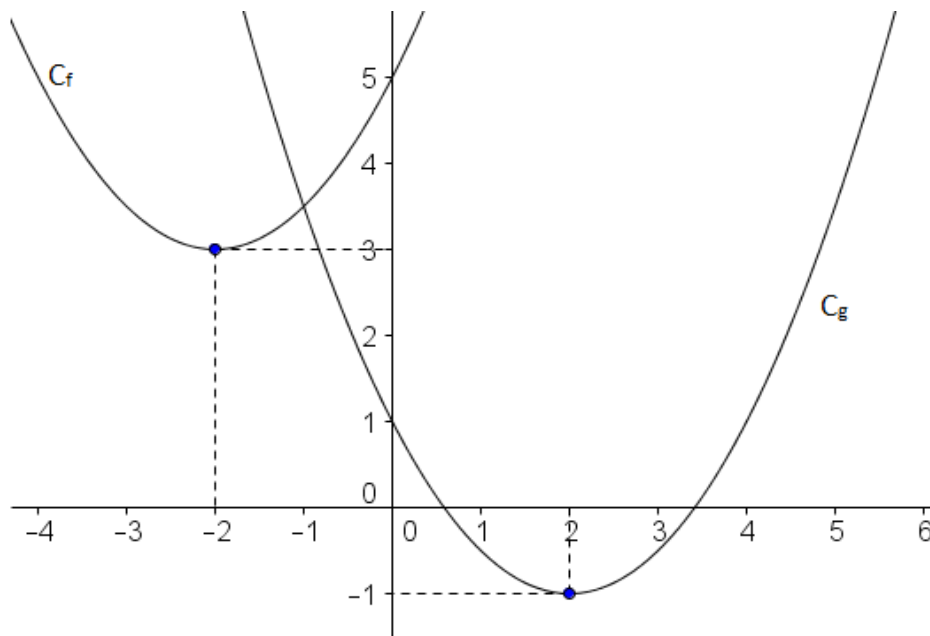
(Μονάδες 12)

6. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράστασή της g προκύπτει

από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g . (Μονάδες 15)



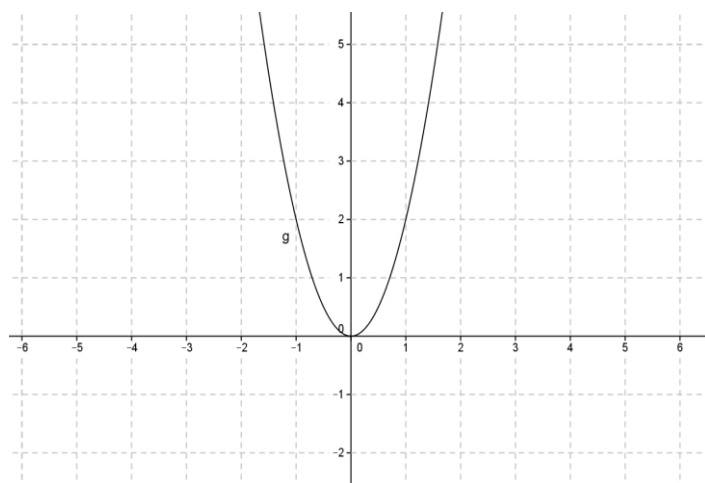
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f γράφεται στη μορφή:
 $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$

(Μονάδες 10)

β) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Στο ίδιο σύστημα αξόνων, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή προκύπτει μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της g .

(Μονάδες 15)



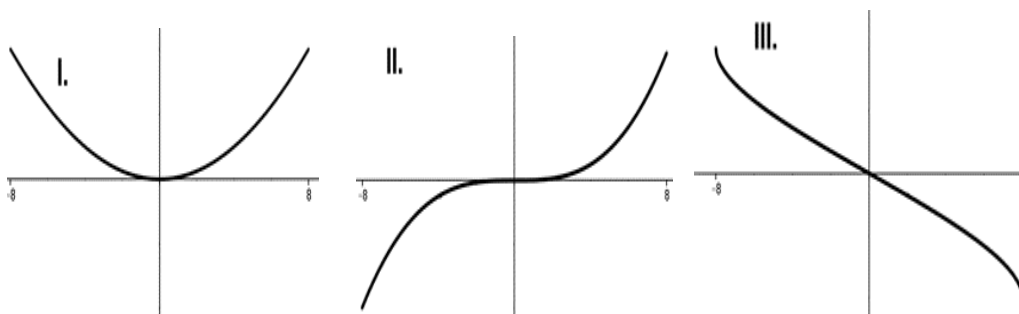
8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{8-x} - \sqrt{8+x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 8)

γ) Αν η συνάρτησης f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της, να επιλέξετε ποια από τις παρακάτω τρεις προτεινόμενες, είναι η γραφική της παράσταση και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της.



(Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γραφικά ή αλγεβρικά, γιατί οι συναρτήσεις $g(x) = f(x) - 3$ και

$h(x) = f(x + 3)$ δεν είναι ούτε άρτιες ούτε περιττές. (Μονάδες 5)

9. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-c)^2 - d, \quad x \in \mathbb{R}$$

με c, d θετικές σταθερές, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από τα σημεία

$$A(0,16), B(4,0)$$

α) Με βάση τα δεδομένα, να κατασκευάσετε ένα σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους τους c, d και να υπολογίσετε την τιμή τους. (Μονάδες 10)

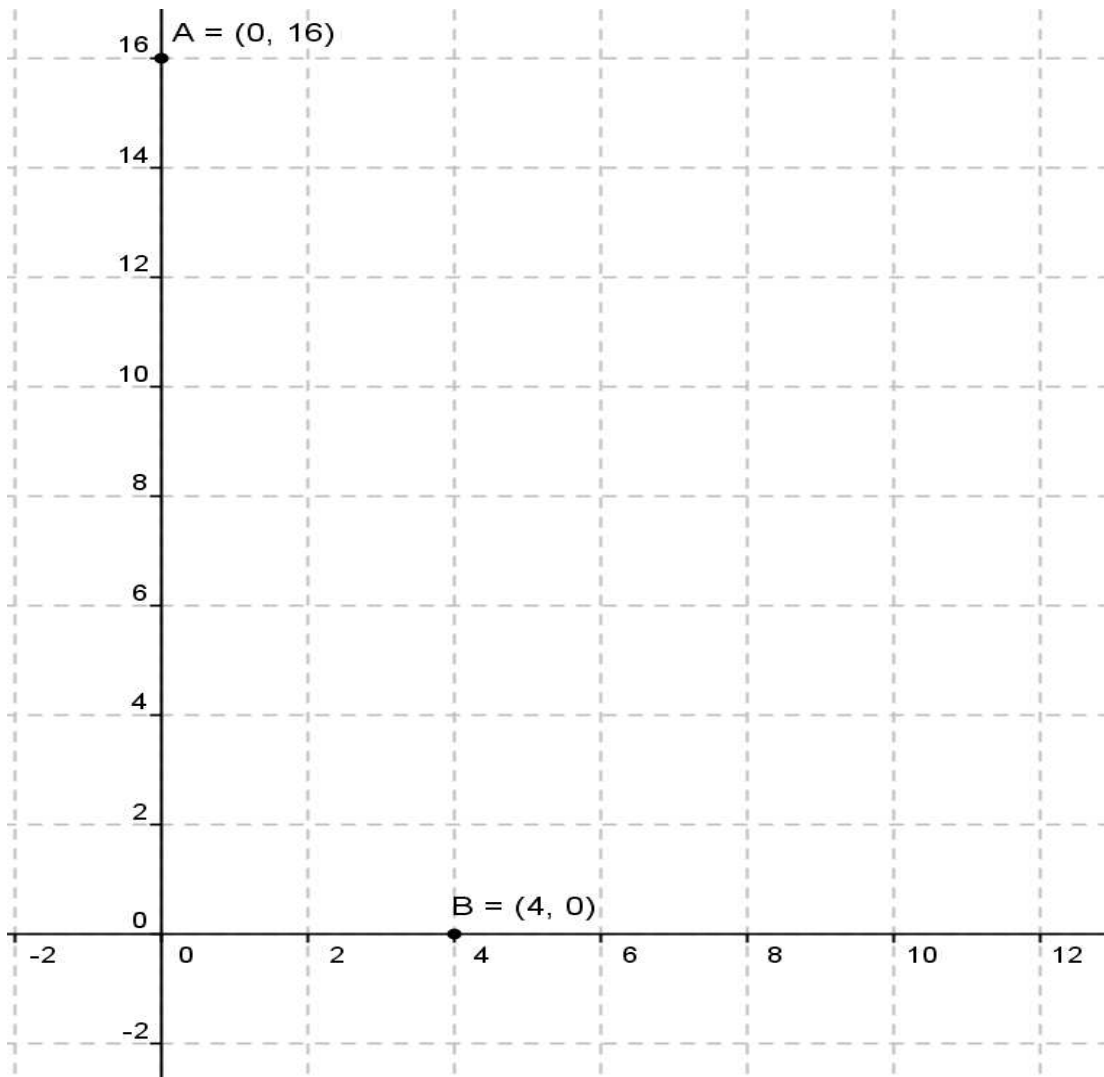
β) Θεωρώντας γνωστό ότι $c = 6$ και $d = 2$

i. να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες. (Μονάδες 3)

ii. να μεταφέρετε στην κόλα σας το σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και να εξηγήσετε πώς αυτή

σχετίζεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ (Μονάδες 6)

iii. με βάση την παραπάνω γραφική παράσταση, να βρείτε το ακρότατο της συνάρτησης f , τα διαστήματα στα οποία η f είναι μονότονη, καθώς και το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.
(Μονάδες 6)

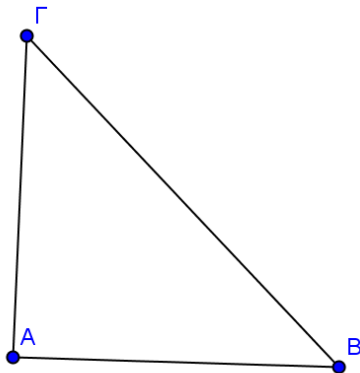


Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

3. Τριγωνομετρία

3.1 Βασικές έννοιες τριγωνομετρίας

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας



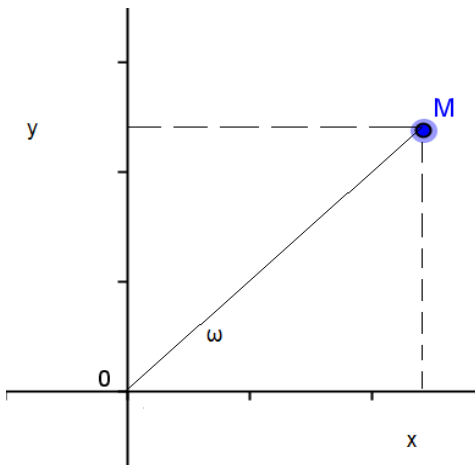
$$\eta\mu B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AG}{BG}$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{BG}$$

$$\epsilon\phi B = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}} = \frac{AG}{AB}$$

$$\sigma\phi B = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{AG}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$



$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}, \quad \epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}, \quad \sigma\phi\omega = \frac{x}{y}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών μεγαλύτερων των 360°

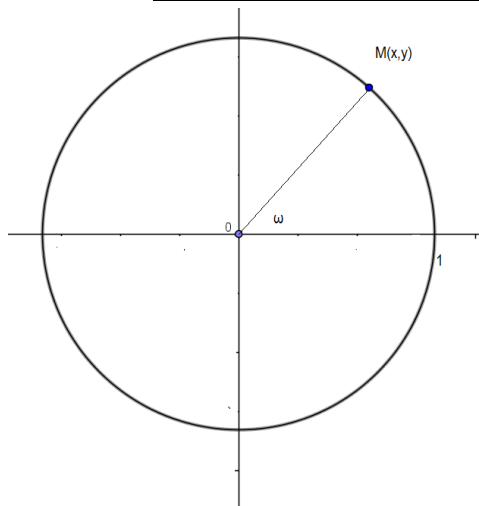
$$\eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \epsilon\phi\omega$$

$$\sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) = \sigma\phi\omega$$

Τριγωνομετρικός κύκλος



(Είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=1$)

$\text{συν}\omega = x = \text{τετμημένη του σημείου } M$

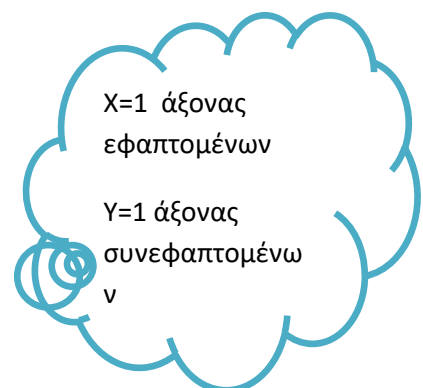
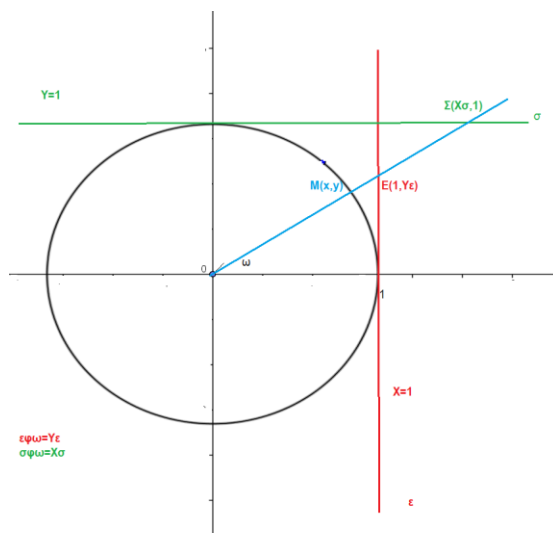
$\text{ημ}\omega = y = \text{τεταγμένη του σημείου } M$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ!!!

- $-1 \leq \text{ημ}\omega \leq 1$ και $-1 \leq \text{συν}\omega \leq 1$
- Το πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας ω ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκεται η τελική της πλευρά

	1°	2°	3°	4°
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-

Οι άξονες των εφαπτομένων – συνεφαπτομένων



Ακτίνιο ή rad

Ορισμός: Ακτίνιο ή (1rad) είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε έναν κύκλο βαίνει σε τόξο, με μήκος ίσο με την ακτίνα του κύκλου.

Τύπος μετατροπής από μοίρες σε rad (και αντίστροφα)

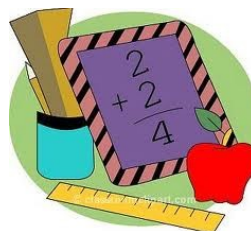
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

α : η γωνία σε rad

μ : η γωνία σε μοίρες

Τριγωνομετρικός πίνακας

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
Σε μοίρες	Σε rad	$\eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu\omega$	$\epsilon\varphi\omega$	$\Sigma\varphi\omega$
0°	0	0	1	0	$\Delta.0$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\Delta.0$	0

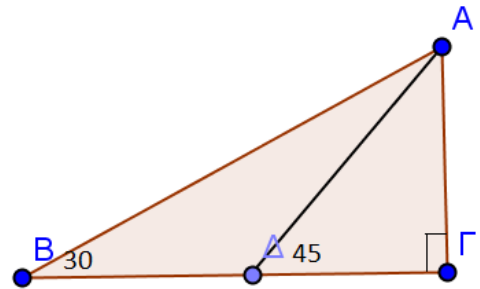


Ασκήσεις στις βασικές έννοιες τριγωνομετρίας

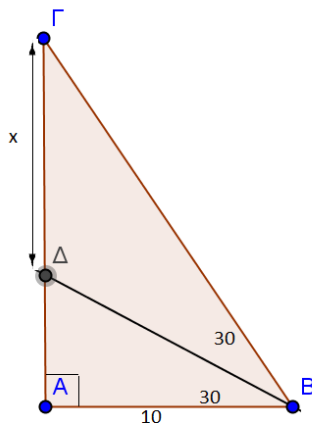
1. Να μετατρέψετε σε rad τις παρακάτω γωνίες i) 60° ii) 75° iii) 150° iv) -4500°
2. Να μετατρέψετε σε μοίρες τις παρακάτω γωνίες
i) $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$ ii) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ iii) $\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$ iv) $\frac{4\pi}{3} \text{ rad}$ v) -180 rad
3. Σε ένα τρίγωνο ABΓ ισχύει ότι $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ και $(AB) = \sqrt{3} \text{ cm}$. Να υπολογίσετε :
i) Τα μήκη των πλευρών AB, AΓ
ii) Το εμβαδό του τριγώνου
4. Αν $M(-\sqrt{3}, -1)$ είναι σημείο της τελικής πλευράς γωνίας ω , να βρεθεί το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της ω καθώς και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $2k\pi + \omega$, $k \in \mathbb{Z}$. Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα αν $M(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.
5. Ναδειχθεί ότι δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός χ τέτοιος ώστε $\eta\mu\chi = \alpha^2 + \alpha + 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$
6. Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και $(BD) = 10 \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε:

- i. την πλευρά AΓ
- ii. τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{A\Gamma\Delta}$
- iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο AΔΓ είναι ισοσκελές



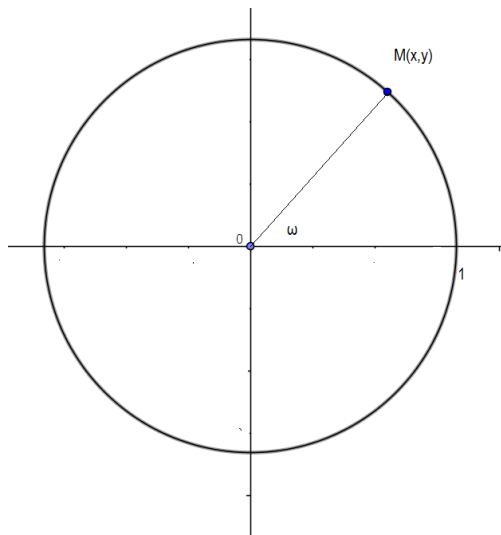
7. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των παραστάσεων
i. $A = 4 - 5\eta\mu\chi$
ii. $B = 2\eta\mu\chi - 6\sigma\upsilon\nu\chi$
iii. $\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\chi + 3\eta\mu^2\chi - 2$
iv. $\Delta = \eta\mu^4\chi - 3\sigma\upsilon\nu^2\chi$
8. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογιστεί το μήκος χ



3.2 Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Απόδειξη:



Αν $M(x,y)$ είναι το σημείο στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας ω τέμνει Τον τριγωνομετρικό κύκλο τότε

$$x = \sigma\upsilon\nu\omega \text{ και } y = \eta\mu\omega$$

$$\text{Όμως } (OM) = 1 \text{ και } (OM)^2 = |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{Άρα } x^2 + y^2 = 1 \text{ οπότε } \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = 1$$

2. $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και $\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$

Απόδειξη:

Από το προηγούμενο σχήμα έχουμε:

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x} = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

3. $\epsilon\varphi\omega \sigma\varphi\omega = 1$

Απόδειξη:

$$\epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1, \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$$

$$4. \text{ i. } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} , \text{ ii. } \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Απόδειξη:

$$\text{i. } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \stackrel{\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^2\omega + 1 = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1}$$

$$\text{ii. } \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\omega + 1} = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές ταυτότητες

1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας χ rad όταν

i) $0 < \chi < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu\chi = \frac{2}{5}$

ii) $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$ και $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{12}{13}$

iii) $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$ και $\epsilon\varphi\chi = \frac{3}{4}$

iv) $\frac{3\pi}{2} < \chi < 2\pi$ και $\sigma\varphi\chi = -\frac{15}{8}$

2. Να δείξετε ότι:

i) $\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu^2\theta = \eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\omega$

ii) $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} + \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

iii) $\frac{\eta\mu\chi}{1-\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$

3. Να αποδείξετε ότι :

i) $\epsilon\varphi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

ii) $\sigma\varphi\chi + \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1}{\eta\mu\chi}$

iii) $\eta\mu\chi \cdot \epsilon\varphi\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

iv) $\eta\mu^2\chi \cdot (1 + \sigma\varphi^2\chi) = 1$

4. Να αποδείξετε ότι :

$$\eta\mu\chi \cdot \frac{1 + 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} + \sigma\upsilon\nu\chi \cdot \frac{2\eta\mu\chi - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}}{\epsilon\varphi\chi - 1} = 1$$

5. Να αποδείξετε ότι η παράσταση :

$$A = \eta\mu^8\chi - \sigma\upsilon\nu^8\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot (1 + \eta\mu^4\chi) - 2\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^4\chi$$

Είναι ανεξάρτητη του χ

6. Να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\eta\mu^4\chi + 4\sigma\upsilon\nu^2\chi} + \sqrt{\sigma\upsilon\nu^4\chi + 4\eta\mu^2\chi} = 3$

7. Αν $\chi \in [0, \pi]$ να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu\chi} + \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu\chi} = \sqrt{2(1 + \eta\mu\chi)}$$

8. Να αποδείξετε ότι :

i) $\varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi}$

ii) $\varepsilon\varphi^2\chi + \sigma\varphi^2\chi + 2 = \frac{1}{\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi}$

iii) $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\chi}{\eta\mu\chi} + \frac{\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi^2\chi} = \sigma\varphi\chi$

9. Αν $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \sqrt{2}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

i) $\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$

ii) $\varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi$

iii) $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^3\chi$

iv) $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi$

v) $\eta\mu\chi \cdot \varepsilon\varphi\chi + \sigma\upsilon\nu\chi \cdot \sigma\varphi\chi$

10. Αν $0 < \chi < \pi$ να δείξετε ότι :

$$\sqrt{\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu\chi}} + \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi}} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$$

11. Αν $-\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{1 + \eta\mu\chi}{1 - \eta\mu\chi}} + \sqrt{\frac{1 - \eta\mu\chi}{1 + \eta\mu\chi}} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

3.3 Αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

1. ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το ίδιο συνημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$\sin(-\omega) = \sin \omega$	$\cos(-\omega) = -\cos \omega$
$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu \omega$	$\sigma\phi(-\omega) = -\sigma\phi(\omega)$

2. ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 180° ή π

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς

$\eta\mu(\pi - \omega) = \eta\mu \omega$	$\cos(\pi - \omega) = -\cos \omega$
$\sin(\pi - \omega) = -\sin \omega$	$\sigma\phi(\pi - \omega) = -\sigma\phi(\omega)$

3. ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ 180° ή π

Οι γωνίες με διαφορά 180° έχουν ίδια εφαπτομένη, συνεφαπτομένη και αντίθετα ημίτονο, συνημίτονο

$\eta\mu(\pi + \omega) = -\eta\mu \omega$	$\cos(\pi + \omega) = \cos \omega$
$\sin(\pi + \omega) = -\sin \omega$	$\sigma\phi(\pi + \omega) = \sigma\phi(\omega)$

4. ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 90° ή $\frac{\pi}{2}$

Στις γωνίες με άθροισμα 90° το ημίτονο κάθε μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης (και αντίστροφα) και η εφαπτομένη της μιας με τη συνεφαπτομένη της άλλης

$\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \omega) = \sin \omega$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \omega) = \sigma\phi \omega$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \omega) = \eta\mu \omega$	$\sigma\phi(\frac{\pi}{2} - \omega) = \cos(\omega)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

1. Ο τριγωνομετρικός αριθμός παραμένει ίδιος όταν η γωνία χ είναι της μορφής $\pi \pm \alpha$ ή $-\alpha$ και αλλάζει από ημίτονο σε συνημίτονο, από εφαπτομένη σε συνεφαπτομένη και αντίστροφα, όταν η γωνία χ είναι της μορφής $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$
2. Το πρόσημο εξαρτάται από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας χ (θεωρούμε ότι η γωνία α είναι οξεία)
(είναι + αν ο τριγωνομετρικός αριθμός του χ είναι θετικός και – αν είναι αρνητικός στο τεταρτημόριο αυτό)
3. Συγκεντρώνοντας έχουμε :

χ	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\eta\mu\chi$	$-\eta\mu\alpha$	$\eta\mu\alpha$	$-\eta\mu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\sigma\upsilon\nu\alpha$	$-\sigma\upsilon\nu\alpha$	$-\sigma\upsilon\nu\alpha$
$\sigma\upsilon\nu\chi$	$\sigma\upsilon\nu\alpha$	$-\sigma\upsilon\nu\alpha$	$-\sigma\upsilon\nu\alpha$	$\eta\mu\alpha$	$-\eta\mu\alpha$	$-\eta\mu\alpha$	$\eta\mu\alpha$
$\epsilon\varphi\chi$	$-\epsilon\varphi\alpha$	$-\epsilon\varphi\alpha$	$\epsilon\varphi\alpha$	$\sigma\varphi\alpha$	$-\sigma\varphi\alpha$	$\sigma\varphi\alpha$	$-\sigma\varphi\alpha$
$\sigma\varphi\chi$	$-\sigma\varphi\alpha$	$-\sigma\varphi\alpha$	$\sigma\varphi\alpha$	$\epsilon\varphi\alpha$	$-\epsilon\varphi\alpha$	$\epsilon\varphi\alpha$	$-\epsilon\varphi\alpha$

Ασκήσεις στην αναγωγή στο 1^ο τεταρτημόριο

1. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών :

i) -1305° ii) 2020° iii) -2010° iv) $\frac{65\pi}{6}$ v) $-\frac{405\pi}{4}$

2. Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\eta\mu(90^\circ - \alpha) \cdot \epsilon\varphi 132^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 312^\circ \cdot \eta\mu 90^\circ}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \alpha) \cdot \eta\mu 222^\circ \cdot \epsilon\varphi 48^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 180^\circ} = 1$$

3. Να αποδείξετε ότι :

$$\begin{aligned}\alpha) \epsilon\varphi \omega \cdot \epsilon\varphi(90^\circ - \omega) &= 1 \\ \beta) \epsilon\varphi 1^\circ \cdot \epsilon\varphi 2^\circ \cdot \epsilon\varphi 3^\circ \cdot \dots \cdot \epsilon\varphi 89^\circ &= 1 \\ \gamma) \eta\mu 1^\circ + \eta\mu 2^\circ + \dots + \eta\mu 89^\circ &= \sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \dots + \sigma\upsilon\nu 89^\circ \\ \delta) \sigma\varphi 1^\circ \cdot \sigma\varphi 2^\circ \cdot \dots \cdot \sigma\varphi 89^\circ &= 1\end{aligned}$$

4. Αν $\alpha = \frac{11\pi}{4}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A = \eta\mu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha + 2\epsilon\varphi \alpha - \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 \alpha}$$

5. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) A = \frac{\eta\mu(9\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(19\pi - \theta) \cdot \epsilon\varphi(29\pi + \theta) \cdot \sigma\varphi(93\pi - \theta)}{\eta\mu(7\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(17\pi + \theta) \cdot \epsilon\varphi(27\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi(37\pi + \theta)}$$

$$\beta) B = \frac{\eta\mu(11\pi + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(21\pi - \theta) \cdot \epsilon\varphi(31\pi + \theta) \cdot \sigma\varphi(41\pi - \theta)}{\eta\mu(13\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(23\pi + \theta) \cdot \epsilon\varphi(33\pi - \theta) \cdot \sigma\varphi(43\pi + \theta)}$$

$$\gamma) \Gamma = \frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{29\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{39\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{27\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{37\pi}{2} + \theta\right)}$$

$$\delta) \Delta = \frac{\eta\mu\left(\frac{91\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{191\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{219\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{391\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{73\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{173\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\varphi\left(\frac{273\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{373\pi}{2} + \theta\right)}$$

6. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\text{i. } A = \frac{\eta\mu(7\pi+\chi)\cdot\sigma\upsilon\nu(21\pi-\chi)}{\eta\mu(13\pi-\chi)\cdot\sigma\upsilon\nu(38\pi-\chi)}$$

$$\text{ii. } B = \eta\mu(11\pi - \chi) + \eta\mu(15\pi + \chi) + \frac{\varepsilon\varphi(5\pi-\chi)}{\varepsilon\varphi(9\pi+\chi)}$$

$$\text{iii. } \Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu(8\pi-\chi)+\sigma\varphi(3\pi+\chi)}{\sigma\upsilon\nu(23\pi+\chi)+\sigma\varphi(27\pi-\chi)}$$

7. Αν $\hat{A}$ $\hat{B}$ $\hat{\Gamma}$ είναι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :

$$\text{i. } \eta\mu^2(B + \Gamma) + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1$$

$$\text{ii. } \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 \frac{B+\Gamma}{2} = 1$$

$$\text{iii. } \varepsilon\varphi(B + \Gamma) \cdot \sigma\varphi A = -1$$

$$\text{iv. } \varepsilon\varphi \frac{A}{2} \cdot \varepsilon\varphi \frac{B+\Gamma}{2} = 1$$

8. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{8} - \alpha\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) = 4$ να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{3\pi}{8} - \alpha\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right)$$

3.4 Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται περιοδική

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A , λέγεται περιοδική, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι:

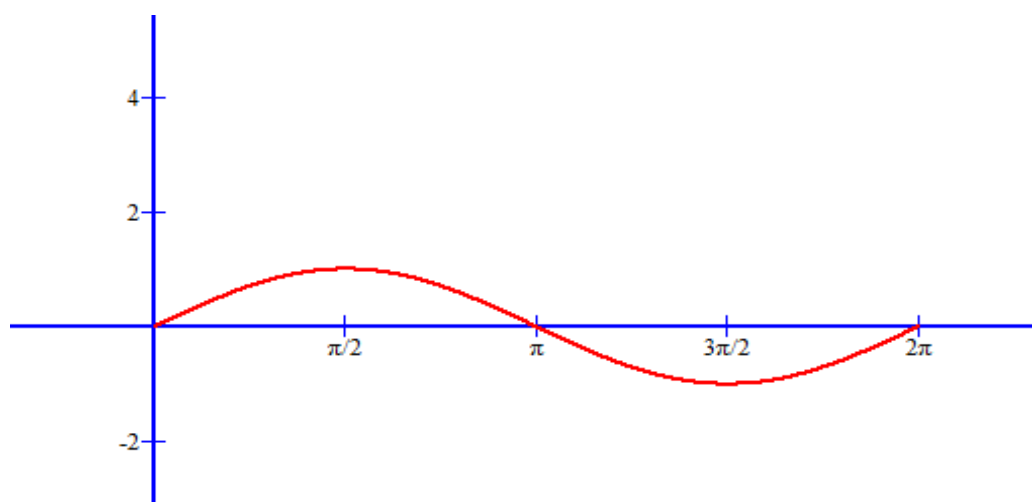
- $x - T, x + T \in A$
- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

2. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$

- ❖ Έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$
- ❖ Είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$, διότι:
 - $x + T, x - T \in A = \mathbb{R}$
 - $f(x + T) = f(x + 2\pi) = \eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu x = f(x)$
 - $f(x - T) = f(x - 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x = f(x)$

Επειδή ο αριθμός 2π είναι περίοδος της f θα την μελετήσουμε σε ένα διάστημα $\Delta = [0, 2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu x$	0	↗ 1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0
		max		min	

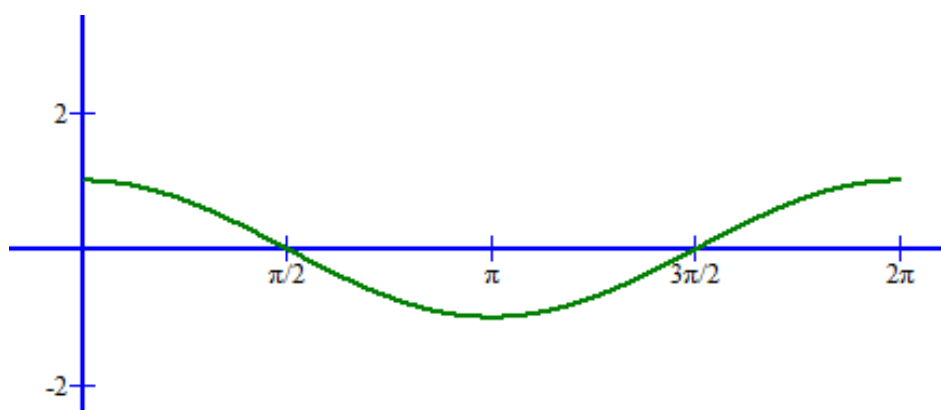


3. Η συνάρτηση $f(x)=\sin x$

4. Έχει πεδίο ορισμού το $A=\mathbb{R}$
5. Είναι περιοδική με περίοδο $T=2\pi$, διότι:
 - ❖ $x + T, x - T \in A = \mathbb{R}$
 - ❖ $f(x+T)=f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)$
 - ❖ $f(x-T)=f(x-2\pi)=\sin(x-2\pi)=\sin x=f(x)$

Επειδή ο αριθμός 2π είναι περίοδος της f θα την μελετήσουμε σε ένα διάστημα $\Delta=[0,2\pi]$

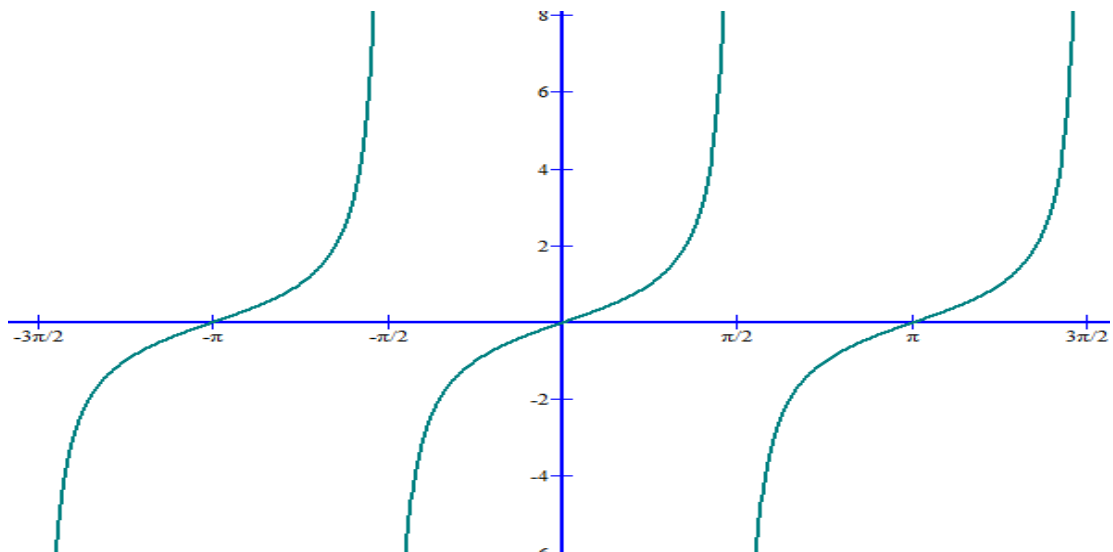
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	1 max	0	-1 min	0	1 max



4. Η συνάρτηση $f(x)=\cos x$

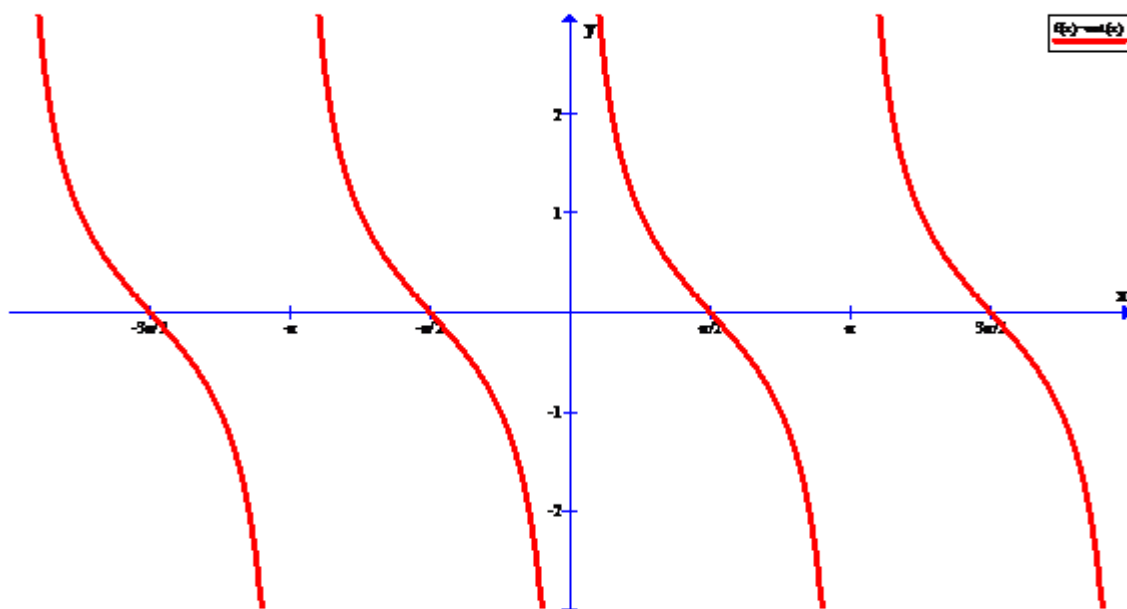
- Έχει πεδίο ορισμού το $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$
 - ❖ $x + T, x - T \in A$
 - ❖ $f(x+T)=f(x+\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos x=f(x)$
 - ❖ $f(x-T)=f(x-\pi)=\cos(x-\pi)=-\cos x=f(x)$
- Δεν έχει ακρότατα
- Είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ αλλά και σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

- Είναι περιττή συνάρτηση , διότι $f(-x)=\epsilon\phi(-x)=-\epsilon\phi x=-f(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων
- Οι ευθείες $x=-\frac{\pi}{2}$ και $x=\frac{\pi}{2}$ ονομάζονται ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f
- **Η συνάρτηση $f(x)=\epsilon\phi x$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της**



5. Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\phi x$

- Έχει πεδίο ορισμού το $A = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \kappa\pi , \kappa \in \mathbb{Z}\}$
- Είναι περιοδική με περίοδο $T=\pi$
 - ❖ $x + T, x - T \in A$
 - ❖ $f(x+T)=f(x+\pi)=\sigma\phi(x+\pi)=\sigma\phi x=f(x)$
 - ❖ $f(x-T)=f(x-2\pi)=\sigma\phi(x-\pi)=-\sigma\phi(\pi-x)=\sigma\phi x=f(x)$
- Δεν έχει ακρότατα
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi)$ αλλά και σε κάθε διάστημα της μορφής $(\kappa\pi, \kappa\pi + \pi)$
- Είναι περιττή συνάρτηση , διότι $f(-x)=\sigma\phi(-x)=-\sigma\phi x=-f(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων
- Οι ευθείες $x=0$ και $x=\pi$ ονομάζονται ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f
- **Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\phi x$ δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της**



Μεθοδολογία :

1. Η συνάρτηση $f(x)=\rho \eta\mu\omega x$, $\rho>0$ και $\omega>0$

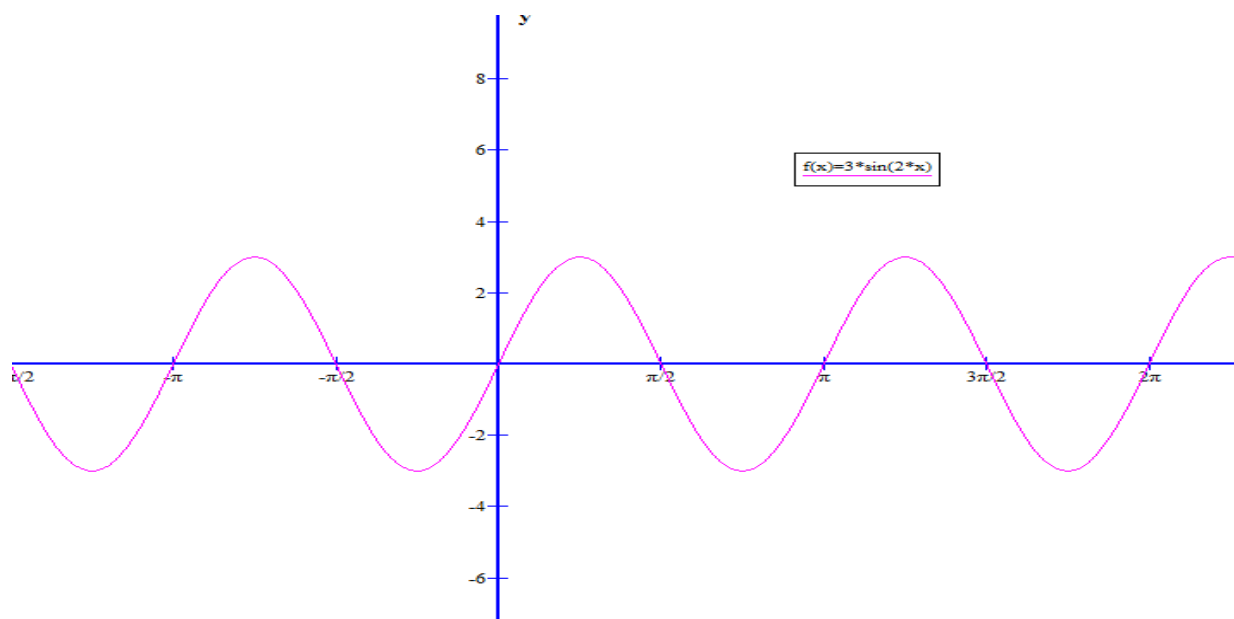
- Έχει πεδίο ορισμού το $A= \mathbb{R}$
- Είναι περιοδική με περίοδο $T=\frac{2\pi}{\omega}$
- Έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$
- Είναι περιττή
- Για να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα μιας περιόδου , δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ αφού πρώτα τις διαιρέσουμε με το ω

X	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x)=\rho \eta\mu\omega x$	0	ρ	0	$-\rho$	0

Π.χ. για την $f(x)=3\eta\mu 2x$ έχουμε :

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)=3 \eta\mu 2x$	0	3	0	-3	0

Και η γραφική της παράσταση είναι:



2. Η συνάρτηση $f(x)=\rho \sin \omega x$, $\rho > 0$ και $\omega > 0$

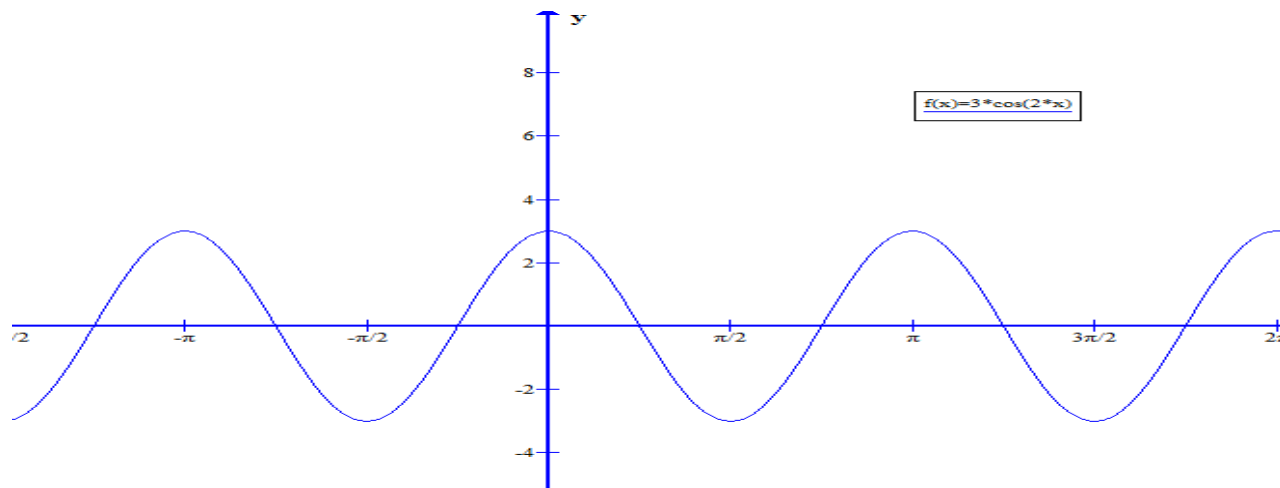
- Έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$
- Είναι περιοδική με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- Έχει μέγιστο το ρ και ελάχιστο το $-\rho$
- Είναι άρτια
- Για να χαράξουμε τη γραφική της παράσταση της $f(x)$ σε διάστημα μιας περιόδου, δίνουμε στο x τις βασικές τιμές $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ αφού πρώτα τις διαιρέσουμε με το ω

x	0	$\frac{\pi}{2\omega}$	$\frac{\pi}{\omega}$	$\frac{3\pi}{2\omega}$	$\frac{2\pi}{\omega}$
$f(x)=\rho \sin \omega x$	ρ	0	$-\rho$	0	ρ

Π.χ. για την $f(x)=3\sin 2x$ έχουμε :

X	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)=3 \text{ συν} 2x$	3	0	-3	0	3

Και η γραφική της παράσταση είναι:



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1. Αν $g(x)=r \cdot \eta\mu\omega x + \alpha$, τότε σχεδιάζουμε την $f(x)=r \cdot \eta\mu\omega x$ και μετατοπίζουμε τη γραφική παράσταση της C_f προς τα πάνω (αν $\alpha > 0$) ή προς τα κάτω (αν το $\alpha < 0$) κατά $|\alpha|$ μονάδες
2. Η συνάρτηση g έχει μέγιστο το $M=r+\alpha$ και ελάχιστο το $\mu=-r+\alpha$
3. Όμοια εργαζόμαστε και για την $h(x)=r \cdot \sigma\upsilon\nu\omega x$
4. Η γραφική παράσταση της $-f(x)$ είναι η συμμετρική της $f(x)$ ως προς τον άξονα $\chi'\chi$
5. Η γραφική παράσταση της $|f(x)|$ προκύπτει από την C_f , αν τα τμήματά της που είναι κάτω από τον $\chi'\chi$ τα ανεβάσουμε συμμετρικά πάνω από τον $\chi'\chi$

Βασικό παράδειγμα:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\pi - 3x) + \sigma\upsilon\nu\left[3\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right]$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f και να αποδειχθεί ότι : $f(x) = 2\eta\mu 3x$
- ii. Να βρεθούν τα ακρότατα της f
- iii. Να βρεθεί η περίοδος της f
- iv. Να χαραχθεί η γραφική παράσταση της f
- v. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $g(x) = -f(x)$ καθώς και της $f(x)+3$

Λύση:

- i. $A=\mathbb{R}$

$$\eta\mu(\pi-3\chi)=\eta\mu 3\chi$$

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu\left[3\left(\frac{\pi}{2}+\chi\right)\right] &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}+3\chi\right) = \sigma\upsilon\nu\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}+3\chi\right)\right] = \\ &= -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}+3\chi\right) = -\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi}{2}-(-3\chi)\right] = -\eta\mu(-3\chi) = \eta\mu 3\chi\end{aligned}$$

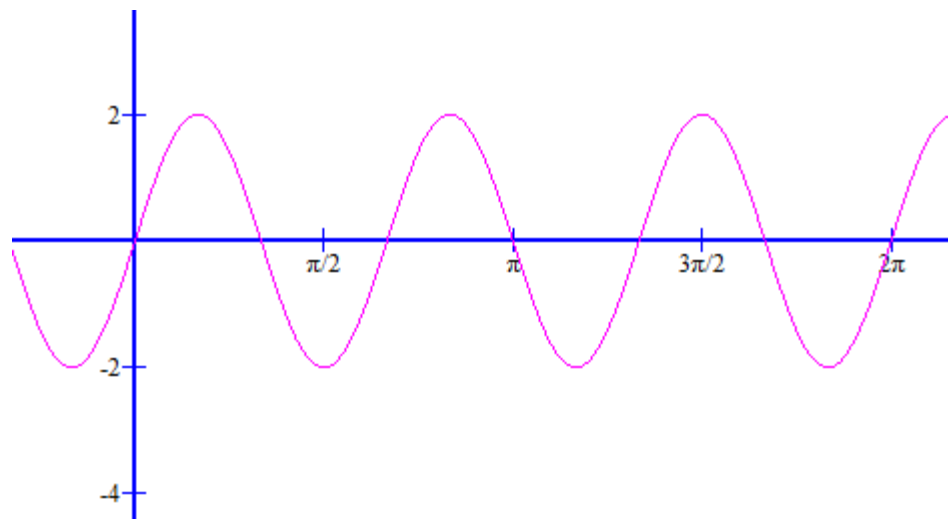
$$\text{Άρα } f(x) = \eta\mu(\pi - 3\chi) + \sigma\upsilon\nu\left[3\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right)\right] = \eta\mu 3\chi + \eta\mu 3\chi = 2\eta\mu 3\chi \text{ με } \rho=2 \text{ και } \omega=3$$

ii. Η f έχει μέγιστο το $M=2$ και ελάχιστο το $\mu=-2$

iii. Η f έχει περίοδο $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$

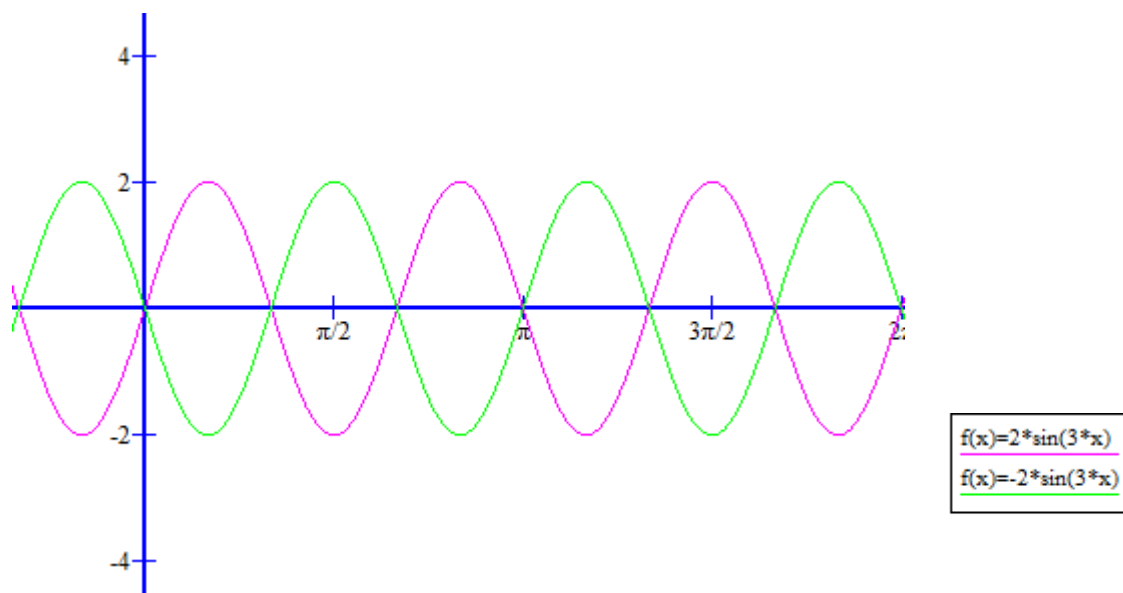
iv. Θα μελετήσουμε την f σε διάστημα μιας περιόδου

χ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0

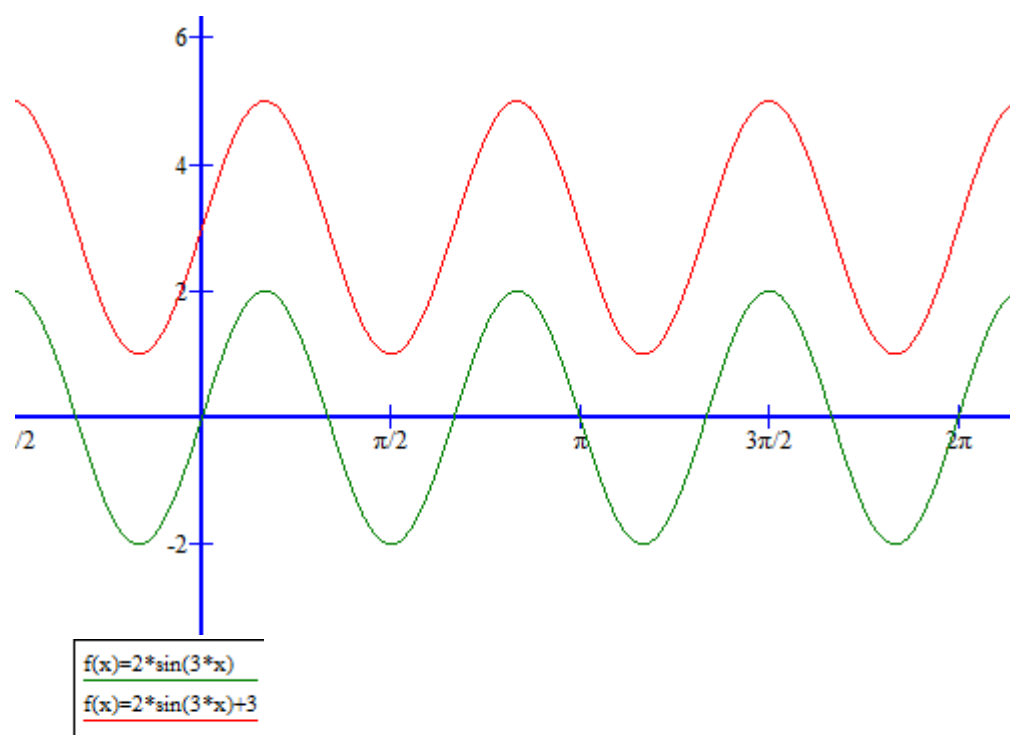


$$f(x)=2*\sin(3*x)$$

- v. Η γραφική παράσταση της $-f(x)$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της f , αν θεωρήσουμε τη συμμετρική της ως προς το άξονα $\chi'\chi$

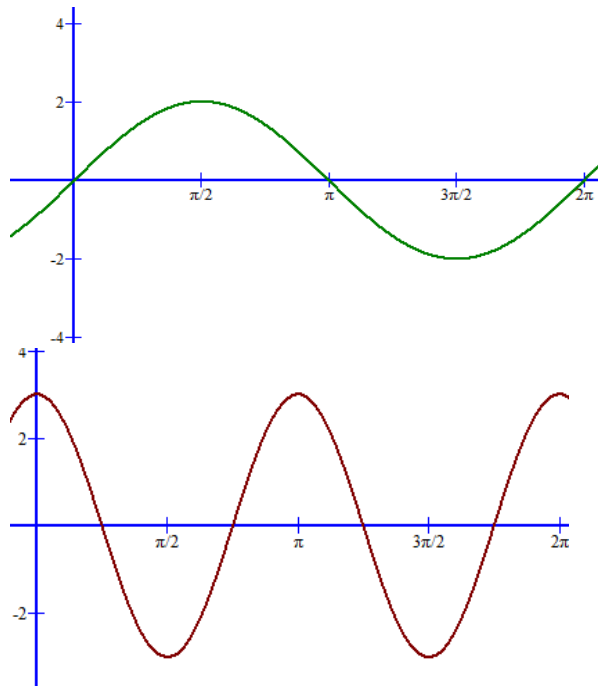


Ενώ η γραφική παράσταση της $f(x)+3$ προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της $f(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα πάνω. Δηλαδή:



Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές
 - i. $f(x) = \eta\mu 2\chi + \chi$
 - ii. $f(x) = 2\eta\mu\chi + \varepsilon\varphi\chi$
 - iii. $f(x) = \eta\mu 5\chi + \eta\mu 3\chi$
 - iv. $f(x) = \eta\mu 2\chi - \varepsilon\varphi\chi$
 - v. $f(x) = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + 1$
 - vi. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi$
 - vii. $f(x) = \frac{2+\sigma\upsilon\nu\chi}{3+\sigma\upsilon\nu 3\chi}$
 - viii. $f(x) = \frac{2+\eta\mu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu^2\chi}$
2. Να αποδείξετε ότι :
 - i. Η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi + 1$ έχει περίοδο τον αριθμό $T = 2\pi$
 - ii. Η συνάρτηση $f(x) = 3\varepsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi$ έχει περίοδο τον αριθμό $T = \pi$
 - iii. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2\chi$ έχει περίοδο τον αριθμό $T = \pi$
 - iv. Η συνάρτηση $f(x) = 1 - \eta\mu^4\chi$ έχει περίοδο τον αριθμό $T = \pi$
3. Να βρείτε το μέγιστο, το ελάχιστο καθώς και την περίοδο των συναρτήσεων
 - i. $f(x) = 4\eta\mu\chi$
 - ii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2\chi$
 - iii. $f(x) = -3\eta\mu 3\chi$
 - iv. $f(x) = -5\sigma\upsilon\nu 3\chi$
 - v. $f(x) = 5\eta\mu \frac{\chi}{2}$
 - vi. $f(x) = -5\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{3}$
4. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
 - i. $f(x) = \eta\mu\chi, g(x) = \eta\mu 2\chi, 0 \leq \chi \leq 2\pi$
 - ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\chi, g(x) = \sigma\upsilon\nu 3\chi, 0 \leq \chi \leq 2\pi$
 - iii. $f(x) = \eta\mu\chi, g(x) = 3\eta\mu\chi, h(x) = -\eta\mu\chi$
 - iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\chi, g(x) = 2\sigma\upsilon\nu\chi, h(x) = -\sigma\upsilon\nu\chi$
 - v. $f(x) = \eta\mu\chi, g(x) = \eta\mu\chi + 2, h(x) = \eta\mu\chi - 1$
 - vi. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu\chi, g(x) = 2\sigma\upsilon\nu\chi + 1, h(x) = 2\sigma\upsilon\nu\chi - 1$
 - vii. $f(x) = 2\eta\mu\chi, g(x) = 2|\eta\mu\chi|$
 - viii. $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 3\chi, g(x) = 2|\sigma\upsilon\nu 3\chi|$
5. Να βρείτε τις συναρτήσεις που έχουν γραφικές παραστάσεις :



6. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 3\eta\mu\frac{x}{2}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f
 - Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f
 - Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f
 - Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και της $g(x) = -f(x)$ στο ίδιο σύστημα αξόνων
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu 2x$
- Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f
 - Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f
 - Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , της $-f$ καθώς και της $|f|$
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(\pi - 2x) + \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2x)$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3\eta\mu 2x$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f
 - Να βρείτε την περίοδο , το μέγιστο και το ελάχιστο της συνάρτησης f
 - Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f
 - Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = 4$ έχει λύση
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu 2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi + 2x)$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού A , την περίοδο και τα ακρότατα της f
 - Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f
 - Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων :

- a. $g(x)=f(x)-2$
b. $h(x)=f(x)+1$
c. $k(x)=f(x-\frac{\pi}{3})$
d. $p(x)=f(x+\frac{\pi}{2})$
10. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \cdot \sin \frac{x}{3}$ διέρχεται από το σημείο $M(2\pi, -2)$
i. Να βρείτε την περίοδο της f
ii. Να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της f
iii. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f
11. Αν η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \sin \frac{x}{\beta}$ με $\alpha, \beta > 0$, έχει μέγιστο το 2 και περίοδο $T=6\pi$, να βρείτε :
i. Τον τύπο της συνάρτησης
ii. Τις τιμές $f(2\pi)$ και $f(\frac{\pi}{2})$
12. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu 2x$, με $\alpha > 0$, η οποία έχει μέγιστο το 3.
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και την τιμή του α
ii. Να βρείτε την περίοδο της f
iii. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των f και g με $g(x) = -f(x)$
iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=4$ είναι αδύνατη
13. Αν ισχύει $\frac{\pi}{4} < \chi_1 < \chi_2 < \frac{\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς :
i. $\eta\mu 2\chi_1$ και $\eta\mu 2\chi_2$
ii. $\sin(\frac{3\pi}{4} + \chi_1)$ και $\sin(\frac{3\pi}{4} + \chi_2)$
14. Αν ισχύει $2\pi < \chi_1 < \chi_2 < 3\pi$ να συγκρίνετε τους αριθμούς :
iii. $\eta\mu \frac{\chi_1}{2}$ και $\eta\mu \frac{\chi_2}{2}$
iv. $\sin \frac{\chi_1}{2}$ και $\sin \frac{\chi_2}{2}$
15. Αν $\chi \in [\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}]$, να λύσετε την ανίσωση : $\sin(4\chi) < \sin(2\chi + \frac{\pi}{3})$
16. Αν $\chi \in [0, \frac{\pi}{8}]$, να λύσετε την ανίσωση : $\eta\mu(3\chi + \frac{\pi}{8}) > \eta\mu(\chi + \frac{\pi}{4})$
17. Αν $\chi \in [\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}]$, να λύσετε την ανίσωση : $\sin(4\chi + \frac{\pi}{3}) - \sin(\chi + \frac{2\pi}{3}) > 0$
18. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\eta\mu(\chi + \frac{\pi}{2}) + \eta\mu(\chi - \pi) + 1}{3 + \eta\mu(\chi + \pi) + \sin(\chi - \pi)}$
i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

- ii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f
 - iii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $T=2\pi$ είναι περίοδος της f
19. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha + (2\beta - 4)\eta\mu \frac{x}{2}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 2$ έχει μέγιστο το 3 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$
- ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=3$
 - iii. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 4\pi]$
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\beta - \alpha \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 2 και τέμνει τον άξονα y στο 1, να βρείτε τα α και β

3.5 Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων :

$$\checkmark \quad \eta\mu\chi = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta \\ \chi = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark \quad \varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark \quad \sigma\phi\chi = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Παραδείγματα:

Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $2\eta\mu\chi = \sqrt{2}$ ii) $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ iii) $\varepsilon\phi\chi = 1$ iv) $\sigma\phi\chi = \sqrt{3}$

Λύση:

$$\text{i) } 2\eta\mu\chi = \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \chi = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii) } \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii) } \varepsilon\phi\chi = 1 \Leftrightarrow \varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iv) } \sigma\phi\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi\chi = \sigma\phi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Ειδικές μορφές τριγωνομετρικών εξισώσεων :

$$\checkmark \quad \eta\mu f(\chi) = \eta\mu g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\chi) = 2\kappa\pi + g(x) \\ f(\chi) = 2\kappa\pi + \pi - g(x) \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}, \text{ λύνοντας τις τελευταίες ως προς } \chi$$

✓ $\text{συν}f(x) = \text{συν}g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi - g(x) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}, \text{ λύνοντας τις τελευταίες ως προς } x$

✓ $\text{εφ}f(x) = \text{εφ}g(x) \Leftrightarrow f(x) = k\pi + g(x), k \in \mathbb{Z}, \text{ λύνοντας την τελευταία ως προς } x$
(λαμβάνουμε τους περιορισμούς $\text{συν}f(x) \neq 0$ δηλαδή $f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και $\text{συν}g(x) \neq 0$)

δηλαδή $g(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ και στο τέλος κάνουμε συναλήθευση των περιορισμών και των λύσεων που βρήκαμε)

✓ $\text{σφ}f(x) = \text{σφ}g(x) \Leftrightarrow f(x) = k\pi + g(x), k \in \mathbb{Z}, \text{ λύνοντας την τελευταία ως προς } x$
(λαμβάνουμε τους περιορισμούς $\eta\mu f(x) \neq 0$ δηλαδή $f(x) \neq k\pi$ και $\eta\mu g(x) \neq 0$ δηλαδή $g(x) \neq k\pi$ και στο τέλος κάνουμε συναλήθευση των περιορισμών και των λύσεων που βρήκαμε)

Παραδείγματα:

1. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

Λύση:

$$\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + x \\ x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \pi - \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{αδύνατη} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{16}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $\text{εφ}3x = \text{εφ}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Λύση :

$$\text{εφ}3x = \text{εφ}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

αρχικά παίρνουμε περιορισμούς :

✓ $\text{συν}3x \neq 0 \Leftrightarrow \text{συν}3x \neq \text{συν}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 3x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{3}k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

✓ και $\text{συν}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \text{συν}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq \text{συν}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \neq k\pi + \frac{4\pi}{6} \\ x \neq k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

έπειτα λύνουμε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi 3\chi = \varepsilon\varphi\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 3\chi = \kappa\pi + \chi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2\chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{2}\kappa\pi - \frac{\pi}{12}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ δεκτή}$$

Παρατήρηση:

1. απαλείφουμε το πρόσημο - από έναν τριγωνομετρικό αριθμό με χρήση των τύπων :

$$-\eta\mu\chi = \eta\mu(-\chi), -\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu(\pi - \chi), -\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi(-\chi), -\sigma\varphi\chi = \sigma\varphi(-\chi)$$

2. Μετατρέπουμε $\eta\mu\omega \leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega$ και $\varepsilon\varphi\omega \leftrightarrow \sigma\varphi\omega$ με χρήση των τύπων :

$$\begin{aligned}\eta\mu\chi &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right), \sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right), \varepsilon\varphi\chi = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right), \sigma\varphi\chi \\ &= \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right)\end{aligned}$$

3. Όταν σε μία εξίσωση έχουμε περισσότερους από έναν τριγωνομετρικό αριθμό τότε με χρήση των ταυτοτήτων : $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$, $\varepsilon\varphi\chi \cdot \sigma\varphi\chi = 1$, $\varepsilon\varphi\chi =$

$$\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}, \sigma\varphi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$$

Καταλήγουμε σε μια εξίσωση με έναν τριγωνομετρικό αριθμό

4. Σε κάποιες περιπτώσεις η διαίρεση με $\eta\mu\omega$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega$ μπορεί να οδηγήσει σε εξισώσεις που περιέχουν μόνο $\varepsilon\varphi\omega$ ή μόνο $\sigma\varphi\omega$ (προσοχή στους περιορισμούς)

Βασικά παραδείγματα:

- 1) Να λυθεί η εξίσωση : $2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 2\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi$

Λύση:

Μεταφέρουμε όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και **παραγοντοποιούμε** :

$$\begin{aligned}2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 1 &= 2\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi \Leftrightarrow \\ 2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 1 - 2\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi &= 0 \Leftrightarrow \\ 2\sigma\upsilon\nu\chi \cdot (\eta\mu\chi - 1) + (\eta\mu\chi - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (\eta\mu\chi - 1)(2\sigma\upsilon\nu\chi + 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \eta\mu\chi - 1 = 0 \text{ ή } 2\sigma\upsilon\nu\chi + 1 &= 0 \Leftrightarrow \\ \eta\mu\chi = 1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\chi &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\checkmark \quad \eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark \quad \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

2) Να λυθούν οι εξισώσεις : α) $2\eta\mu^2\chi + 3\eta\mu\chi - 2 = 0$ β) $1 - \sigma\upsilon\nu\chi = 2\eta\mu^2\chi$

Λύση:

Οι παραπάνω εξισώσεις θα λυθούν με αντικατάσταση

α) Θέτω $\eta\mu\chi = \omega$ οπότε η πρώτη εξίσωση γίνεται : $2\omega^2 + 3\omega - 2 = 0$

Η οποία είναι μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού και λύνεται με τη βοήθεια της διακρίνουσας

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 9 + 16 = 25$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} \omega_1 = \frac{1}{2} \\ \omega_2 = -2 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \omega_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \chi = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \quad \omega_2 = -2 \Leftrightarrow \eta\mu\chi = -2, \text{ αδύνατη διότι } -1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$$

β) Αρχικά αντικαθιστούμε το $\eta\mu^2\chi = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi$, ώστε στην εξίσωση να εμφανίζεται μόνο το $\sigma\upsilon\nu\chi$ και έχουμε :

$$1 - \sigma\upsilon\nu\chi = 2\eta\mu^2\chi \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\chi = 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi) \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu\chi = 2 - 2\sigma\upsilon\nu^2\chi \\ \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0$$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu\chi = \omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται :

$$2\omega^2 - \omega - 1 = 0, \Delta = 9 \text{ οπότε } \omega_1 = 1, \omega_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = 1 \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 0 \quad \sigma\upsilon\nu\chi = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$$

$$\chi = 2\kappa\pi \pm 0 \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\chi = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

3) Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu\chi \cdot \epsilon\phi\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi$

Λύση:

$$\eta\mu\chi \cdot \epsilon\phi\chi = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi \Leftrightarrow \eta\mu\chi \cdot \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi$$

(Αρχικά παίρνω περιορισμούς $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = 1 + \sigma\upsilon\nu\chi &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \Leftrightarrow \eta\mu^2\chi = \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \\ &\Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = 0 \Leftrightarrow -2\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi + 1 = 0 \end{aligned}$$

Θέτω $\sigma\upsilon\nu\chi = \omega$ οπότε έχω $-2\omega^2 - \omega + 1 = 0, \Delta = 9$ οπότε $\omega_1 = -1, \omega_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ll} \sigma\upsilon\nu\chi = -1 & \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\pi & \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi & \chi = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ (είναι δεκτές)} \end{array}$$

4) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \epsilon\phi\chi = 2$

Λύση:

το κλάσμα $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$ και η $\epsilon\phi\chi$ ορίζονται όταν $\sigma\upsilon\nu\chi \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$

θα κάνουμε την αντικατάσταση $1 = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi$, οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \epsilon\phi\chi = 2 &\Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \epsilon\phi\chi = 2 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \epsilon\phi\chi \\ &= 2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\epsilon\phi^2\chi + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \epsilon\phi\chi = 2 \Leftrightarrow 3\epsilon\phi^2\chi + 3 - 2\sqrt{3}\epsilon\phi\chi - 6 = 0 \Leftrightarrow 3\epsilon\phi^2\chi - 2\sqrt{3}\epsilon\phi\chi - 3 = 0$$

Θέτω $\epsilon\phi\chi = \omega$ οπότε έχω: $3\omega^2 - 2\sqrt{3}\omega - 3 = 0, \Delta = 48, \omega_1 = \sqrt{3}, \omega_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\checkmark \quad \omega_1 = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\checkmark \quad \omega_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z} \text{ (δεκτές)}$$

5) Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu 3\chi = \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right)$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$

Λύση:

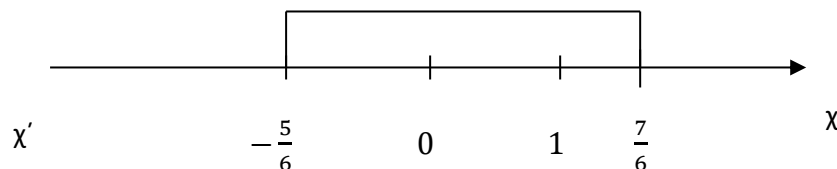
$$\eta\mu 3\chi = \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\chi = 2\kappa\pi + \chi - \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 3\chi = 2\kappa\pi + \pi - \chi + \frac{\pi}{3} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ 4\chi = 2\kappa\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ \chi = \frac{1}{2}\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Πρέπει τώρα να βρούμε ποιές από τις παραπάνω λύσεις ανήκουν στο διάστημα $(-\pi, \pi)$. Δηλαδή για ποιά χ ισχύει: $\chi \in (-\pi, \pi) \Leftrightarrow -\pi < \chi < \pi$

✓ Για τις λύσεις $\chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ έχουμε:

$$-\pi < \kappa\pi - \frac{\pi}{6} < \pi \Leftrightarrow -\pi + \frac{\pi}{6} < \kappa\pi < \pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} < \kappa\pi < \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{6} < \kappa < \frac{7}{6}$$



Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$ άρα οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το κ είναι $\kappa=0$ ή $\kappa=1$

✚ Για $\kappa=0$ $\chi = -\frac{\pi}{6}$

✚ Για $\kappa=1$ $\chi = \frac{5\pi}{6}$

✓ Για τις λύσεις $\chi = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, έχουμε: $-\pi < \chi < \pi \Leftrightarrow -\pi < \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow$

$$-\pi - \frac{\pi}{3} < \frac{\kappa\pi}{2} < \pi - \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{4\pi}{3} < \frac{\kappa\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{8}{3} < \kappa < \frac{4}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{άρα } \kappa = -2, -1, 0, 1$$

✚ Για $\kappa=-2$ $\chi = -\frac{2\pi}{3}$

✚ Για $\kappa=-1$ $\chi = -\frac{\pi}{6}$

✚ Για $\kappa=0$ $\chi = \frac{\pi}{3}$

✚ Για $\kappa=1$ $\chi = \frac{5\pi}{6}$

Ασκήσεις στις τριγωνομετρικές εξισώσεις :

1. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{7}$ β) $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{10}$ γ) $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\frac{\pi}{12}$ δ) $\sigma\varphi\chi = \sigma\varphi\frac{\pi}{7}$
ε) $\eta\mu\chi = -\eta\mu\frac{\pi}{12}$ στ) $\sigma\upsilon\nu\chi = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{7}$ ζ) $\epsilon\varphi\chi = -\epsilon\varphi\frac{\pi}{8}$ η) $\sigma\varphi\chi = -\sigma\varphi\frac{\pi}{5}$

2. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$ β) $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2}$ γ) $\epsilon\varphi\chi = 1$ δ) $\sigma\varphi\chi = \sqrt{3}$ ε) $\eta\mu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ στ) $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{1}{2}$
ζ) $\eta\mu\chi = -3$ η) $\sigma\upsilon\nu\chi = 5$ θ) $\epsilon\varphi\chi = -\sqrt{3}$ ι) $\sigma\varphi\chi = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}$ β) $\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\frac{3\pi}{5} = 0$ γ) $\epsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\frac{\pi}{10} = 0$ δ) $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{5}\right) + \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10} = 0$

4. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu 2\chi = \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{8}\right)$ β) $\sigma\upsilon\nu 3\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)$ γ) $\epsilon\varphi\chi = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6} - \chi\right)$ δ) $\eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{5}\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right)$

5. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $(\eta\mu\chi + 1)(\sigma\upsilon\nu\chi + 1) = 0$ β) $(\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + 1)(\eta\mu\chi - \sqrt{3}) = 0$
γ) $(\sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi\chi + 3)(\sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi\chi - 1) = 0$ δ) $(2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\chi + 3)(\sqrt{5} + 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\chi) = 0$

6. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ β) $\sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ γ) $2\eta\mu\chi \cdot \epsilon\varphi\chi = \sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi\chi$
δ) $2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi = -\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi$ ε) $2\eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = \sigma\upsilon\nu\chi - 2\eta\mu\chi$
στ) $\sigma\varphi\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + 1 = \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\varphi\chi$ ζ) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu\chi \cdot \epsilon\varphi\chi - 1 = \eta\mu\chi - \sqrt{3} \cdot \epsilon\varphi\chi$
η) $2\sqrt{3} \cdot \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - 6\sigma\upsilon\nu\chi = 3 - \sqrt{3} \cdot \eta\mu\chi$

7. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $4\eta\mu^2\chi - 1 = 0$ β) $4\sigma\upsilon\nu^2\chi - 3 = 0$ γ) $2\sigma\upsilon\nu\chi \cdot \eta\mu^2\chi = \sigma\upsilon\nu\chi$ δ) $\eta\mu\chi \cdot \epsilon\varphi^2\chi = 3\eta\mu\chi$

ε) $\sin^3 \chi - \sin \chi = 0$ στ) $4\eta\mu^3 \chi = 3\eta\mu \chi$

8. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $\eta\mu^2 \chi - \eta\mu^2 \left(\chi - \frac{\pi}{4} \right) = 0$ β) $\sin^2 \left(\chi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin^2 \chi$ γ) $\eta\mu^2 \chi = \sin^2 3\chi$ δ) $\eta\mu^3 \chi = \eta\mu \chi \cdot \sin^2 \chi$

9. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $2\sin^2 \chi + 3\sin \chi + 1 = 0$ β) $4\eta\mu^2 \chi - 8\eta\mu \chi + 3 = 0$ γ) $2\sin^2 \chi + (\sqrt{3} - 2)\sin \chi - \sqrt{3} = 0$

δ) $\varepsilon\varphi^2 \chi - (\sqrt{3} - 1)\varepsilon\varphi \chi - \sqrt{3} = 0$ ε) $4\eta\mu^2 \chi - 2(\sqrt{3} - 1)\eta\mu \chi - \sqrt{3} = 0$

στ) $4\sin^2 \chi - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})\sin \chi - \sqrt{6} = 0$

10. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

α) $2\sin^2 \chi - \eta\mu \chi - 2 = 0$ β) $-2\eta\mu^2 \chi + \sin \chi + 1 = 0$ γ) $3\sin^2 \chi - \eta\mu \chi + 1 = 0$

δ) $2\eta\mu^2 \chi - (\sqrt{2} - 2)\sin \chi + \sqrt{2} - 2 = 0$

11. Να λύσετε κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις στο διάστημα που δίνεται :

α) $2\eta\mu \left(\chi - \frac{\pi}{3} \right) = 1$ στο $(0, 2\pi)$ β) $2\sin \left(2\chi + \frac{\pi}{6} \right) + \sqrt{3} = 0$ στο $(-\pi, \pi)$

γ) $\sqrt{3} \cdot \varepsilon\varphi \left(\chi - \frac{\pi}{4} \right) = 1$ στο $(-\pi, 2\pi)$ δ) $\sqrt{3} \cdot \sigma\varphi \left(2\chi + \frac{\pi}{3} \right) + 3 = 0$ στο $(0, 2\pi)$

12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $3\varepsilon\varphi \chi = 2\sqrt{3} \cdot \eta\mu \chi$ β) $2\sin \chi \cdot \sigma\varphi \chi = 3$ γ) $\varepsilon\varphi \chi \cdot \eta\mu \chi = \frac{\sqrt{3}}{6}$ δ) $\sqrt{2} \cdot \sin \chi - \sigma\varphi \chi = 0$

13. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

α) $\sin \chi - \varepsilon\varphi \chi = \frac{1}{\sin \chi}$ β) $\frac{\sin \chi}{1 - \eta\mu \chi} - \varepsilon\varphi \chi = 2$ γ) $\frac{1}{\eta\mu^2 \chi} + 2\sqrt{3} \cdot \sigma\varphi \chi + 2 = 0$

14. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu \chi = \sin \chi$ β) $\eta\mu \chi + \sqrt{3} \cdot \sin \chi = 0$ γ) $\sqrt{3} \cdot \eta\mu^2 \chi - 2\eta\mu \chi \cdot \sin \chi - \sqrt{3} \cdot \sin^2 \chi = 0$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $5\epsilon\varphi^2\chi - 1 = \frac{\epsilon\varphi\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, στο $(0, \pi)$ β) $3\sigma\varphi^2\chi + 1 = \frac{3\sigma\varphi\chi}{\eta\mu\chi}$, στο $(0, \pi)$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\frac{\eta\mu\chi - 1}{\eta\mu\chi + 1} + \frac{4}{1 + \eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{\eta\mu\chi + 1}{\eta\mu\chi}$ β) $\frac{\eta\mu^2\chi - 3}{\eta\mu^2\chi + 2} + \frac{5 - \eta\mu^2\chi}{\eta\mu^2\chi - 2} = \frac{15}{\eta\mu^4\chi - 4}$
γ) $\epsilon\varphi\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$ δ) $\frac{1 + \eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1 + \eta\mu\chi} = 4$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $\frac{1}{1 - \eta\mu\chi} + \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{1}{1 + \eta\mu\chi}$ β) $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

18. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \left(\frac{1}{\eta\mu\chi} - \eta\mu\chi \right) \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} - \sigma\upsilon\nu\chi \right) (\epsilon\varphi\chi + \sigma\varphi\chi)$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή
- iii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = \eta\mu 2\chi$

19. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu^{2012} \left(3\chi - \frac{\pi}{2} \right) + \sigma\upsilon\nu^{2014} \left(\chi + \frac{\pi}{3} \right) = 0 \quad \text{όταν } \chi \in (\pi, 2\pi)$$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \eta\mu \left(\frac{2\chi}{3} \right) + \beta$, με $\chi \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ και $\beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο A(0,1) και η μέγιστη τιμή της f είναι το 3.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$
- ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 3\pi]$
- iii. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$, όταν $\chi \in [0, 3\pi]$

21. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu(\pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\chi) = 1$

3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών

Τύποι τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών

1. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

2. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu(-\beta) \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta\end{aligned}$$

3. $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sin\beta + \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha + \beta) &= \sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\beta + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \eta\mu\beta = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \eta\mu\beta\end{aligned}$$

4. $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sin\beta - \eta\mu\beta \cdot \sin\alpha$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned}\eta\mu(\alpha - \beta) &= \eta\mu[\alpha + (-\beta)] = \eta\mu\alpha \cdot \sin(-\beta) + \sin\alpha \cdot \eta\mu(-\beta) \\ &= -\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta - \sin\alpha \cdot \eta\mu\beta\end{aligned}$$

5. $\epsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi\beta}$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\epsilon\varphi(\alpha + \beta) &= \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta} = \frac{\frac{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}}{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta} - \frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\beta}} \\ &= \frac{\frac{\eta\mu\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\eta\mu\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\eta\mu\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{\eta\mu\beta}{\cos\beta}} = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\beta}{1 - \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi\beta}\end{aligned}$$

6. $\epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi\beta}{1 + \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi\beta}$

Απόδειξη:

$$\epsilon\varphi(\alpha - \beta) = \epsilon\varphi[\alpha + (-\beta)] = \frac{\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi(-\beta)}{1 - \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi(-\beta)} = \frac{\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi\beta}{1 + \epsilon\varphi\alpha \cdot \epsilon\varphi\beta}$$

7. $\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha}$

Απόδειξη:

$$\sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \eta\mu\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta} + \frac{\eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta}}{\frac{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta} + \frac{\sin\alpha \cdot \eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha \cdot \sin\beta}} = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha}$$

8. $\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$

Απόδειξη:

$$\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \sigma\varphi[\alpha + (-\beta)] = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi(-\beta) - 1}{\sigma\varphi(-\beta) + \sigma\varphi\alpha} = \frac{-\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta - 1}{-\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\beta - \sigma\varphi\alpha}$$

Βασικά παραδείγματα :

1. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$i) \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{9} \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{18} - \eta\mu \frac{2\pi}{9} \eta\mu \frac{5\pi}{18} \quad ii) \sigma\upsilon\nu \frac{19\pi}{20} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5} + \eta\mu \frac{19\pi}{20} \eta\mu \frac{\pi}{5}$$

$$iii) \eta\mu 80^\circ \eta\mu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 80^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ \quad iv) \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7}}{\eta\mu \frac{3\pi}{14}} + \frac{\eta\mu \left(-\frac{2\pi}{7}\right)}{\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{14}}$$

Λύση:

$$i) \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{9} \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{18} - \eta\mu \frac{2\pi}{9} \eta\mu \frac{5\pi}{18} = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{5\pi}{18} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{9\pi}{18} \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0$$

$$ii) \sigma\upsilon\nu \frac{19\pi}{20} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{5} + \eta\mu \frac{19\pi}{20} \eta\mu \frac{\pi}{5} = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{19\pi}{20} - \frac{\pi}{5} \right) = \sigma\upsilon\nu \left(\frac{15\pi}{20} \right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} \\ = \sigma\upsilon\nu \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$iii) \eta\mu 80^\circ \eta\mu 40^\circ - \sigma\upsilon\nu 80^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ = -(\sigma\upsilon\nu 80^\circ \sigma\upsilon\nu 40^\circ - \eta\mu 80^\circ \eta\mu 40^\circ)$$

$$= -\sigma\upsilon\nu(40^\circ + 80^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 120^\circ = -\sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$iv) \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7}}{\eta\mu \frac{3\pi}{14}} + \frac{\eta\mu \left(-\frac{2\pi}{7}\right)}{\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{14}} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{7} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{14} - \eta\mu \frac{2\pi}{7} \eta\mu \frac{3\pi}{14}}{\eta\mu \frac{3\pi}{14} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{14}} = \frac{\sigma\upsilon\nu \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{14} \right)}{\eta\mu \frac{3\pi}{14} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{14}} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{14}}{\eta\mu \frac{3\pi}{14} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{14}} \\ = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2}}{\eta\mu \frac{3\pi}{14} \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{14}} = 0$$

2. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$$i) \eta\mu \frac{7\pi}{12} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12} + \eta\mu \frac{\pi}{12} \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{12} \quad ii) \eta\mu \frac{17\pi}{18} \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{9} - \eta\mu \frac{4\pi}{9} \sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{18}$$

$$iii) \eta\mu 75^\circ \sigma\upsilon\nu(-15^\circ) - \eta\mu(-15^\circ) \sigma\upsilon\nu 75^\circ \quad iv) \frac{\varepsilon\varphi 60^\circ - \varepsilon\varphi 15^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 60^\circ \varepsilon\varphi 15^\circ}$$

Λύση:

$$i) \eta\mu \frac{7\pi}{12} \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12} + \eta\mu \frac{\pi}{12} \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{12} = \eta\mu \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right) = \eta\mu \frac{8\pi}{12} = \eta\mu \frac{2\pi}{3} = \eta\mu \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \eta\mu \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ii) \eta\mu \frac{17\pi}{18} \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{9} - \eta\mu \frac{4\pi}{9} \sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{18} = \eta\mu \left(\frac{17\pi}{18} - \frac{4\pi}{9} \right) = \eta\mu \frac{9\pi}{18} = \eta\mu \frac{\pi}{2} = 1$$

$$iii) \eta\mu 75^\circ \sigma\upsilon\nu (-15^\circ) - \eta\mu (-15^\circ) \sigma\upsilon\nu 75^\circ = \eta\mu 75^\circ \sigma\upsilon\nu 15^\circ + \eta\mu 15^\circ \sigma\upsilon\nu 75^\circ = \eta\mu (75^\circ + 15^\circ) \\ = \eta\mu 90^\circ = 1$$

$$iv) \frac{\varepsilon\varphi 60^\circ - \varepsilon\varphi 15^\circ}{1 + \varepsilon\varphi 60^\circ \varepsilon\varphi 15^\circ} = \varepsilon\varphi (60^\circ - 15^\circ) = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$$

3. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση

$$A = \frac{\varepsilon\varphi \left(3x - \frac{\pi}{5} \right) - \varepsilon\varphi \left(\frac{4\pi}{5} - 4x \right)}{1 + \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{5} - 3x \right) \varepsilon\varphi \left(4x - \frac{4\pi}{5} \right)}$$

Λύση:

$$A = \frac{\varepsilon\varphi \left(3x - \frac{\pi}{5} \right) - \varepsilon\varphi \left(\frac{4\pi}{5} - 4x \right)}{1 + \varepsilon\varphi \left(\frac{\pi}{5} - 3x \right) \varepsilon\varphi \left(4x - \frac{4\pi}{5} \right)} = \varepsilon\varphi \left[\left(3x - \frac{\pi}{5} \right) - \left(\frac{4\pi}{5} - 4x \right) \right] = \varepsilon\varphi (-\pi + 7x) \\ = -\varepsilon\varphi (\pi - 7x) = \varepsilon\varphi 7x$$

4. Να αποδείξετε ότι :

$$i) \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} \quad ii) \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta = \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}$$

Λύση:

$$i) \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} \\ = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta} = \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta$$

$$ii) \frac{\eta\mu(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} - \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta$$

Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς αθροίσματος

1. Ναδειχθεί ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες της γωνίας α :

α) $\sin(30+\alpha)\sin(30-\alpha)-\eta\mu(30+\alpha)\eta\mu(30-\alpha)$

β) $\eta\mu(30-\alpha)\sin(60+\alpha)+\eta\mu(60+\alpha)\sin(30-\alpha)$

2. Αν $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$ να αποδειχθεί ότι:

α) $\epsilon\phi\alpha\epsilon\phi\beta+\epsilon\phi\beta\epsilon\phi\gamma+\epsilon\phi\gamma\epsilon\phi\alpha=1$

β) $\sigma\phi\alpha+\sigma\phi\beta+\sigma\phi\gamma=\sigma\phi\alpha\sigma\phi\beta\sigma\phi\gamma$

3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu(x-\gamma)+\sin(x+\gamma)=(\eta\mu x+\sin x)(\sin\gamma-\eta\mu\gamma)$

β) $\sin(x+\gamma)\eta\mu(x-\gamma)=\eta\mu x\sin x-\eta\mu\gamma\sin\gamma$

γ) $\sin x+\sin(120^\circ+x)+\sin(240^\circ+x)=0$

δ) $(\sin x-\eta\mu x)\epsilon\phi(\frac{\pi}{4}+x)=\sin x+\eta\mu x$

ε) $\eta\mu(x+\frac{\pi}{6})+\eta\mu(x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\eta\mu x$

ζ) $\frac{\eta\mu(x-y)}{\sin x\sin y}=\epsilon\phi x-\epsilon\phi y$

η) $\epsilon\phi(\frac{\pi}{4}+\alpha)-\epsilon\phi(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2\epsilon\phi 2\alpha$

θ) $\sin(x+\gamma)\sin(x-\gamma)=\sin^2 x+\sin^2 \gamma-1$

4. Ναδειχθεί ότι:

α) $\frac{\eta\mu(x-y)}{\eta\mu x\cdot\eta\mu y}=\sigma\phi x-\sigma\phi y$ β) $\frac{2\eta\mu(x+y)}{\sin(x+y)+\sin(x-y)}=\epsilon\phi x+\epsilon\phi y$

5. Ναδειχθεί ότι:

α) $\epsilon\phi(45-x)=\frac{\sin x-\eta\mu x}{\sin x+\eta\mu x}$ β) $\epsilon\phi(x+y)\cdot\epsilon\phi(x-y)=\frac{\epsilon\phi^2 x-\epsilon\phi^2 y}{1-\epsilon\phi^2 x\cdot\epsilon\phi^2 y}$

6. Να αποδείξετε ότι:

α) $\epsilon\phi(\frac{\pi}{4}-x)=\frac{\sin x-\eta\mu x}{\sin x+\eta\mu x}$ β) $\epsilon\phi(\frac{\pi}{4}+x)=\frac{\sin x+\eta\mu x}{\sin x-\eta\mu x}$

7. Αν $x - y = 60^\circ$ και $\varepsilon\phi\gamma = \frac{2}{5}$ να βρεθεί η $\varepsilon\phi\chi$.
8. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ και $\varepsilon\phi\alpha = \frac{1}{3}$ να βρεθεί η $\varepsilon\phi\beta$.
9. Αν α, β θετικοί με $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ δείξτε ότι $(1 + \sigma\phi\alpha)(1 + \sigma\phi\beta) = 2$
10. Να δείξετε ότι η παράσταση $\sigma\upsilon\nu^2\chi - 2\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha + \chi) + \sigma\upsilon\nu^2(\alpha + \chi)$ είναι ανεξάρτητη του χ .
11. Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta$, τότε $\eta\mu^2(\alpha + \beta) = (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2$.
12. Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $2\sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{6}\right)$ β) $2\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{6}\right)$

3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί διπλάσιου τόξου

1) $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

Απόδειξη:

$$\eta\mu 2\alpha = \eta\mu(\alpha + \alpha) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$$

2) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$
 $= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$
 $= 1 - 2\eta\mu^2\alpha$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu(\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha\end{aligned}$$

3) $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Απόδειξη:

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \varepsilon\varphi(\alpha + \alpha) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

4) $\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$

Απόδειξη:

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\alpha - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\alpha}$$

Ασκήσεις στους τριγωνομετρικούς αριθμούς διπλάσιου τόξου

1. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες :

$$\alpha) \frac{\eta\mu 2x}{1-\sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi x \beta) \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\sigma\upsilon\nu 2x} = \sigma\phi^2 2x$$

$$\gamma) \frac{\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \epsilon\phi \frac{x}{2} \delta) \frac{1+\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu 2x}{1+\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\phi x$$

$$\epsilon) \frac{\sigma\phi x+1}{\sigma\phi x-1} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\eta\mu 2x} \zeta) \frac{2}{(1+\epsilon\phi x)(1+\sigma\phi x)} = \frac{\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$$

$$\eta) \eta\mu 2\alpha \sigma\phi\alpha + 2\eta\mu^2\alpha = 2$$

$$\theta) \sigma\phi\alpha - \epsilon\phi\alpha = 2\sigma\phi 2\alpha$$

2. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1+\eta\mu 2x} \quad \beta) \epsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$$

$$\gamma) \epsilon\phi(45^\circ + x) - \epsilon\phi(45^\circ - x) = 2\epsilon\phi 2x$$

3. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{1+\eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x} = \frac{1+\epsilon\phi x}{1-\epsilon\phi x} \quad \beta) \frac{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x} = 2\epsilon\phi 2x$$

4. Να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha) (\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y)^2 + (\eta\mu x - \eta\mu y)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x+y}{2}$$

$$\beta) (\eta\mu x + \eta\mu y)^2 + (\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y)^2 = 4\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x-y}{2}$$

5. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{\eta\mu 4x+\eta\mu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 4x+\sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\phi 2x \beta) \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2$$

$$\gamma) \frac{1+\sigma\upsilon\nu 4x+\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 4x+\eta\mu 2x} = \sigma\phi 2x \delta) \frac{4\sigma\phi x(\sigma\phi^2 x-1)}{(1+\sigma\phi^2 x)^2} = \eta\mu 4x$$

$$\epsilon) \frac{\epsilon\phi^2 2x - \epsilon\phi^2 x}{1 - \epsilon\phi^2 2x \cdot \epsilon\phi^2 x} = \epsilon\phi 3x \cdot \epsilon\phi x \quad \zeta) \frac{\sigma\phi^2 2x \cdot \sigma\phi^2 x}{\sigma\phi^2 x - \sigma\phi^2 2x} = \sigma\phi 3x \cdot \sigma\phi x$$

6. Να δείξετε ότι $\frac{\sigma\phi x+1}{\sigma\phi x-1} = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\eta\mu 2x}$

7. Αν $\pi < \gamma < \frac{3\pi}{2}$ και $25\eta\mu^2\gamma + 5\eta\mu\gamma - 12 = 0$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\eta\mu 2\gamma$ και $\sigma\upsilon\nu 2\gamma$.

8. Αν $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{1}{3}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ να υπολογιστούν το $\eta\mu 2\theta$ και $\eta\epsilon\phi 2\theta$.

9. Αν $3\sin^2x + 5\sin x - 2 = 0$ και $\eta\mu x > 0$, να υπολογιστούν το $\eta\mu 2x$ και το $\sin 2x$.

10. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sin 2x - 4\sin x - 5 = 0$

β) $\sin 2x = \sin^2 x$

γ) $\eta\mu 2x = 2\epsilon\phi x$ δ) $\eta\mu 2x = (\sin x - \eta\mu x)^2$

ε) $(\sin x + \eta\mu x)^2 + \eta\mu 2x = 0$

ζ) $2\eta\mu x \cdot \sin x - 3\eta\mu 2x = 0$

η) $\sin 2x + \sin x + 1 = 0$

θ) $\eta\mu 2x + \sin x = 0$

11. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sin 2x + 2\eta\mu^{\frac{x}{2}} = 0$

β) $\sin 2x - 2\eta\mu^{\frac{x}{2}} = 0$

γ) $2 - \sin^2 x = 4\sin^{\frac{x}{2}}$ δ) $2\sin^{\frac{x}{2}} = \sin^2 x + 1$

ε) $\epsilon\phi x - \eta\mu x = 2\eta\mu^{\frac{x}{2}}$ ζ) $\sin x = 2\eta\mu^{\frac{x}{2}} + 1$

12. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{3}\eta\mu x + \sin x = 0$ β) $\eta\mu x - \sqrt{3}\sin x = 2$

γ) $\eta\mu 2x + \sin 2x = \sqrt{2}$ δ) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$

ε) $\epsilon\phi x \cdot \epsilon\phi 2x = -3$

3.8 Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων στην τριγωνομετρία

1. α) Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{4}$ λύση της εξίσωσης $3\sin 4x + 3 = 0$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sin 4x$ με την ευθεία $y = -1$ (Μονάδες 15)

2. Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$

α) Να αποδείξετε ότι είτε $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω (Μονάδες 12)

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f ; (Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

4. Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $(2\sin x + 1) \cdot (5\sin x - 4) = 0$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\sin x = \frac{4}{5}$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x (Μονάδες 15)

5. Δίνονται οι γωνίες ω, θ για τις οποίες ισχύει: $\omega + \theta = 135^\circ$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\varepsilon\varphi(\omega + \theta) = -1$ (Μονάδες 10)

β) $\varepsilon\varphi\omega + \varepsilon\varphi\theta + 1 = \varepsilon\varphi\omega \cdot \varepsilon\varphi\theta$

(Μονάδες 15)

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

(Μονάδες 9)

7. **α)** Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

(Μονάδες 15)

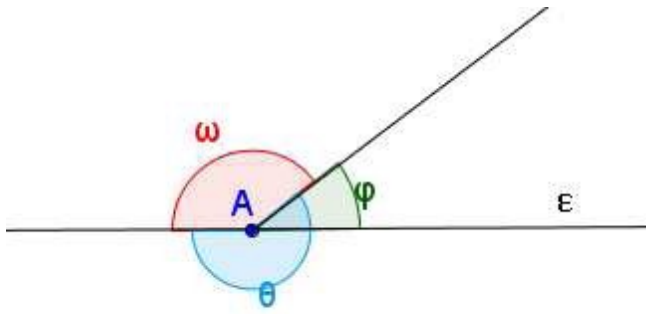
8. **α)** Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}, \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}, \sigma\upsilon\nu\frac{17\pi}{10}$ (Μονάδες 12)

β) Αν $\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2}$ να συγκρίνετε τους αριθμούς $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x_2\right)$

(Μονάδες 13)

9. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του παρακάτω σχήματος.



α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο των γωνιών θ και ω του σχήματος.

(Μονάδες 15)

10. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f (Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$					
$\sigma\upsilon\nu 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\nu 2x$					

(Μονάδες 13)

11. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu\left(\pi - 3x\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right), x \in \mathbb{R}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu(3x)$ (Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (Μονάδες 15)

12. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}, \quad x \neq 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \sigma\upsilon\nu x$ (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\eta\mu^2 x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$ (Μονάδες 13)

13. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $\eta\mu(\pi - x) - \eta\mu(\pi + x) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x (Μονάδες 13)

14. **α)** Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{2}{\eta\mu x}$ όπου $x \neq \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} + \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ (Μονάδες 12)

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\alpha + 1| \cdot \eta\mu(\beta\pi x)$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta > 0$, η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και περίοδο 4.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ ή $\alpha = -4$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 7)

β) Για $\alpha = 2$ και $\beta = \frac{1}{2}$

i. να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 3$ (Μονάδες 10)

ii. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 8]$
(Μονάδες 8)

16. Για τη γωνία ω ισχύει ότι $5\sigma\upsilon\nu 2\omega + 28\sigma\upsilon\nu \omega + 21 = 0$

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu \omega = -\frac{4}{5}$ (Μονάδες 10)

β) Αν για τη γωνία ω επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$, τότε:

i. να δείξετε ότι $\sin 2\omega = \frac{7}{25}$ και $\eta\mu 2\omega = -\frac{24}{25}$ (Μονάδες 8)

ii. να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{13 \cdot [\eta\mu^2 2\omega + \sin^2 2\omega] + 12}{18 \cdot \epsilon\phi 2\omega \cdot \sigma\phi 2\omega + 25 \cdot [\eta\mu 2\omega + \sin 2\omega]}$
(Μονάδες 7)

17. Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = -1$ και (x_0, y_0) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να βρείτε γωνία $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοια ώστε $x_0 = \sin \theta$ και $y_0 = \eta\mu \theta$ (Μονάδες 7)

γ) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω , τέτοια ώστε $x_1 = \sin \omega$ και $y_1 = \eta\mu \omega$ (Μονάδες 8)

18. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(t) = 8 + 6 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi \cdot t}{30}\right) \text{ και } 0 \leq t \leq 180$$

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;
(Μονάδες 4+2=6)

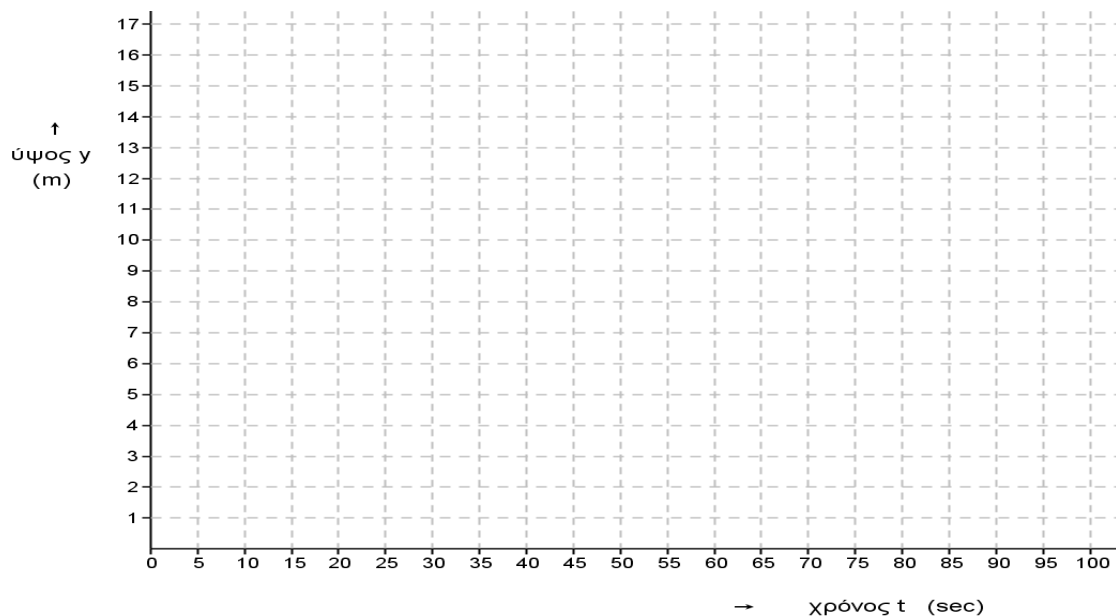
δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και:

i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$

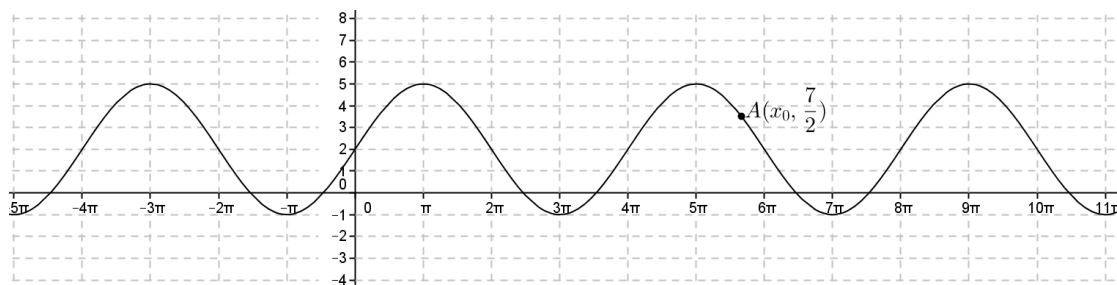
(Μονάδες 3)

ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$ (Μονάδες 5)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							



19. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x) + k$, ρ, ω, k πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

(Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω, k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3, \omega = \frac{1}{2}, k = 2$ να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου Α της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

20. **α)** Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \omega + \eta \mu \omega = -1$

και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (Μονάδες 13)

21. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \sin 2x$

α) Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών των συναρτήσεων f και g . Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, για $x \in [0, 2\pi]$

(Μονάδες 8)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f(x)									
g(x)									

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να προσδιορίσετε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $\sin 2x = \sin x$ (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ (Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση (1) στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να σημειώσετε πάνω στο σχήμα του ερωτήματος (α) τις συντεταγμένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 13)

22. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση: $h(t) = \alpha \cdot \sin(\omega t) + \beta$ όπου α, ω, β πραγματικές σταθερές. Όταν το ελατήριο ταλαντώνεται, το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο 100cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει

την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο-ηρεμία-μέγιστο-ηρεμία-ελάχιστο) είναι 6 sec.

α) Να δείξετε $\omega = \frac{\pi}{3}$. (Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των α , β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιγνιδιού από το πάτωμα 14sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

(Μονάδες 8)

δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$

(Μονάδες 6)

23. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση: $f(t) = 12\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13$

όπου t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$ (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποιά χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(Μονάδες 10)

Διαγώνισμα στην τριγωνομετρία

Θέμα 1°

1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται άρτια;
2. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$
3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος
 - i. Κάθε άρτια συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων
 - ii. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι άρτια
 - iii. Η γραφική παράσταση της $f(x)=x^2+2$ προέρχεται από την γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$ αν τη μετατοπίσουμε κατά μια μονάδα προς τα πάνω
 - iv. Αν $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$ τότε $\eta\mu\chi > 0$ και $\sigma\upsilon\nu\chi < 0$
 - v. $\eta\mu(2565^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Θέμα 2°

- i. Αν $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{4}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi \eta\mu\chi - \epsilon\phi\chi$
- ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta} + \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$
- iii. $\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega} - \frac{\eta\mu^2\omega}{1+\sigma\phi^2\omega} = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega$

Θέμα 3°

A. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα :

1.
$$\begin{cases} \chi + 3y = 4 \\ 5x - 2y = 3 \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \frac{2x-3y}{4} - \frac{2y-3x}{6} = \frac{17}{6} \\ \frac{x+y}{3} + \frac{2x-y}{4} = \frac{13}{3} \end{cases}$$
3.
$$\begin{cases} y - 2x^2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

B. Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα

$$\begin{cases} 5\chi - (2 - \lambda)y = 5 \\ (\lambda + 2)\chi + y = 5 \end{cases}$$

Θέμα 4°

i. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{29\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{39\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{17\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{27\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\phi\left(\frac{37\pi}{2} + \theta\right)}$$

ii. Να αποδείξετε ότι : $\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\varepsilon\varphi\omega} - \frac{\eta\mu\omega}{1+\sigma\varphi\omega} = \sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega$

iii. Αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) + \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right) = 3$ να υπολογίσεις την τιμή της παράστασης $A = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} - \omega\right) + \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4} + \omega\right)$

Πολυώνυμα



Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

4. Πολυώνυμα

3.1 Βασικές έννοιες πολυωνύμων

Βασικοί ορισμοί:

- Μονώνυμο του x :** Λέγεται κάθε παράσταση της μορφής αx^n , όπου α είναι πραγματικός αριθμός και $n \in \mathbb{N}^*$
- Πολυώνυμο του x :** Λέγεται κάθε παράσταση της μορφής $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ όπου $n \in \mathbb{N}^*$ και $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
 - ✓ Το a_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου και οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots, a_n$ λέγονται **συντελεστές** του πολυωνύμου $P(x)$
 - ✓ Τα μονώνυμα $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_0$ λέγονται **όροι** του πολυωνύμου $P(x)$
 - ✓ Κάθε πολυώνυμο της μορφής $P(x) = a_0$ λέγεται **σταθερό πολυώνυμο** π.χ. $P(x)=2013$
 - ✓ Το σταθερό πολυώνυμο $P(x)=0$ λέγεται **μηδενικό πολυώνυμο**
 - ✓ Για να είναι ένα πολυώνυμο μηδενικό πρέπει όλοι οι συντελεστές να είναι μηδέν
Δηλαδή $P(x)=0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \dots = a_0 = 0$
 - ✓ **Βαθμός** του πολυωνύμου λέγεται ο εκθέτης του μεγαλύτερου μη μηδενικού όρου δηλ. αν $a_n \neq 0$ τότε ο βαθμός του $P(x)$ είναι n π.χ. ο βαθμός του $P(x)=3x^2+6x+2014$ είναι 2
 - ✓ Το σταθερό πολυώνυμο είναι **μηδενικού βαθμού** και για το **μηδενικό πολυώνυμο** δεν ορίζεται βαθμός
- Δυο πολυώνυμα $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ και $Q(x) = b_\mu x^\mu + b_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + b_0$ $\mu \geq n$
Θα λέμε ότι είναι **ίσα** όταν $a_n = b_n, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$ και $b_{n+1} = \dots = b_\mu = 0$
- Αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $P(x)$** για $x=p$ είναι η τιμή του πολυωνύμου που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε το x με p δηλαδή το **$P(p)$**
- Πράξεις με πολυώνυμα :**
 - ✓ **Πρόσθεση – αφαίρεση** (αφού διώξω τις παρενθέσεις κάνω αναγωγή όμοιων όρων)
π.χ. $(3x^2 + 5x - 8) + (7x^3 - 4x^2 + 5x - 26) = 3x^2 + 5x - 8 + 7x^3 - 4x^2 + 5x - 26$
 $= 7x^3 + 3x^2 - 4x^2 + 5x + 5x - 8 - 26 = 7x^3 - x^2 + 10x - 34$
 - ✓ **Πολλαπλασιασμός** (κάνω επιμεριστικές και μετά αναγωγή όμοιων όρων)
π.χ. $(3x^2 + 5x - 8) \cdot (5x - 6) = 15x^3 - 18x^2 + 25x^2 - 30x - 40x + 48$
 $= 15x^3 + 7x^2 - 70x + 48$

Παρατήρηση:

- Ο βαθμός του αθροίσματος δύο μη μηδενικών πολυωνύμων (άν δεν είναι το άθροισμα μηδενικό πολυώνυμο) είναι ίσος ή μικρότερος από τον μέγιστο των βαθμών των δύο πολυωνύμων . $\deg(P(x)+G(x)) \leq \max\{\deg(P(x), \deg G(x))\}$
- Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών
 $\deg(P(x) \cdot G(x)) = \deg P(x) + \deg G(x)$

Βασικά παραδείγματα :

1. Αν $P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)x^2 - 2\mu + 1$ να βρείτε για ποιές τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ το πολυώνυμο είναι το μηδενικό πολυώνυμο

Λύση:

Για να είναι $P(x)=0$ πρέπει όλοι του οι συντελεστές να είναι ίσοι με το μηδέν

$$4\mu^3 - \mu = 0 \text{ και } \mu^2 - \frac{1}{4} = 0 \text{ και } -2\mu + 1 = 0$$

$$\mu(4\mu^2 - 1) = 0 \text{ και } \mu = \pm \frac{1}{2} \text{ και } \mu = \frac{1}{2}$$

$$\left(\mu = 0 \text{ ή } \mu = \pm \frac{1}{2}\right) \text{ και } \mu = \pm \frac{1}{2} \text{ και } \mu = +\frac{1}{2}$$

$$\text{Η κοινή λύση είναι η } \mu = \frac{1}{2}$$

2. Αν τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - a^2x^2 + (\beta - 2)x + \gamma - 5$, $Q(x) = (\delta - 1)x^4 + \alpha x^3 - x^2 + 5x + \alpha - 2$

Είναι ίσα να βρεθούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Λύση:

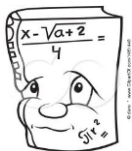
Για να είναι ίσα πρέπει να έχουν ίσους τους αντίστοιχους συντελεστές :

$$\delta - 1 = 0 \text{ και } \alpha = 1 \text{ και } -a^2 = -1 \text{ και } \beta - 2 = 5 \text{ και } \gamma - 5 = \alpha - 2$$

$$\delta = 1 \text{ και } \underline{\alpha = 1} \text{ και } (\underline{\alpha = 1} \text{ ή } \alpha = -1) \text{ και } \beta = 7 \text{ και } \gamma = 4$$

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \lambda x^2 + 4x + 2\lambda$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε το $x = -2$ να είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$

Λύση:



Εφόσον το $x=-2$ είναι ρίζα του $P(x)$ τότε $P(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^3 - \lambda(-2)^2 + 4(-2) + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow -8 - 4\lambda - 8 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow -2\lambda = 16 \Leftrightarrow \lambda = -8$

Ασκήσεις στα πολυώνυμα:

1. Αν τα πολυώνυμα :

$P(x) = 2x^3 + (\alpha - 2)x^2 - (\beta - 1)x - 6\beta$ και $Q(x) = \gamma x^3 + 3x^2 + \delta$ είναι ίσα ,
να βρείτε τις τιμές των α, β, γ και δ

2. ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x ;

$$a. 1 + 2\sqrt{x}, \quad b. 1 + x\sqrt{2}, \quad c. 1 + 2\eta\mu x, \quad d. 1 + x\eta\mu 2, \quad e. 1 + x/2, \quad f. 1 + 2/x$$

3. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = 2x^2 - 1, \quad Q(x) = x^3 + 2x$$

Να βρεθούν τα πολυώνυμα

$$P(x) + Q(x), \quad 2P(x) - Q(x)$$

$$P(x) \cdot Q(x), \quad [P(x)]^2 - Q(x)$$

4. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$, $Q(x)$ είναι ίσα , όταν

$$a. P(x) = 4x^2 - 8x^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$Q(x) = (\lambda x)^2 - (2x)^3$$

$$b. P(x) = (2\lambda + 1)x^3 + \lambda^2 x - 2 + \lambda$$

$$Q(x) = x(2\lambda^3 + \lambda + 1) + \lambda - 2$$

5. Για ποιες τιμές του λ το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda + 1)x^4 + (\lambda^2 + 3\lambda + 2)x^2 + \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

Είναι το μηδενικό πολυώνυμο;

6. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Να βρεθούν τα : $P(2x)$, $P(-x)$, $P(1+x)$, $P(|x|)$, $P(2x-3)$

7. Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = 2x^2 - x + 1, \quad Q(x) = 1 - x$$

Να βρεθούν τα: $Q[Q(x)]$, $Q[P(x)]$, $P[Q(x)]$, $P[P(x)]$, $Q[1-Q(x)]$, $Q[2-Q(x-1)]$

8. Βρείτε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με ρίζες το -2 και το $1/3$ και τέτοιο ώστε $P(0)=-4$.

9. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$$

Του οποίου δυο ρίζες είναι οι αριθμοί 1 και -2 .

A. να βρεθούν οι αριθμοί a και b .

B. να βρεθούν όλες οι ρίζες του $P(x)$

Γ. να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$

10. Αν δυο ρίζες του πολυωνύμου $P(x) = x^3 + ax^2 + (b - 2)x + 6$ είναι οι αριθμοί -1 και 2 τότε:

- i. Να βρείτε τα a και b
- ii. Να βρείτε και την τρίτη ρίζα του πολυωνύμου

11. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - 4$ το οποίο έχει ρίζα το $x=1$ και η τιμή του για

$x = -1$ είναι -6

- i. Να βρείτε τα a και b
- ii. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει άλλη ρίζα

12. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - x)x - x^3 + 1$

Να βρείτε το x ώστε το $P(x)$ να είναι :

- i. Σταθερό πολυώνυμο
- ii. Μηδενικό πολυώνυμο
- iii. Μηδενικού βαθμού

13. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει :

$$[P(x)]^2 + 2P(x) = 4x^2 - 1$$

14. Έστω τα πολυώνυμα $P(x)=x^3 - 2ax + 1$, $Q(x) = x^2 - x + 1$ και $H(x)$ για τα οποία ισχύει :

$$Q(x) \cdot H(x) = P(x)$$

- i. Να βρείτε τον βαθμό του $H(x)$
- ii. Να βρείτε το a και το $H(x)$
- iii. Να βρείτε το k ώστε το πολυώνυμο $P(P(kx))$ να έχει ρίζα το -1

15. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - 3x + 1)^3 - 2x + 3$

- i. Να βρείτε τον σταθερό όρο του $P(x)$
- ii. Να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών του $P(x)$

16. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και για το πολυώνυμο $Q(x)$ ισχύει

$$Q(x) = (2x^2 - x - 1) \cdot P(x) - 3P(3x - 2)$$

- i. Να βρείτε το άθροισμα των συντελεστών του $Q(x)$
- ii. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(3x - 5)$ έχει ρίζα το

3.2 Διαίρεση πολυωνύμων:

Η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης :

Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x) \quad (1)$$

Όπου $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$

- ✓ $\Delta(x)$: διαιρετέος $\delta(x)$: διαιρέτης $\pi(x)$: πηλίκο $\upsilon(x)$: υπόλοιπο
- ✓ Αν το $\upsilon(x)=0$ τότε η διαίρεση είναι **τέλεια** και το $\delta(x)$ ονομάζεται παράγοντας του $\Delta(x)$

Να γίνει η διαίρεση $(2x^3 - 7x^2 + 6) : (2x - 1)$ και να γραφεί η ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης :

Διαιρετέος	→	$2x^3 - 7x^2 + 0x + 6$		$2x - 1$	←	Διαιρέτης
		$ \begin{array}{r} - 2x^3 \quad + x \\ \hline -6x^2 + 0x + 6 \\ 6x^2 + 3x + 0 \\ \hline 3x + 6 \\ -3x - \frac{3}{2} \\ \hline \frac{9}{2} \end{array} $		$x^2 - 3x - \frac{3}{2}$	←	Πηλίκο
		Υπόλοιπο	→	$\frac{9}{2}$		

$$\Delta(x) = 2x^3 - 7x^2 + 0x + 6, \quad \delta(x) = 2x - 1, \quad \pi(x) = x^2 - 3x - \frac{3}{2}, \quad \upsilon(x) = \frac{9}{2}$$

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

$$2x^3 - 7x^2 + 0x + 6 = (2x - 1) \cdot \left(x^2 - 3x - \frac{3}{2} \right) + \frac{9}{2}$$

Ο Διαιρετέος και ο διαιρέτης κατατάσσονται κατά φθίνουσες δυνάμεις του x και αν κάποιος όρος λείπει τον αντικαθιστούμε με το $0x^n$

- Το πηλίκο είναι ένα άθροισμα μονωνύμων .
- Για να βρούμε το μονώνυμο που κάθε φορά προστίθεται στο πηλίκο :
 - ✓ διαιρούμε τον 1^ο όρο του διαιρετέου με τον 1^ο όρο του διαιρέτη
 - ✓ πολλαπλασιάζουμε το αντίστοιχο μονώνυμο με κάθε όρο του διαιρέτη και αφαιρώ το γινόμενο από τον διαιρετέο .
 - ✓ βρίσκω έτσι ένα μερικό υπόλοιπο και συνεχίζω κατά τον ίδιο τρόπο , θεωρώντας το μερικό υπόλοιπο ως νέο διαιρέτη
 - ✓ η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρις ότου να βρω υπόλοιπο μηδέν ή ο βαθμός του υπολοίπου να είναι μικρότερος του βαθμού του διαιρέτη

Θεώρημα 1^ο : Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=r$. Είναι δηλαδή $u=P(r)$

Απόδειξη:

Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ γράφεται :

$$P(x) = (x - r)\pi(x) + u(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x-r$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο u . Έτσι έχουμε :

$$P(x) = (x - r)\pi(x) + u$$

Και αντικαθιστώντας $x=r$ παίρνουμε :

$$P(r) = (r - r)\pi(r) + u = u$$

Θεώρημα 2^ο : Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-r$ αν και μόνο αν το r είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(r)=0$

Απόδειξη:

- ✓ Έστω ότι το $x-r$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε

$$P(x) = (x - r)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x=r$ παίρνουμε

$$P(r) = (r - r)\pi(r) = 0$$

Που σημαίνει ότι το r είναι ρίζα του $P(x)$

- ✓ Αντιστρόφως : Έστω ότι το r είναι ρίζα του $P(x)$ δηλαδή $P(r)=0$. Τότε από τη σχέση :

$$P(x) = (x - r)\pi(x) + P(r)$$

Παίρνουμε :

$$P(x) = (x - r)\pi(x)$$

Που σημαίνει ότι το $x-r$ είναι παράγοντας του $P(x)$

Παρατήρηση :

Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες :

- ✓ Το $x-r$ διαιρεί το $P(x)$
- ✓ Η διαίρεση του $P(x)$ με το $x-r$ είναι τέλεια
- ✓ Το $x-r$ είναι παράγοντας του $P(x)$
- ✓ Το r είναι ρίζα του $P(x)$
- ✓ Το $P(x)$ διαιρείται με το $x-r$
- ✓ Το $x-r$ είναι διαιρέτης του $P(x)$
- ✓ Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-r$ είναι 0

Αυτό σημαίνει ότι αν σε μια άσκηση αναφέρεται ένα από τα προηγούμενα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι $P(p)=0$

Σχήμα Horner

- ✓ Για να εφαρμόσουμε σχήμα Horner πρέπει τα μονώνυμα του Διαιρετέου να είναι διατεταγμένα κατά φθίνουσες δυνάμεις του x
- ✓ Αν κάποιος όρος λείπει τον αντικαθιστούμε με 0
- ✓ Το σχήμα Horner αποτελείται από τρεις γραμμές
 - Στην 1^η γραμμή βάζουμε τους συντελεστές του διαιρετέου και δεξιά τη ρίζα του διαιρέτη
 - Το 1^ο στοιχείο της πρώτης γραμμής το γράφουμε ως πρώτο στοιχείο στην 3^η γραμμή
 - Το πρώτο κουτάκι της 2^{ης} παραμένει κενό
 - Κάθε στοιχείο της 2^{ης} γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της 3^{ης} γραμμής με τη ρίζα του διαιρέτη p
 - Κάθε στοιχείο της 3^{ης} γραμμής (εκτός από το 1^ο) προκύπτει από το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της 1^{ης} και 2^{ης} γραμμής

Παράδειγμα :

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να γίνει η διαίρεση : $(x^3 + 3x^2 - 5x + 7) : (x - 2)$

Και να γραφτεί η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης

Λύση:

	Συντελεστές του διαιρετέου				
1 ^η	1	3	-5	7	2
2 ^η		2	10	10	
3 ^η	1	5	5	17	
	Συντελεστές πηλίκου				Υπόλοιπο

$$\Delta(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \quad \delta(x) = x - 2 \quad \pi(x) = x^2 + 5x + 5 \quad \upsilon(x) = 17$$

Οπότε η ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι :

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$$

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 7 = (x-2)(x^2 + 5x + 5) + 17$$

Προσδιορισμός παραμέτρων (χρησιμοποιώντας τα παραπάνω θεωρήματα)

Παραδείγματα:

1. Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε το $(\chi+1)$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου
 $P(\chi)=4\kappa\chi^{2012}+5\chi^{2014}-2013$

Λύση:

Το $\chi+1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου αν και μόνο αν $P(-1)=0$

$$4\kappa(-1)^{2012} + 5(-1)^{2014} - 2013 = 0$$

$$4\kappa + 5 - 2013 = 0$$

$$4\kappa = 2008$$

$$\kappa = 502$$

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^4 - \alpha\chi^2 + 2\chi + \beta$. Αν το 1 είναι ρίζα του $P(\chi)$ και η τιμή του $P(\chi)$ για $\chi=2$ είναι 5 να βρεθούν τα α και β

Λύση:

Το 1 είναι ρίζα του $P(\chi) \Rightarrow P(1) = 0 \Rightarrow 1^4 - \alpha \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + \beta = 0 \Rightarrow -\alpha + \beta = -3$ (1)

Η τιμή του $P(\chi)$ για $\chi=2$ είναι 5 $\Rightarrow P(2) = 5 \Rightarrow 2^4 - \alpha \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + \beta = 5 \Rightarrow -4\alpha + \beta = -15$ (2)

Και λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) έχουμε :

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = -3 \\ -4\alpha + \beta = -15 \end{cases} \xrightarrow[(-1)]{\cdot 1} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = -3 \\ 4\alpha - \beta = 15 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{matrix} 3\alpha = 12 \\ \alpha = 4 \text{ και } \beta = 7 \end{matrix}$$

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^3 + \alpha\chi^2 - 12\chi + \beta$. Αν το $\chi-3$ είναι παράγοντας του $P(\chi)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $\chi+1$ είναι 28 .Να βρεθούν τα α και β

Λύση:

$$\begin{cases} P(3) = 0 \\ P(-1) = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 + 9\alpha - 36 + \beta = 0 \\ -1 + \alpha + 12 + \beta = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha + \beta = 9 \\ \alpha + \beta = 17 \end{cases}$$

$$8\alpha = -8 \Rightarrow \alpha = -1$$

$$\text{και } \beta = 1$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ :

➤ Αν μας δίνεται ότι το $(\chi - \rho)^2$ είναι παράγοντας του $P(\chi)$ τότε συμπεραίνουμε ότι :

- Το $(\chi-\rho)$ είναι παράγοντας του $P(\chi) \Rightarrow P(\rho) = 0$
- Και το $(\chi-\rho)$ είναι παράγοντας του $\pi(\chi)$ όπου $\pi(\chi)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(\chi)$ με το $(\chi-\rho)$

Ασκήσεις στη διαίρεση πολυωνύμων

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις

i) $(-3x^4 + x^2 - 2x + 4) : (x^2 - x + 1)$

ii) $(-2x^5 - 3x^4 + 3x^2 - 2x + 3) : (2x^2 + 3x + 1)$

2. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i) $(2x^2 + 3x + 5) : (x + 4)$

ii) $(6x^4 - 13x^3 + 4x^2 - x + 1) : (2x^2 - x + 1)$

iii) $(2x^3 - x - 4) : (x^2 - x + 1)$

iv) $(3x^2 + 5x + 2) : (2x - 4)$

v) $(4x^3 - 5x^2 + 2x + 3) : (x^2 + 3x + 2)$

vi) $(x^2 + 3x) : (x^3 - 1)$

3. Να κάνετε την διαίρεση και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης .

$$(3x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 5x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$$

4. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις

i) $(x^6 + 2x) : (x^4 + 1)$

ii) $(4x^4 - 2ax^3 + 6a^2x^2 - 7a^3x - a^4) : (2x - a)$

iii) $(3x^3 - 5ax^2 + 3a^2x - 2a^3) : (3x^2 - 2ax + a^2)$

iv) $(x^4 + a^4) : (x + a)$

5. Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 4$$

να κάνετε τη διαίρεση

$$P(2x) : (x^2 - x + 2)$$

6. Να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων

i) $(-4x^3 - 5x^2 - x - 3) : (x + 2)$

ii) $(5x^4 - 2x^2 + 5) : (x - 2)$

iii) $(2x^5 - x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5) : (x - \frac{1}{2})$

iv) $(3x^2 - 6x^4 - x + 1) : (x + \frac{2}{3})$

7. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο των παρακάτω

i) $(2x^5 - 7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) : (x + 2)$

ii) $(-6x^4 + 5x^2 + 38x^2 + 17x - 12) : (x - 3)$

iii) $(x^3 + \sqrt{3}x^2 - \frac{5}{2}x - 4\sqrt{3}) : (x + \sqrt{3})$

διαιρέσεων

8. Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner , να κάνετε τις διαιρέσεις

i) $(3x^3 + 5x^2 - 6x - 2) : (x - 2)$

ii) $(x^4 + x^2 + 2) : (x + 1)$

iii) $(x^7 + 1) : (x - 1)$

iv) $(5x^4 - 3a^2x^2 + a^4) : (x + a)$

9. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης

$$[(3x - 5)^{2\nu} - (9 - x^3)^\nu + 3x - 1] : (x - 2)$$

10. Να εξετάσετε, αν τα πολυώνυμα $x-2$ και $x+1$ είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3 - x - 6$

11. Να δείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $(x-\rho)$

i. $P(x) = 5x^8 + 3x^4 + 2$

ii. $P(x) = -7x^6 - 3x^2 - 1$

12. Αν το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 + \alpha^2x^2 - \beta^2x - 2\alpha$ έχει παράγοντα το $x+1$ να βρείτε τα α και β

13. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο : $P(x) = -2(x + 5)^{21} + 3(x + 4)^{17} - x - 2$, έχει ως παράγοντες όλους τους παράγοντες του πολυωνύμου $Q(x) = x^2 + 9x + 20$

14. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + x + \beta$ έχει παράγοντα το $x+\alpha$, να δείξετε ότι έχει παράγοντα και το $x+\beta$

15. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \alpha^2 - 1$ έχει παράγοντα το $x(x+1)$, να βρείτε τα α και β
16. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 2\alpha$ έχει παράγοντα το $x^2 + 2x - 3$ να βρείτε τα α και β
17. Να βρείτε τα α και β , ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - (\alpha + \beta)x + \beta - 4$ να έχει παράγοντα το $(x+1)(x-3)$
18. Να βρείτε τα α και β , ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x + \beta$ να έχει παράγοντα το $x^2 - 1$
19. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x-2)(x+3)$
20. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x - 2)^2$
21. Να βρείτε τα α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - 5x^2 + \beta x + 9$ έχει παράγοντα το $(x - 3)^2$
22. Να αποδείξετε ότι :
- Το $2x-3$ είναι παράγοντας του $P(x) = 2x^3 + x^2 - 12x + 9$
 - Το $2x+1$ είναι παράγοντας του $P(x) = (2x + 3)^{10} + (8x)^5 + 2x^2 - 5x - 3$
23. Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + 8x + \alpha + 2$ έχει παράγοντα το $2x-1$. Να βρείτε :
- Την τιμή του α
 - Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x+3$
24. Το πολυώνυμο $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $3x-2$, ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(2x-1)$ είναι 3
- Να βρείτε τα α και β
 - Να εξετάσετε αν το $2x+3$ είναι παράγοντας του $P(x)$
25. Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + 12x^2 - x + \beta$ έχει παράγοντα το $4x^2 - 1$. Να βρείτε :
- Τους αριθμούς α και β
 - Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $2x+3$
26. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + 4$.
- Να υπολογιστούν τα α και β έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $(x - 2)^2$

ii. Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x): (x - 2)^2$ **(Β' Ευκλείδης)**

27. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ ισχύει $P(0)=3$, $P(-1)=13$, $P(2)=1$. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x): (x^3 - x^2 - 2x)$ **(Β' Ευκλείδης)**

3.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις

Πολυωνυμική εξίσωση : Πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0, \alpha_n \neq 0$

Ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης: Ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

Δηλαδή το $x=r$ είναι ρίζα $\Leftrightarrow P(r) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$

Π.χ.

Ο αριθμός $x=1$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x^2 + 5x - 5 = 0$ διότι $P(1)=0$ όπου

$$P(x) = x^3 - x^2 + 5x - 5$$

Θεώρημα ακέραιων ριζών:

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $r \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο r είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0 .

Απόδειξη:

Αν ο αριθμός $r \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε :

$$\begin{aligned} \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + \dots + \alpha_1 r + \alpha_0 &= 0 \Rightarrow \alpha_0 = -\alpha_n r^n - \alpha_{n-1} r^{n-1} - \dots - \alpha_1 r \\ \Rightarrow \alpha_0 &= r(-\alpha_n r^{n-1} - \alpha_{n-1} r^{n-2} - \dots - \alpha_1) \quad (1) \end{aligned}$$

Επειδή οι $r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι ακέραιοι, έχουμε ότι και ο αριθμός $-\alpha_n r^{n-1} - \alpha_{n-1} r^{n-2} - \dots - \alpha_1$ είναι ακέραιος.

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι ο r είναι διαιρέτης του α_0 .

Παρατήρηση :

- Μια πολυωνυμική εξίσωση n βαθμού έχει το πολύ n πραγματικές ρίζες
- Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι πιθανές ρίζες του πολυωνύμου
- Δεν είναι όλοι οι διαιρέτες του σταθερού όρου ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης
- Αν ένας αριθμός είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης τότε είναι διαιρέτης του σταθερού όρου

Θεώρημα ρητών ριζών :

Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές

Αν ο ρητός $\frac{k}{\lambda} \neq 0$ ($\frac{k}{\lambda}$ είναι ανάγωγο κλάσμα) είναι ρίζα της εξίσωσης τότε

- k είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0
- και το λ διαιρέτης του α_n

Πώς λύνω πολυωνυμικές εξισώσεις ;

Για να λύσω μια πολυωνυμική εξίσωση αρχικά παραγοντοποιώ το πολυώνυμο

(κοινός παράγοντας , ομαδοποίηση , αναπτύγματα ταυτοτήτων , τριώνυμα και τώρα πλέον και με Horner)

Και έπειτα χρησιμοποιώ την ισοδυναμία $P(x)Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$ ή $Q(x) = 0$

Ταυτότητες – παραγοντοποίηση

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ:

1. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
2. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
3. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
4. $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
5. $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
6. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
7. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

Μέθοδοι παραγοντοποίησης :

- 1) **Κοινός παράγοντας:** Αν σε κάθε όρο του αθροίσματος υπάρχει κάποιος κοινός παράγοντας , τότε βγαίνει έξω από μια παρένθεση
 - i) $2x - 2y = 2(x - y)$
 - ii) $x^2 - x = x(x - 1)$ iii) $4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$
- 2) **Ομαδοποίηση:** (κοινός παράγοντας ανά ομάδες)
 - i) $ax - ay + 2x - 2y = a(x - y) + 2(x - y) = (x - y)(a + 2)$
 - ii) $x^2 - x + 2x - 2 = x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$
- 3) **Ανάπτυγμα κάποιας γνωστής ταυτότητας :**
 - i) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$
 - ii) $x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$

4) Τριώνυμο : $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$

Βρίσκω τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει 2 ρίζες άνισες : $\chi_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται:

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi - \chi_1)(\chi - \chi_2)$$
- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα την $\chi_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται :

$$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = \alpha(\chi - \chi_0)^2$$
- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

Πρόσημο τριωνύμου

- Αν $\Delta > 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

χ	$-\infty$	χ_1	χ_2	$+\infty$
$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	Ομόσημο του α		Ετερόσημο του α	

- Αν $\Delta = 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

χ	$-\infty$	χ_0	$+\infty$
$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	Ομόσημο του α		Ομόσημο του α

- Αν $\Delta < 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	Ομόσημο του α	

Παραδείγματα :

- 1) Να λυθεί η εξίσωση: $\chi^3 - 2\chi^2 - 9\chi + 18 = 0$

Λύση:

$$\begin{aligned} \chi^3 - 2\chi^2 - 9\chi + 18 = 0 &\Leftrightarrow \chi^2(\chi - 2) - 9(\chi - 2) = 0 \Leftrightarrow (\chi - 2)(\chi^2 - 9) = 0 \Leftrightarrow \\ &(\chi - 2)(\chi - 3)(\chi + 3) = 0 \Leftrightarrow \chi - 2 = 0 \text{ ή } \chi - 3 = 0 \text{ ή } \chi + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = -3$$

2) Να λυθεί η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$

Λύση:

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$

Βρίσκω τους διαιρέτες του σταθερού όρου 6 : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι : $P(1)=0$ και κάνω Horner με το $\rho=1$

1	0	-7	6	1
↓	1	1	-6	
1	1	-6	0	

Συντελεστές πηλίκου

υπόλοιπο

Οπότε λύνω την ισοδύναμη εξίσωση :

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 6)(x - 1) &= 0 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \\ \Delta &= 25 \quad x = 1 \\ x &= 2 \text{ ή } x = -3 \text{ ή } x = 1 \end{aligned}$$

3) Να λύσετε την εξίσωση: $x^6 - 7x^2 - 6 = 0$

Λύση:

Θέτουμε $y = x^2$ οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται : $y^3 - 7y - 6 = 0$

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Το $x=-1$ είναι μια ρίζα της εξίσωσης οπότε με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

1	0	-7	-6	-1
↓	-1	1	6	
1	-1	-6	0	

Υπόλοιπο

Συντελεστές πηλίκου

Οπότε λύνω την ισοδύναμη εξίσωση

$$(y^2 - y - 6)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 3 \text{ ή } y = -2 \text{ ή } y = -1$$

- Αν $y=3$ τότε $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$
- Αν $y= - 2$ τότε $x^2 = -2$ αδύνατη
- Αν $y= - 1$ τότε $x^2 = -1$ αδύνατη

Πολυωνυμικές ανισώσεις

Για να λύσω μια πολυωνυμική ανίσωση $P(x) < 0$:

- ✓ παραγοντοποιώ το $P(x)$,
- ✓ βρίσκω το πρόσημό του και
- ✓ κρατάω τα διαστήματα που θέλω

παράδειγμα:

Να λυθεί η ανίσωση : $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 < 0$

Λύση:

Πιθανές ακέραιες ρίζες : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Για $x = -2$ έχω

1	2	3	6	-2
↓	-2	0	-6	
1	0	3	0	

Οπότε λύνουμε την ισοδύναμη ανίσωση : $(x^2 + 3)(x + 2) < 0$

Λύνω τις εξισώσεις : $x^2 + 3 = 0$ $x + 2 = 0$

$$\Delta < 0 \quad x = -2$$

Κατασκευάζω πίνακα προσήμου :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x^2 + 3$	+	+	
$x+2$	-	0	+
$(x^2 + 3)(x + 2)$	-	0	+

Άρα $x \in (-\infty, -2)$

Ασκήσεις στις πολυωνυμικές εξισώσεις :

1) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

i. $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$

ii. $x^5 = 9x^3$

iii. $x^4 + 27x = 0$

iv. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

v. $x^2(x - 2) = 9(x - 2)$

2) Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

i. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$

ii. $(2x - 5)^4 - 10(2x - 5)^2 + 9 = 0$

iii. $(x + 4)^6 + 16(x + 4)^3 + 64 = 0$

3) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες

i. $x^3 - 5x^2 + x - 2 = 0$

ii. $x^4 - 3x^2 + 7x + 1 = 0$

4) Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$

ii. $3x^3 - 5x^2 - 11x - 3 = 0$

iii. $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

iv. $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0$

v. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$

vi. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 8 = 0$

vii. $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$

viii. $x^4 + 4x^3 - 23x^2 + 18 = 0$

5) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $\frac{1}{2}x^3 + \frac{17}{6}x^2 + 3x - \frac{4}{3} = 0$

ii. $\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{12}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = 0$

iii. $x^4 - \frac{7}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} = 0$

iv. $\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = 0$

6) Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 6 = 0$

ii. $x^9 - 5x^6 - 22x^3 - 16 = 0$

iii. $x^6 - 13x^2 + 12 = 0$

- 7) Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + (3\alpha - 1)x - 8\alpha$ έχει παράγοντα το $x-2$
- Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$
- 8) Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 + \alpha x - \alpha + 1$
Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι -12
- Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$
- 9) Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \alpha$ έχει παράγοντα το $x+2$. Επίσης η διαίρεση του $P(x)$ με το $x-1$ αφήνει υπόλοιπο -18
- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$
- 10) Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 22x + 6\alpha$. Το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 + 2x - 3$
- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$
- 11) Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^4 - 4x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$. Το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 + 2x + 1$
- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$
- 12) Δίνεται η εξίσωση : $x^3 + \alpha x^2 + (2\alpha + 3)x - 3 = 0$, με $\alpha \in \mathbb{Z}$
- Να βρείτε για ποιές τιμές του $\alpha \in \mathbb{Z}$ η παραπάνω εξίσωση έχει μια ακέραια ρίζα
 - Για τη μικρότερη τιμή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την παραπάνω εξίσωση
- 13) Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x - 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ έχει δύο ακέραιες και αρνητικές ρίζες.
- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$
- 14) Το πολυώνυμο $P(x) = 6x^4 - x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ έχει δύο ακέραιες ρίζες.
- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

15) Το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - \alpha x^3 - 9x^2 + 9\alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το $x-3$

- i. Να αποδείξετε ότι $\beta=0$
- ii. Αν το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι 2 να βρείτε το α

16) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 - 11x - 30}$

ii) $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^6 - 3x^4 - 6x^2 + 8}$

17) Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^4 - 15x^2 + 10x + 24}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

18) Να βρείτε τα σημεία τομής των παρακάτω συναρτήσεων με τον άξονα x'

- i) $f(x) = 3x^3 + 8x^2 - 15x + 4$
- ii) $f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 9x - 6$

19) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g :

- i) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 7x$ και $g(x) = 2x^3 + x^2 + 6$
- ii) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 7$ και $g(x) = x^3 + 5x^2 - 5x - 3$

20) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 11x - 2\alpha$ διέρχεται από το σημείο $M(-1,6)$

- i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
- ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'

21) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης : $f(x) = 23 + \alpha x^2 - 5x - \alpha - 2$

Τέμνει τον άξονα y' στο σημείο με τεταγμένη 6

- i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
- ii) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x'

22) Να λυθούν οι ανισώσεις :

- i) $(x - 2)(x^2 + 2x - 3) > 0$
- ii) $(x - 3)(x^2 - 4x + 3) \leq 0$
- iii) $(x^2 + 3x - 4)(x^2 - 3x + 2) < 0$
- iv) $(-x^2 + 8x - 12)(x^2 + x - 20)(4 - x) \geq 0$

23) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $(x + 2)(x^2 - 4x) \leq 0$ και $(x - 2)(x^2 + 4x + 3) > 0$

24) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $(x - 2)(x^2 + 2x - 15) \geq 0$ και $(x^3 - 1)(5x^2 - x + 4)(x + 3) > 0$

25) Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i) $x^3 + 4x^2 - 12x \geq 0$
- ii) $4x^2 + 5x > x^3$
- iii) $x^3 + 3x^2 < 4x + 12$

26) Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i) $2x^3 - x^2 - 7x + 6 > 0$
- ii) $x^3 + 2x^2 - 11x - 12 < 0$
- iii) $3x^3 + 5x^2 - 26x + 8 \leq 0$
- iv) $x^3 + 3x + 4 \geq 0$
- v) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 < 0$
- vi) $-4x^3 - 4x^2 + 7x - 2 > 0$

27) Να λύσετε τις ανισώσεις :

- i) $x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6 > 0$
- ii) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \geq 0$
- iii) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6 \leq 0$
- iv) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 \geq 0$

28) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$$

Βρίσκεται πάνω από τον $\chi' \chi$

29) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 6$$

Βρίσκεται κάτω από τον $\chi' \chi$

30) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 10$$

Δεν βρίσκεται πάνω από τον $\chi' \chi$

31) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6$$

Δεν βρίσκεται κάτω από τον $\chi' \chi$

32) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 6x^3 + 4x^2 - 7x - 11$$

Βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της $g(x) = 3x^2 + 4x - 5$

33) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 3x - 5$$

Βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της $g(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 5$

34) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \sqrt{x^3 + 2x^2 - 11x - 12} \quad ii) g(x) = \frac{4x + 7}{\sqrt{-x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 14x + 8}}$$

$$iii) h(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}}{x^3 - 6x^2 + 5x + 12}$$

35) Το πολυώνυμο $P(\chi) = 3\chi^3 + \alpha\chi^2 - 2\chi + \alpha + 15$ έχει παράγοντα το $\chi - 2$

i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(\chi) \leq 0$

36) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+1$ ενώ η διαίρεση του $P(x)$ με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο -24

- i) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

37) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 - (\beta + 4)x - 17$ και $Q(x) = x^3 + (\alpha - 1)x^2 + \beta x - 2$

Το $P(x)$ διαιρούμενο με το $x-2$ αφήνει υπόλοιπο -29 ενώ το $Q(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$

- i) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < Q(x)$

38) Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + x^2 + \alpha x - 3\beta - 1$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + (\alpha - 3)x + 15$

Το $P(x)$ έχει παράγοντα $x-2$ ενώ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)$ με το $x+1$ είναι 24

- i) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- ii) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων $P(x) < 0$ και $Q(x) > 0$

39) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 17x + 4\alpha$ διέρχεται από το σημείο

$M(3, -36)$

- i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
- ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται :
 - α) πάνω από τον x -άξονα
 - β) κάτω από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^3 - 7x - 36$

40) Το πολυώνυμο : $P(x) = 4x^6 + \alpha x^4 - 10x^2 + \alpha - 12$ έχει παράγοντα το $x-1$

- i) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$
- ii) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

41) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 6}{2x^3 + 3x^2 - 3x - 2}$$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να απλοποιήσετε τον τύπο της f

Τατιάνα Ανδριανούλου
Μαθηματικός

- iii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f βρίσκεται κάτω από την γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$

3.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Εδώ θα αναφερθούμε σε εξισώσεις που δεν είναι πολυωνυμικές αλλά με κατάλληλη διαδικασία ανάγονται σε πολυωνυμικές

1^η κατηγορία

Κλασματικές εξισώσεις

1^{ov} παραγοντοποιώ τους παρονομαστές

2^{ov} βρίσκω το ΕΚΠ των παρονομαστών

3^{ov} βάζουμε περιορισμούς ΕΚΠ $\neq 0$

4^{ov} πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με το ΕΚΠ, ώστε να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών

5^{ov} Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

6^{ov} Ελέγχουμε αν οι λύσεις που προκύπτουν ικανοποιούν τους περιορισμούς, οπότε γίνονται δεκτές, αλλιώς απορρίπτονται

Παράδειγμα :

Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} = 2x - \frac{x-3}{x-2}$$

Λύση:

Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές, οπότε έχουμε :

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} = 2x - \frac{x-3}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{(x-2)(x+2)} = 2x - \frac{x-3}{x-2} \xrightarrow{ΕΚΠ=(x-2)(x+2) \neq 0} x \neq 2 \text{ και } x \neq -2$$

$$(x-2)(x+2) \cdot \frac{1}{x+2} - (x-2)(x+2) \cdot \frac{3x-10}{(x-2)(x+2)} = (x-2)(x+2)2x - (x-2)(x+2) \frac{x-3}{x-2} \\ \Leftrightarrow$$

$$x-2 - 3x+10 = 2x(x^2-4) - (x^2-3x+2x-6) \Leftrightarrow -2x+8 \\ = 2x^3-8x-x^2+3x-2x+6 \Leftrightarrow$$

$$2\chi^3 - \chi^2 - 5\chi - 2 = 0$$

Πιθανές ακέραιες λύσεις : $\pm 1, \pm 2$

Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι το $\chi = -1$ είναι ρίζα της εξίσωσης

2	-1	-5	-2	-1
↓	-2	3	2	
2	-3	-2	0	

$$2\chi^3 - \chi^2 - 5\chi - 2 = 0 \Leftrightarrow (2\chi^2 - 3\chi - 2)(\chi + 1) = 0 \Leftrightarrow (\Delta = 25) \chi_1 = 2 \text{ ή } \chi_2 = -\frac{1}{2} \text{ ή } \chi = -1$$

2^η κατηγορία

$$\text{Ανισώσεις της μορφής } \frac{A(\chi)}{B(\chi)} > 0 \text{ ή } \frac{A(\chi)}{B(\chi)} < 0 \text{ ή } \frac{A(\chi)}{B(\chi)} \geq 0 \text{ ή } \frac{A(\chi)}{B(\chi)} \leq 0$$

- Γνωρίζουμε ότι το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα .
- Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή , αν $B(\chi) \neq 0$ ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$\frac{A(\chi)}{B(\chi)} > 0 \Leftrightarrow A(\chi) \cdot B(\chi) > 0 \text{ και } \frac{A(\chi)}{B(\chi)} < 0 \Leftrightarrow A(\chi) \cdot B(\chi) < 0$$

- Αντίστοιχα για να λύσουμε την ανίσωση :

$$\frac{A(\chi)}{B(\chi)} \geq 0 \text{ αρκεί να λύσουμε τηνανίσωση}$$

$$A(\chi) \cdot B(\chi) \geq 0 \text{ και να εξαιρέσουμε τις λύσεις για τις οποίες } B(\chi) = 0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Στις κλασματικές ανισώσεις δεν κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών αν το ΕΚΠ των παρονομαστών δεν έχει σταθερό πρόσημο

Για να λύσουμε μια κλασματική ανίσωση :

- Θέτουμε τους απαραίτητους περιορισμούς
- Μεταφέρουμε όλα τα κλάσματα στο 1^ο μέλος και τα κάνουμε ομώνυμα
- Καταλήγουμε έτσι να λύνουμε μια ανίσωση της μορφής $\frac{A(\chi)}{B(\chi)} \geq 0$

Παράδειγμα 1º

Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{(\chi + 2)(\chi^2 - 9)}{\chi^2 + 2\chi - 3} \leq 0$$

Λύση:

Πρέπει $\chi^2 + 2\chi - 3 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq 1$ και $\chi \neq -3$ οπότε έχουμε

$$\frac{(\chi + 2)(\chi^2 - 9)}{\chi^2 + 2\chi - 3} \leq 0 \Leftrightarrow (\chi + 2)(\chi^2 - 9)(\chi^2 + 2\chi - 3) \leq 0$$

Το πρόσημο του γινομένου $P(\chi) = (\chi + 2)(\chi^2 - 9)(\chi^2 + 2\chi - 3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

χ	$-\infty$	-3	-2	1	3	$+\infty$
$\chi+2$	-	0	-	0	+	+
$\chi^2 - 9$	+	0	-	-	0	+
$\chi^2 + 2\chi - 3$	+	0	-	-	0	+
$P(\chi)$	-	0	-	0	-	0

$$\chi \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup (1, 3]$$

Παράδειγμα 2º

Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{2\chi-1}{\chi^2-4} \geq 1$

Λύση:

Πρέπει $\chi^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow \chi \neq \pm 2$

$$\begin{aligned} \frac{2\chi-1}{\chi^2-4} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{2\chi-1}{\chi^2-4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi-1}{\chi^2-4} - \frac{\chi^2-4}{\chi^2-4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\chi-1-\chi^2+4}{\chi^2-4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-\chi^2+2\chi+3}{\chi^2-4} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (-\chi^2 + 2\chi + 3)(\chi^2 - 4) \geq 0$$

Το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (-x^2 + 2x + 3)(x^2 - 4)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	2	3	$+\infty$
$-x^2 + 2x + 3$	-		- 0 +		+ 0 -	-
$x^2 - 4$	+	0 -		- 0 +		+
$P(x)$	-	0 +	0 -	0 +	0 -	-

άρα $x \in (-2, -1] \cup (2, 3]$

3^η κατηγορία

Άρρητες εξισώσεις :

Άρρητες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις που περιέχουν μια τουλάχιστον ρίζα που έχει ως υπόριζη ποσότητα παράσταση του x

Τρόπος επίλυσης:

- Παίρνουμε περιορισμούς ώστε να ορίζονται οι ρίζες . Πρέπει κάθε υπόριζη ποσότητα να είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός
- Απομονώνουμε στο ένα μέλος το ένα ριζικό
- Υψώνουμε σε κατάλληλη δύναμη ώστε να φύγουν τα ριζικά
- Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει
- Αντικαθιστούμε όλες τις ρίζες που βρήκαμε στην αρχική εξίσωση . Αν την επαληθεύουν τις δεχόμαστε αλλιώς τις απορρίπτουμε

Παράδειγμα 1^ο

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x+2} + x = 4$ (1)

Λύση:

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει : $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Απομονώνουμε το ριζικό και έχουμε :

$$\sqrt{x+2} + x = 4$$

$$\sqrt{x+2} = 4 - x$$

$$\sqrt{x+2}^2 = (4 - x)^2$$

$$x + 2 = 16 - 8x + x^2$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$x = 2 \text{ ή } x = 7$$

Επαλήθευση:

- Για $x=2$ από την (1) έχουμε $\sqrt{2+2} + 2 = 4$ ισχύει (άρα η ρίζα είναι δεκτή)
- Για $x=7$ από την (1) έχουμε $\sqrt{7+2} + 7 = 4 \Leftrightarrow 10 = 4$ δεν ισχύει (άρα η ρίζα απορρίπτεται)

Προσοχή: στην παραπάνω διαδικασία δεν βάλαμε ισοδυναμίες γιατί όταν υψώνουμε μια εξίσωση σε άρτια δύναμη συνήθως δεν προκύπτει ισοδύναμη με την αρχική εξίσωση

Παράδειγμα 2°

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$ (1)

Λύση:

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει : $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ και $x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

Οι περιορισμοί συναληθεύουν όταν : $x \geq -\frac{1}{3}$

έχουμε :

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$$

Στην παραπάνω εξίσωση επειδή και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά μπορούμε ισοδύναμα να υψώσουμε στο τετράγωνο

$$\begin{aligned}\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4} &\Leftrightarrow \sqrt{3x+1}^2 = (1 + \sqrt{x+4})^2 \Leftrightarrow 3x+1 = 1^2 + 2\sqrt{x+4} + \sqrt{x+4}^2 \Leftrightarrow \\ 2x-4 &= 2\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{x+4}\end{aligned}$$

Στην παραπάνω εξίσωση ισχύει : $\sqrt{x+4} \geq 0$ άρα θα πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Κάνοντας συναλήθευση έχουμε ότι : $x \geq 2$

$$x-2 = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow (x-2)^2 = \sqrt{x+4}^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x+4 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0$$

$$x = 0 \text{ (απορρίπτεται) ή } x = 5 \text{ (δεκτή)}$$

Παράδειγμα 3°

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x+10} \geq x-2$ (1)

Λύση:

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει : $x+10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -10$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

- αν το $\chi - 2 < 0 \Leftrightarrow \chi < 2$ τότε συναληθεύοντας με τον περιορισμό $\chi \geq -10$ έχω $-10 \leq \chi < 2$
- αν $\chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$ τότε στην ανίσωση (1) και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά οπότε Μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο :
$$\sqrt{\chi + 10}^2 \geq (\chi - 2)^2 \Leftrightarrow \chi + 10 \geq \chi^2 - 4\chi + 4 \Leftrightarrow -\chi^2 + 5\chi + 6 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq \chi \leq 6$$

Συναληθεύουμε με τους περιορισμούς και έχουμε $2 \leq \chi \leq 6$
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ανίσωση έχει λύσεις τα $-10 \leq \chi < 2$ ή $2 \leq \chi \leq 6$
δηλαδή: $-10 \leq \chi \leq 6$

Μεθοδολογία :

Αντίστροφες εξισώσεις : μια εξίσωση λέγεται αντίστροφη όταν οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν ίσους συντελεστές

- **Αν μια αντίστροφη εξίσωση είναι τρίτου βαθμού :** $\alpha\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \alpha = 0$

Λύνεται με παραγοντοποίηση

- **Αν μία αντίστροφη εξίσωση είναι 4^{ου} βαθμού τότε:** $\alpha\chi^4 + \beta\chi^3 + \gamma\chi^2 + \beta\chi + \alpha = 0$

✓ Αρχικά διαιρώ με το χ^2 οπότε η εξίσωση γίνεται : $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma + \beta\frac{1}{\chi} + \alpha\frac{1}{\chi^2} = 0$

$$\alpha\left(\chi^2 + \frac{1}{\chi^2}\right) + \beta\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) + \gamma = 0 \quad (1)$$

✓ Θέτω $\chi + \frac{1}{\chi} = y \Rightarrow \left(\chi + \frac{1}{\chi}\right)^2 = y^2 \Rightarrow \chi^2 + 2\chi\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} = y^2 \Rightarrow \chi^2 + \frac{1}{\chi^2} = y^2 - 2$

2

✓ Οπότε η (1) γίνεται $\alpha(y^2 - 2) + \beta y + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha y^2 + \beta y + \gamma - 2\alpha = 0$
Η οποία λύνεται κατά τα γνωστά

Παράδειγμα

Να λυθεί η εξίσωση : $\chi^4 + \chi^3 - 4\chi^2 + \chi + 1 = 0$

Λύση:

$$\chi^4 + \chi^3 - 4\chi^2 + \chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \chi - 4 + \frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi^2} = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \frac{1}{\chi^2} + \chi + \frac{1}{\chi} - 4 = 0$$

Θέτω $\chi + \frac{1}{\chi} = y$ οπότε έχω $\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right)^2 = y^2$ δηλαδή $\chi^2 + \frac{1}{\chi^2} = y^2 - 2$

$$y^2 - 2 + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3 \text{ ή } y = 2$$

✓ Αν $y=-3$ τότε $\chi + \frac{1}{\chi} = -3 \Leftrightarrow \chi^2 + 1 = -3\chi \Leftrightarrow \chi^2 + 3\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow \chi = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

✓ Αν $y=2$ τότε $\chi + \frac{1}{\chi} = 2 \Leftrightarrow \chi^2 - 2\chi + 1 = 0 \Leftrightarrow (\chi - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \chi = 1$

Ασκήσεις :

1) Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) x^2 - \frac{2x}{x-1} = x \quad ii) x - \frac{3(x+2)}{x} = \frac{4}{x^2-2x} - \frac{2}{x-2} \quad iii) \frac{14}{x^2-1} - \frac{7}{x-1} = 4 - \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

$$iv) \frac{3x}{x-3} - \frac{2x^2}{x+1} - \frac{10x+6}{x^2-2x-3} = 0 \quad v) \frac{3x^2}{x-2} - \frac{9x}{x^2-4} - \frac{10x^2+20}{x^3-4x} = 4 + \frac{10}{x^2+2x}$$

2) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) \frac{x-3}{x^2+4x-5} < 0 \quad ii) \frac{25-x^2}{x+2} > 0 \quad iii) \frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0 \quad iv) \frac{-x^2+3x+4}{x^2-1} \quad v) \frac{x^3+x^2+x}{9x^2-25} \geq 0$$

$$vi) \frac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leq 0 \quad vii) \frac{x^2-4x-2}{x^2-9} > 0 \quad viii) \frac{(x^2+3x+2)(x+3)}{(2x-1)(-x^2-x+12)} \leq 0$$

$$ix) \frac{(x-2)(9-x^2)}{x^2+2x-3} \geq 0 \quad x) \frac{(x^2-1)(-x^2+x+6)}{x^2-2x-8} \leq 0 \quad xi) \frac{(x+3)(-x^2+x+1)}{x^2-4} \geq 0$$

3) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) \frac{3x-1}{x+2} \geq 2 \quad ii) \frac{2(x-3)}{7-x} \geq -1 \quad iii) \frac{4x}{3x-x^2} \geq \frac{1}{2} \quad iv) \frac{x^2-5}{x-2} \geq 4 \quad v) \frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} \geq 1$$

4) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) \frac{x}{x+3} + \frac{3}{x} \leq \frac{13}{x^2+3x} \quad ii) \frac{x-1}{x+1} \geq 1 + \frac{2}{1-x} \quad iii) \frac{3}{x+1} - \frac{x-1}{x-4} > \frac{3}{2} \quad iv) \frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{3x+1} \leq 2$$

5) Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$i) \frac{x+1}{x-1} - 2 < \frac{1-x}{x} \quad ii) \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} \geq \frac{3}{x+2} \quad iii) \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}$$

6) Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$i) \frac{x^2}{x+2} > \frac{4(x-2)}{x} - \frac{x-10}{x^2+2x} \quad ii) \frac{x^3+6x-5}{x^2-9} + \frac{3x}{x+3} + \frac{5}{x-3} + 2 \geq 0$$
$$iii) \frac{2x^2}{x+2} \leq \frac{3x}{x-1} - \frac{2x+3}{x^2+x-2} \quad iv) \frac{3x^2-6x+2}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x} \geq \frac{x^2-5x+6}{x-1}$$

7) Να βρείτε για ποια x συναληθεύουν οι ανισώσεις

$$\frac{-\chi^2 + 5\chi + 6}{\chi^2 + \chi - 6} \geq 0 \quad \text{και} \quad \frac{3}{5 - \chi} \geq 1$$

8) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{3x + 18} = x$ ii) $\sqrt{20 - 8x} - x = 0$ iii) $\sqrt{x + 3} = x - 3$ iv) $\sqrt{x + 10} = 2 - x$ v) $\sqrt{2x + 13} = x + 7$

9) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x - \sqrt{14 - 2x} = 3$ ii) $2 + \sqrt{12 - 2x} = x$ iii) $x - 1 - \sqrt{x + 11} = 0$ iv) $x + \sqrt{26 - 11x} - 4 = 0$

10) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\sqrt{x + 8} - \sqrt{x - 4} = 2$ ii) $\sqrt{x - 5} - 3 = \sqrt{x - 8}$ iii) $\sqrt{2x + 12} - \sqrt{3 - x} = 3$ iv) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x - 2} = 1$

11) Να λυθούν οι ανισώσεις :

i) $\sqrt{2x - 1} < \sqrt{9 - 3x}$ ii) $\sqrt{1 - x} \geq \sqrt{x + 3}$ iii) $\sqrt{x - 6} - \sqrt{2 - x} < 0$ iv) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 3} \leq 0$

12) Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\sqrt{x - 3} \geq x - 5$ ii) $\sqrt{x + 4} \leq x + 7$ iii) $\sqrt{x + 2} - x > 0$ iv) $x - 2 - \sqrt{x} > 0$

13) Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$ ii) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$ iii) $x + 6\sqrt{x} + 8 = 0$ iv) $\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 4 = 0$

14) Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $2\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3 - \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 - 22 \cdot \frac{x-1}{x+2} - 24 = 0$
ii) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^4 - 5\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 = 0$

15) Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $2\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2 - 5 \cdot \frac{x-2}{x-1} + 2 \leq 0$ ii) $\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)^2 + \frac{2x-1}{x-2} - 2 \leq 0$

16) Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2\eta\mu^3\chi - 5\eta\mu^2\chi - 4\eta\mu\chi + 3 = 0$

ii) $2\sigma\upsilon\nu^4\chi - 3\sigma\upsilon\nu^3\chi - 4\sigma\upsilon\nu^2\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi + 2 = 0$

iii) $2\eta\mu^3\chi + 5\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu\chi - 3 = 0$

iv) $4\sigma\upsilon\nu^4\chi + 4\sigma\upsilon\nu^3\chi + 11\eta\mu^2\chi - 3\sigma\upsilon\nu\chi - 5 = 0$

Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων στα πολυώνυμα

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-22649 §4.1 - §4.2

- α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 6x^2 + 11x - 2) : (x - 3)$ (Μονάδες 10)
- β) Αν $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + \lambda$ να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x) : (x - 3)$ να έχει υπόλοιπο 0. (Μονάδες 15)

2) ΑΣΚΗΣΗ 2-22680 §4.1 - §4.2

Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + \lambda^2(x^2 - 1) + \lambda(x^3 - 1) + \lambda + 9$ και

$$Q(x) = (\lambda + 12)x^2 + (\lambda - 2)x^3 + (\lambda^2 - 9)x, \lambda \in \mathbb{R}.$$

- α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
- β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4ο

3) ΑΣΚΗΣΗ 4-22762 §4.1 - §4.2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^4 - 12x^3 + 8x^2 + \alpha x + \beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με $x + 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 + P(1)$ και διαιρούμενο με $x - 1$ αφήνει υπόλοιπο $16 - P(-1)$, τότε:

- α) να αποδείξετε ότι $P(1) = 0$ και $P(-1) = 16$ (Μονάδες 8)
- β) να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$ και $\beta = -3$ (Μονάδες 9)
- γ) να αποδείξετε ότι $P(4) \cdot P(5) \cdot P(6) \cdot P(7) \neq 0$ (Μονάδες 8)

§4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2ο

4) ΑΣΚΗΣΗ 2-22640 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 12$

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί το διώνυμο $x - 3$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 13)
- β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (Μονάδες 12)

5) ΑΣΚΗΣΗ 2-22641 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5.

- α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = -4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

6) ΑΣΚΗΣΗ 2-22642 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 11x + 30$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για $x = 1$ είναι 16.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = -4$ και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x) = 0$, να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-22643 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και 3.

α) Να δείξετε ότι $\beta = -4$, $\gamma = 3$ και $\delta = 0$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 10)

8) ΑΣΚΗΣΗ 2-22644 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2 x^3 - 4\lambda x + 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 1$. (Μονάδες 10)

β) Αν $\lambda = 3$, να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$. (Μονάδες 15)

9) ΑΣΚΗΣΗ 2-22645 §4.3

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2x^4 - x^3 + \alpha x^2 - 5x + 6$ διέρχεται από το σημείο $M(-2, 0)$,

α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -14$ (Μονάδες 12)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. (Μονάδες 13)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-22646 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 9x - 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $3x^2 - 4x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. (Μονάδες 10)

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-22647 §4.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής, της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f , βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 10)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-22648 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x - 2$ είναι ίσο με -4 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = -2$ και $\beta = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

(Μονάδες 12)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-22681 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + 1$ και $P(2) = 18$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \leq 0$

(Μονάδες 7)

14) ΑΣΚΗΣΗ 2-22682 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (\kappa - 6)x^2 - 7x + \kappa$.

α) Να βρείτε για ποιά τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $\kappa = 6$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 13)

15) ΑΣΚΗΣΗ 2-22683 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για $x = 1$ είναι ίση με 10 και $P(2) = 10$, να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 8$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 10$.

(Μονάδες 13)

16) ΑΣΚΗΣΗ 2-22684 §4.3

Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3 cm, 4 cm και 5 cm. Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει. Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x .

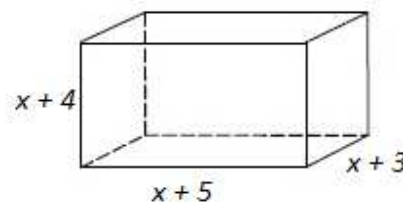
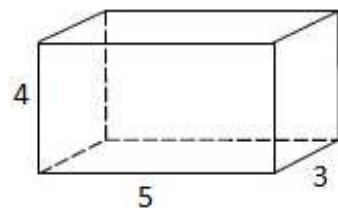
α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3 + 12x^2 + 47x - 60 = 0$.

(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο: $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$)

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α).

(Μονάδες 13)



17) ΑΣΚΗΣΗ 2-22685 §4.3

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^3 + 2)x^3 + x^2 + 1$ και $Q(x) = 3\alpha x^3 + x^2 + 1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha = 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

18) ΑΣΚΗΣΗ 2-22686 §4.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + \lambda$.

- α) Αν $P(-1) = 6$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$. (Μονάδες 11)
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 14)

19) ΑΣΚΗΣΗ 2-22687 §4.3

Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^4 - 2(\lambda - 1)x^3 + 2\lambda x^2 + \lambda + 1$ είναι 3^{ου} βαθμού.

- α) Να δείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 9)
β) Να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 7)
γ) Να βρείτε τις ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 9)

20) ΑΣΚΗΣΗ 2-22688 §4.3

Το πολυώνυμο $P(x)$ αν διαιρεθεί με το $(x-2)$ δίνει πηλίκο $(x^2 - 3x + 2)$ και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό u .

- α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)
β) Αν $P(1) = 10$, να βρείτε το u . (Μονάδες 9)
γ) Αν $u = 10$, να βρείτε το $P(x)$. (Μονάδες 8)

21) ΑΣΚΗΣΗ 4-22734 §4.3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E = 30 \text{ cm}^2$ του οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1 cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε x το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και y το μήκος της άλλης κάθετης (σε cm), τότε:

- α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y ικανοποιούν τις σχέσεις: $y = \frac{60}{x}$ και $(x+1)^2 = x^2 + y^2$
(Μονάδες 4)
β) Να δείξετε ότι ο αριθμός x ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3 + x^2 - 3600 = 0$
(Μονάδες 4)
γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς x είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του x καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου. (Μονάδες 12)

- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος.

22) ΑΣΚΗΣΗ 4-22759 §4.3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \gamma x + \delta, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } \gamma, \delta$$

πραγματικές σταθερές.

- α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$

(Μονάδες 5)

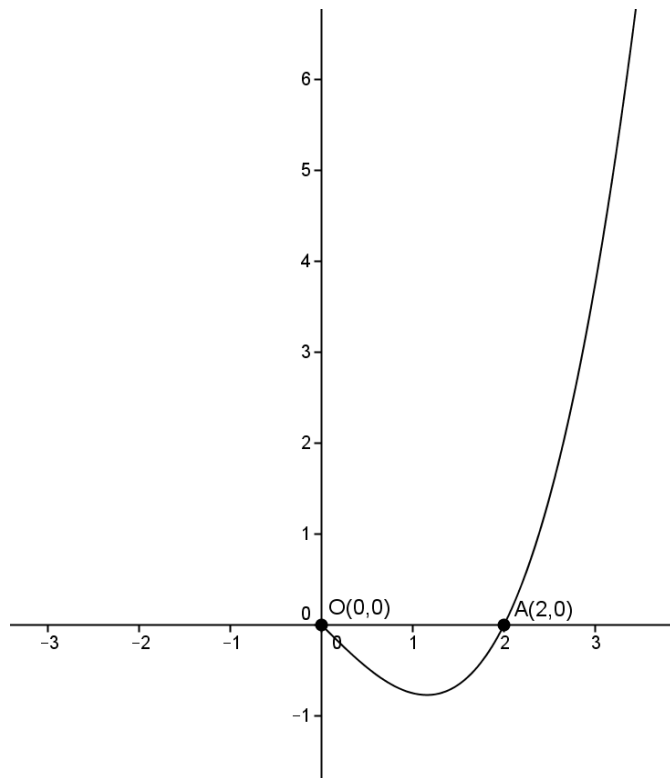
- β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x :$$

- i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 5)

- ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για $x < 0$



(Μονάδες 5)

- iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις $f(x) = -\frac{3}{4}$ και

$$f(x) = \frac{3}{4}$$

(Μονάδες 10)

23) ΑΣΚΗΣΗ 4-22764 §4.3

Έστω $P(x)$ πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο $x^2 + 2x$ και είναι τέτοιο, ώστε $P(1) = 0$ και $P(2) = 8$.

- α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 + x^2 - 2x$.

(Μονάδες 10)

- β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 8$.

(Μονάδες 6)

- γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 2$.

(Μονάδες 9)

24) ΑΣΚΗΣΗ 4-22777 §4.3

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,-2)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

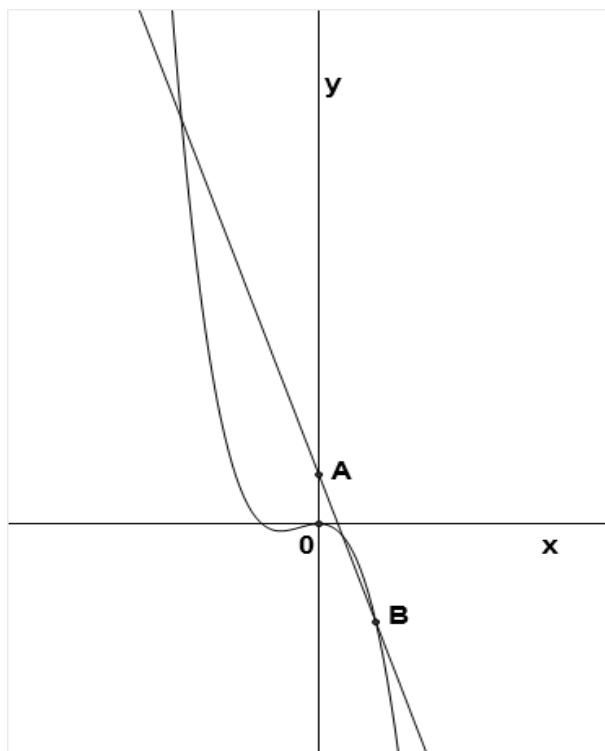
(Μονάδες 7)

- β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 9)

- γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$

(Μονάδες 9)



§4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

25) ΑΣΚΗΣΗ 4-22766 §4.4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa^2 - 1)x^4 + \frac{1}{2}(\kappa + 1)x^3 + (\kappa - 1)x^2 - 3\kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι ίσο με -4 . (Μονάδες 7)
- β) Για $\kappa = 1$ και $\lambda = -2$
- Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 1$ (Μονάδες 5)
 - Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 4 = x^2 - 1$ (Μονάδες 7)
 - Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)} \geq 1$ (Μονάδες 6)

26) ΑΣΚΗΣΗ 4-22769 §4.4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι ίσο με -6 , να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)
- β) Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ (Μονάδες 8)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3\omega + 5\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu\omega - 3 = 0$ (Μονάδες 10)

27) ΑΣΚΗΣΗ 4-22772 §4.4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x + 2$.
(Μονάδες 7)
- β) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
(Μονάδες 9)
- γ) Για $\kappa = -7$ και $\lambda = 6$ να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x - 5} \geq 0$
(Μονάδες 9)

28) ΑΣΚΗΣΗ 4-22773 §4.4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 7x + \alpha + 5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

- α) Να βρείτε τις τιμές των α και β (Μονάδες 8)
- β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$, να λύσετε
- i. την ανίσωση $P(x) \geq 0$ (Μονάδες 8)
- ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)} = x - 1$ (Μονάδες 9)

29) ΑΣΚΗΣΗ 4-22774 §4.4

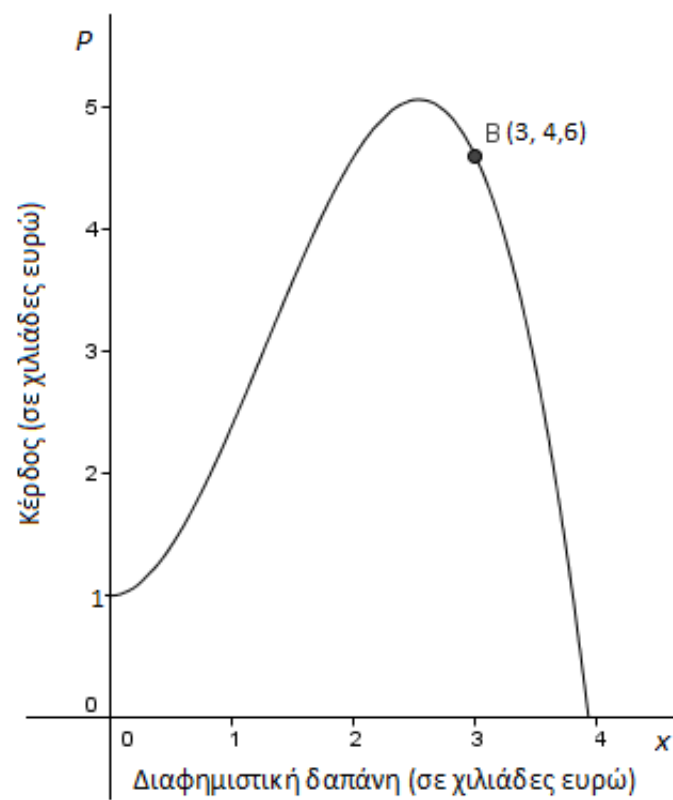
Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha^3 x^2 - \alpha^2 x - \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - \alpha)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.
(Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το $(x - \alpha)$ διαιρεί το $P(x)$. (Μονάδες 6)
- γ) Αν $\alpha = -1$, τότε:
- i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 6)
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $(x + 1) P(x) \leq 0$. (Μονάδες 6)

30) ΑΣΚΗΣΗ 4-22775 §4.4

Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P (σε χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $P(x) = -0,5x^3 + 1,9x^2 + 1$, $0 \leq x < 4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.

- α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x)$ για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος. (Μονάδες 5)
- ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i. (Μονάδες 10)
- β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μονάδες 10)



Διαγώνισμα στα πολυώνυμα

ΘΕΜΑ 1^ο

A1 . Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-p$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=p$ δηλαδή $u=P(p)$

A3. Να χαρακτηρίσεις τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

- i) Κάθε ισότητα της μορφής $\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+u(x)$, όπου $\delta(x) \neq 0$ είναι η ταυτότητα της διαίρεσης του $\Delta(x)$ με το $\delta(x)$
- ii) Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
- iii) Η εξίσωση $x^5 + 5x - 2 = 0$ έχει ακέραιες ρίζες
- iv) Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
- v) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x): (x-p)$ είναι πάντα σταθερό πολυώνυμο
- vi) Ο βαθμός του πηλίκου της διαίρεσης δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών τους
- vii) Αν ισχύει $P(p)=0$ τότε το p λέγεται ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$
- viii) Ένα πολυώνυμο ονομάζεται μηδενικό πολυώνυμο όταν είναι σταθερό
- ix) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του ενός πολυωνύμου με το $x-p$ ισούται με την τιμή του πολυωνύμου για $x=p$

ΘΕΜΑ 2^ο

Να λυθούν οι εξισώσεις :

A. $\eta\mu^3\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu\chi + 2 = 0$

B. $\frac{3\chi^2+1}{\chi-1} + \frac{4}{\chi-\chi^2} = \frac{\chi^2-3\chi+2}{\chi}$

Γ. $\sqrt{5\chi+10}=8-\chi$

Δ. $\sqrt{\chi+2}+2=\sqrt{\chi-6}$

ΘΕΜΑ 3^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3 - 3x^2 + 2$

- i) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$
- ii) Να βρείτε τα διαστήματα στο οποία η f βρίσκεται κάτω από τον χ'

B. να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

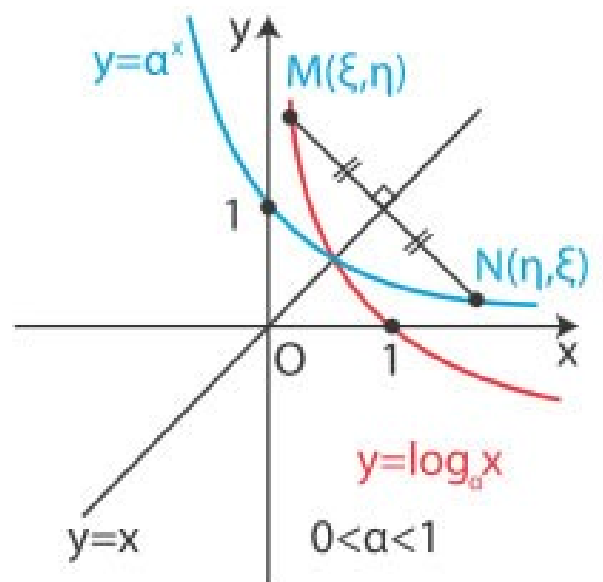
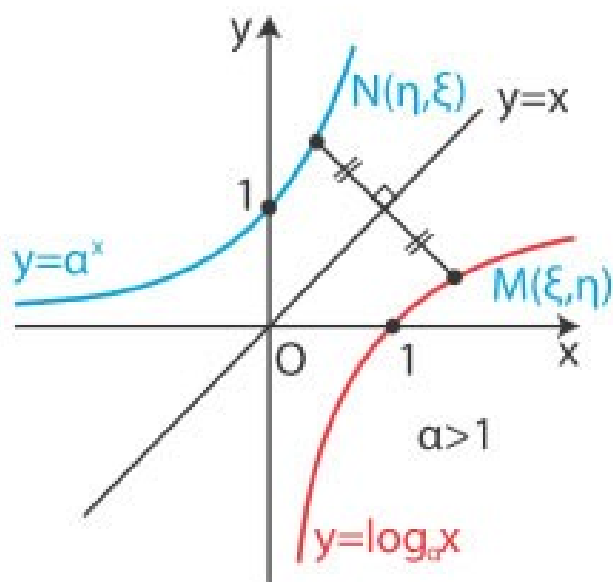
$$i) f(x) = \sqrt{x^2 - 11x + 10} \quad ii) g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 5x - 6}}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$ όπου $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$

- i. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$
- ii. Να γίνει η ευκλείδεια διαίρεση $P(x):(x+1)$ και να γραφεί η ταυτότητά της.
- iii. Να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών του x για τα οποία η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον x ή x

Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση



Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

5. Εκθετική – Λογαριθμική συνάρτηση

5.1 Εκθετική συνάρτηση:

Ορισμός : ονομάζουμε δύναμη με βάση το $\alpha \in \mathbb{R}$ και εκθέτη $\nu \in \mathbb{N}^*$ το $\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \dots \cdot \alpha$, $\nu > 1$

- $\alpha^1 = \alpha$
- Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^0 = 1$
- $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$
- $\frac{\mu}{\alpha^\nu} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Ιδιότητες των δυνάμεων

Αν α, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$

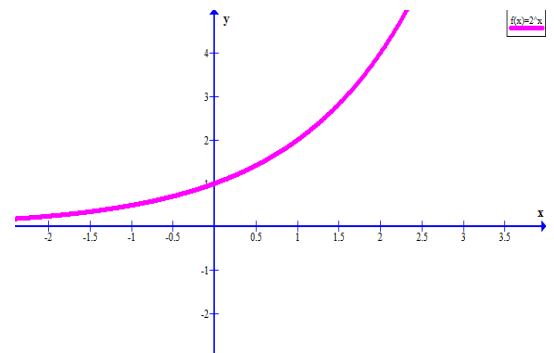
1. $\alpha^{\chi_1} \cdot \alpha^{\chi_2} = \alpha^{\chi_1 + \chi_2}$
2. $\alpha^{\chi_1} : \alpha^{\chi_2} = \alpha^{\chi_1 - \chi_2}$
3. $(\alpha^{\chi_1})^{\chi_2} = \alpha^{\chi_1 \cdot \chi_2}$
4. $(\alpha\beta)^\chi = \alpha^\chi \cdot \beta^\chi$
5. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\chi = \frac{\alpha^\chi}{\beta^\chi}$

Η εκθετική συνάρτηση:

1. $f(x) = a^x$, με $a > 1$

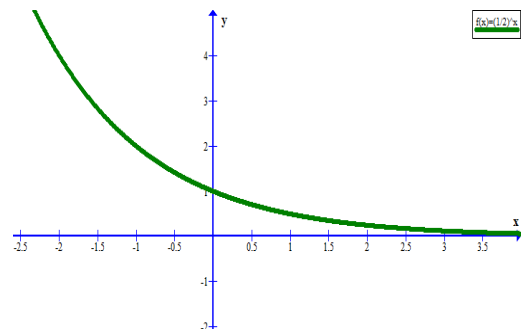
- Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
- Το σύνολο τιμών της $(0, +\infty)$
- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y=1$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\text{αν } \chi_1 < \chi_2 \text{ τότε } f(\chi_1) < f(\chi_2) \Leftrightarrow a^{\chi_1} < a^{\chi_2}$$



2. $f(x) = a^x$, με $0 < a < 1$

- Πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$
- Το σύνολο τιμών της $(0, +\infty)$
- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη $y=1$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή για κάθε $\chi_1, \chi_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει : αν $\chi_1 < \chi_2$ τότε $f(\chi_1) > f(\chi_2) \Leftrightarrow a^{\chi_1} > a^{\chi_2}$



Μεθοδολογία :

Η συνάρτηση $f(x) = a^x$

- Ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$, αν $a > 0$
- Είναι εκθετική , αν $a > 0$ και $a \neq 1$
- Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αν $a > 1$
- Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ αν $0 < a < 1$

Βασικό παράδειγμα :

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \left(\frac{\lambda + 4}{2 - \lambda}\right)^x$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$ η συνάρτηση $f(x)$:

1. Να έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$
2. Να είναι εκθετική
3. Να είναι γνησίως αύξουσα
4. Να είναι γνησίως φθίνουσα

Λύση:

1. Η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{\lambda + 4}{2 - \lambda}\right)^x$$

Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, όταν η βάση της δύναμης είναι θετικός αριθμός . Δηλαδή όταν :

$$\frac{\lambda + 4}{2 - \lambda} > 0 \Leftrightarrow (\lambda + 4)(2 - \lambda) > 0$$

Το πρόσημο του $(\lambda + 4)(2 - \lambda)$ προσδιορίζεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα

λ	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$\lambda+4$	$-$	0	$+$	$+$
$2-\lambda$	$+$	$+$	0	$-$
$(\lambda+4)(2-\lambda)$	$-$	0	$+$	$-$

Άρα $\lambda \in (-4, 2)$

2. Για να είναι η f εκθετική πρέπει $\frac{\lambda+4}{2-\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-4, 2)$

$$\text{και } \frac{\lambda+4}{2-\lambda} \neq 1 \Leftrightarrow \lambda+4 \neq 2-\lambda \Leftrightarrow 2\lambda \neq -2 \Leftrightarrow \lambda \neq -1$$

άρα τελικά : $\lambda \in (-4, -1) \cup (-1, 2)$

3. Για να είναι η f γνησίως αύξουσα πρέπει :

$$\frac{\lambda+4}{2-\lambda} > 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda+4}{2-\lambda} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda+4-2+\lambda}{2-\lambda} > 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda+2}{2-\lambda} > 0 \Leftrightarrow (2\lambda+2)(2-\lambda) > 0$$

λ	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$2\lambda+2$	$-$	0	$+$	$+$
$2-\lambda$	$+$	$+$	0	$-$
$(2\lambda+2)(2-\lambda)$	$-$	0	$+$	$-$

$$\lambda \in (-1, 2)$$

4. Για να είναι η f γνησίως φθίνουσα πρέπει

$$0 < \frac{\lambda+4}{2-\lambda} < 1$$

Έχουμε :

$$\bullet \frac{\lambda+4}{2-\lambda} < 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda+4}{2-\lambda} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\lambda+4-2+\lambda}{2-\lambda} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda+2}{2-\lambda} < 0 \Leftrightarrow (2\lambda+2)(2-\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

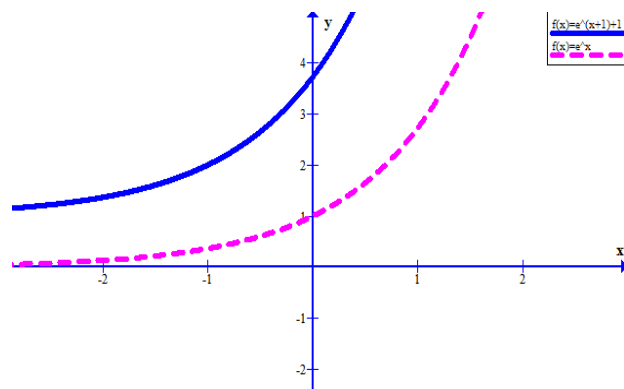
$$\bullet \frac{\lambda+4}{2-\lambda} > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-4, 2) \text{ οπότε τελικά } \lambda \in (-4, -1)$$

Παράδειγμα 2^ο :

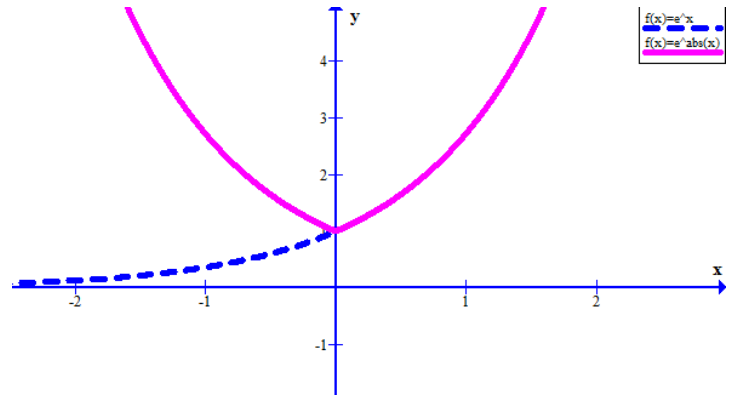
Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις : i) $f(x) = e^{x+1} + 1$ ii) $f(x) = e^{|x|}$

Λύση:

- i. Η γραφική παράσταση της $f(x) = e^{x+1} + 1$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $g(x) = e^x$ κατά 1 μονάδα αριστερά και στη συνέχεια από μια κατακόρυφη μετατόπιση κατά μια μονάδα προς τα πάνω



ii. $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^x, & \text{αν } x \geq 0 \\ e^{-x}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$



Παράδειγμα 2°

Να λύσετε τις εξισώσεις : i) $3^x = 81$ ii) $e^{3x-2} = 1$

Λύση:

i. $3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

ii. $e^{3x-2} = 1 \Leftrightarrow e^{3x-2} = e^0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Παράδειγμα 3°

Να λυθεί η εξίσωση: $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$

Λύση :

$$9^x + 3^{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow (3^x)^2 + 3 \cdot 3^x - 4 = 0 \xrightarrow{3^x=y} y^2 + 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = 25, \quad y_1 = 1 \quad \text{και} \quad y_2 = -4$$

$$3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad 3^x = -4 \text{ (αδύνατη)}$$

Παράδειγμα 4°

Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $9^x < 3$ ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} > \frac{16}{25}$

Λύση:

i) $9^x < 3 \Leftrightarrow 3^{2x} < 3 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \quad [\text{διότι } 3 > 1]$

ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} > \frac{16}{25} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{1-2x} > \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Leftrightarrow 1 - 2x < 2 \Leftrightarrow -2x < 1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \quad [\text{διότι } \frac{4}{5} < 1]$

Παράδειγμα 5°

Να λυθεί η ανίσωση : $5^x + 5^{1-x} < 6$

Λύση:

$$5^x + 5^{1-x} < 6 \Leftrightarrow 5^x + \frac{5}{5^x} < 6 \Leftrightarrow 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 < 0 \Leftrightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 < 0$$

$$\stackrel{5^x=y}{\Leftrightarrow} y^2 - 6y + 5 < 0$$

$$\Delta = 16, \quad y_1 = 5 \quad y_2 = 1$$

y	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$y^2 - 6y + 5$	+	0	-	0	+

$$\text{Άρα } 1 < y < 5 \Leftrightarrow 1 < 5^x < 5 \Leftrightarrow 5^0 < 5^x < 5^1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ :

Μία ακόμη εκθετική συνάρτηση με βάση το e είναι η $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$

Αυτή εκφράζει ένα φυσικό μέγεθος, που μεταβάλλεται με το χρόνο t. Το Q_0 είναι η **αρχική τιμή** του Q (για $t = 0$) και είναι $Q_0 > 0$, ενώ το c είναι μια σταθερά που εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη εφαρμογή. Η συνάρτηση αυτή είναι γνωστή ως **νόμος της εκθετικής μεταβολής**. Αν $c > 0$ η συνάρτηση Q είναι γνησίως αύξουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής αύξησης**, ενώ αν $c < 0$ η Q είναι γνησίως φθίνουσα και εκφράζει το νόμο της **εκθετικής απόσβεσης**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής απόσβεσης. Η ημιζωή του υλικού αυτού είναι 3 χρόνια.

- i. Να αποδείξετε ότι η ποσότητα Q(t) του υλικού που απομένει μετά από t χρόνια είναι :

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

Όπου Q_0 η αρχική του ποσότητα

- ii. Αν αρχικά υπήρχαν 8kg ραδιενεργού υλικού, να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν απομείνει 250 g

ΛΥΣΗ:

- i. Η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού που απομένει μετά από t χρόνια είναι δίνεται από τη σχέση: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$ (1)
Αφού ο χρόνος ημιζωής είναι 3 χρόνια ισχύει :

$$Q(3) = \frac{Q_0}{2} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} Q_0 \cdot e^{3c} = \frac{Q_0}{2} \Leftrightarrow e^{3c} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^c = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow e^c = 2^{-\frac{1}{3}}$$

Άρα

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{1}{3}t}$$

ii. Είναι $Q_0 = 8\text{kg} = 8000\text{g}$ οπότε $Q(t) = 8.000 \cdot 2^{-\frac{1}{3}t}$

$$Q(t) = 250 \Leftrightarrow 8.000 \cdot 2^{-\frac{1}{3}t} = 250 \Leftrightarrow 2^{-\frac{1}{3}t} = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^{-\frac{t}{3}} = 2^{-5} \Leftrightarrow t = 15 \text{ χρόνια}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i) $f(x) = 5^x$ ii) $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x$ iii) $f(x) = 0,25^x$ iv) $f(x) = 3^{-x}$

2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i) $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^x + 1$, $h(x) = 2^x - 3$

ii) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + 4$, $h(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x - 1$

3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i) $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^{x+2}$, $h(x) = 3^{x-1}$

ii) $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}$, $h(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} - 1$

4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

i) $f(x) = 3^{x+2} - 1$, ii) $g(x) = 2^{x-2} + 3$, iii) $h(x) = e^{x-1} - 2$

iv) $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 3$, v) $\varphi(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + 4$, vi) $r(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^{x-3} + 1$

5. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathcal{R}$, η συνάρτηση :

$$f(x) = (2\alpha - 5)^x$$

- a. Ορίζεται σε όλο το $\mathcal{R}$
- b. Είναι εκθετική
- c. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$
- d. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{R}$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathcal{R}$, η συνάρτηση :

$$f(x) = (|\lambda| - 3)^x$$

- a. Ορίζεται σε όλο το $\mathcal{R}$
- b. Είναι εκθετική
- c. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$
- d. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{R}$

7. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathcal{R}$, η συνάρτηση :

$$f(x) = (2\alpha^2 + 8\alpha + 5)^x$$

- a. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$
- b. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{R}$

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathcal{R}$, η συνάρτηση :

$$f(x) = (\lambda^2 - 4\lambda + 4)^x$$

- a. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$
- b. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{R}$

9. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathcal{R}$, η συνάρτηση :

$$f(x) = \left(\frac{\lambda + 1}{5 - \lambda}\right)^x$$

- a. Ορίζεται σε όλο το $\mathcal{R}$
- b. Είναι εκθετική
- c. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$
- d. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{R}$

10. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathcal{R}$, η συνάρτηση :

$$f(x) = (6\alpha^3 - 7\alpha^2 + 1)^x$$

- a. Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$
- b. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathcal{R}$

11. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 5^{x+4} = 25 \quad \beta) 3^{2x-5} = 27 \quad \gamma) 2^{10-3x} = 16 \quad \delta) 7^{x^2-25} = 1 \quad \varepsilon) 3^{3x+5} = \frac{1}{81} \quad \sigma\tau) \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

$$\zeta) 2^{x+5} = -4 \quad \eta) 3^{5-x} = 0$$

12. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 3^{x-2} - 27 = 0 \quad \beta) 2 \cdot 5^{x+3} - 50 = 0 \quad \gamma) 11^{x^2-3x-4} - 1 = 0 \quad \delta) 3^{|x|-6} - \frac{1}{4}$$

$$= 0 \quad \varepsilon) 7^{2x-5} + \frac{1}{7} = 0$$

13. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 6^x = 3^x \quad \beta) 4^{2x-7} = 64 \quad \gamma) 3^{x-1} = \frac{1}{27} \quad \delta) 5^{2x+3} = 0,2 \quad \varepsilon) \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-6} = \frac{27}{8} \quad \sigma\tau) \left(\frac{5}{7}\right)^{|x|-7}$$

$$= \frac{49}{25}$$

14. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$\alpha) 7^{3x-8} = 7^x \quad \beta) 3^{5x+1} = 9^{2x} \quad \gamma) 6 \cdot 6^{3x-5} = 6^{x+2} \quad \delta) 5^x \cdot 5^{2x-13} = 25 \quad \varepsilon) 9 \cdot 3^{2x-7}$$

$$= 3^{13-x}$$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις :

- a. $(3^x - \sqrt{3})(5^x + 1) = 0$
- b. $(5^{2x-3} - 5\sqrt{5})\left(e^x - \frac{1}{e}\right) = 0$
- c. $(3^x + 9)(2^{x^2} - \sqrt[4]{2}) = 0$

16. Να λυθούν οι εξισώσεις :

$$a. 8^{x-5} = 4^{x+3}$$

b. $\left(\frac{1}{16}\right)^{x-3} = 8^{2x-1}$

c. $\sqrt{5}^{x+3} = 5^{x-1}$

17. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $2^{x^2-5x+6} = 1$ ii) $[3^{(x^2-9)}]^{x-2} = 1$ iii) $e^{x^3+3x^2-6x-8} = 1$ iv) $7^{2\sin x+1} = 1$

18. Να λυθούν οι εξισώσεις :

a. $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$

b. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

c. $4^{x+1} - 7 \cdot 2^x - 2 = 0$

d. $9^{x+1} - 36 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0$

e. $3^{2x-2} = 4 - 3^x$

19. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$

ii. $3^{x+1} - 28 + 9 \cdot 3^{-x} = 0$

iii. $e^{2x} + e = e^x + e^{x+1}$

20. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $72 \cdot 3^{x-2} = 9 \cdot 2^{x+1}$

ii. $100 \cdot 4^{x-1} = 5^{2x+1} - 25^x$

iii. $3^{x+3} - 20 \cdot 5^{x-1} = 5^{x+1} + 18 \cdot 3^{x-2}$

iv. $2^{x-2} - 3^{x-3} = 2^{x-3} - 3^{x-4}$

21. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $2^x + 2^{x-1} = 2^{4-x} - 2^{2-x}$

ii. $5^x - 3 \cdot 5^{x-1} = \frac{8}{5^x} + \frac{50}{5^{x+2}}$

iii. $\frac{3^{x+3}}{2^x} + 6 \cdot \frac{2^{x+2}}{3^{x+1}} = 30$

iv. $25 \cdot 2^{2x-4} \cdot 3^x = 9 \cdot 5^x$

22. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i. $5 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 5^{2x} = 0$

ii. $9 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$

iii. $4^{x+1} - 12 \cdot 6^{x-1} - 6 \cdot 9^x = 0$

iv. $2 \cdot 49^{|x|} = 9 \cdot 14^{|x|} - 7 \cdot 4^{|x|}$

23. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $5^{3x-7} < 5^{x-1}$ ii) $7^{2x+1} \geq 7^{13-x}$ iii) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{x+12}$

iv) $\left(\frac{5}{8}\right)^{3-2x} > \left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7}$ v) $\left(\frac{7}{6}\right)^{x+5} \leq \left(\frac{7}{6}\right)^{5-3x}$

24. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\text{i)} 2^{x-5} > 0 \quad \text{ii)} 3^{2x-1} \leq 0 \quad \text{iii)} 5^{3x-1} \geq -5 \quad \text{iv)} \left(\frac{1}{7}\right)^{5x+2} < -7$$

25. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i)} 2^{|x|-1} \leq 16 \quad \text{ii)} 3^{x^2-13} \leq 27 \quad \text{iii)} \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-x} \geq \frac{1}{25} \quad \text{iv)} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} \geq \frac{1}{32}$$

26. Να λυθούν οι ανισώσεις :

$$\text{i)} 7^{|2x-3|-5} \leq 11 \quad \text{ii)} 5^{x^2-7} \cdot 5^{4x-5} \leq 1 \quad \text{iii)} \left(\frac{3}{5}\right)^{4x^2-9} \geq 1 \quad \text{iv)} \left(\frac{1}{9}\right)^{|x|-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-|x|} \geq 1$$

27. Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 > 0 \\ \text{ii.} \quad & 9^x - 2 \cdot 3^x - 3 < 0 \\ \text{iii.} \quad & 4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \leq 0 \\ \text{iv.} \quad & 9^{x+\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{x+2} + 27 \geq 0 \\ \text{v.} \quad & 4^{x+1} - 8 \cdot 2^{x-1} + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

28. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & 3^{x^2-7x+6} < 1 \\ \text{ii.} \quad & \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\frac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}} \\ \text{iii.} \quad & 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \\ \text{iv.} \quad & 2^x + 2^{3-x} \geq 9 \\ \text{v.} \quad & 2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 2^{2x} \geq 0 \\ \text{vi.} \quad & 6^{x+1} + 4^{x+1} < 10 \cdot 9^x \end{aligned}$$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & (2^x - 8)(3^x - 9)(7^x - 1) \geq 0 \\ \text{ii.} \quad & (x^2 - 3x - 4)(e^x - 1)(2^x - 16) \leq 0 \\ \text{iii.} \quad & (4 - 2^x)(5^{x+2} - 1)\left(3^x - \frac{1}{27}\right) > 0 \\ \text{iv.} \quad & \left(\left(\frac{1}{2}\right)^x - \frac{1}{32}\right)(3^{|x|} - 81)(5^x - \sqrt{5}) < 0 \end{aligned}$$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις :

$$\text{i)} \frac{4^x + 10 \cdot 2^x - 14}{4^x + 1} \leq 0 \quad \text{ii)} \frac{(2^x - 8)(13^x - 1)}{3^x - 9} \geq 0 \quad \text{iii)} 2^x + 1 \leq \frac{2^{x+2} - 6}{2^x - 2}$$

31. Να λύσετε τα συστήματα

$$\text{i)} \begin{cases} 2^x + 3^y = 13 \\ 3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = -6 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2^x - 5^y = 3 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = 7 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} 2^x - 3^y = 1 \\ 4^x - 9^y = 7 \end{cases}$$

32. Ένας βιολόγος, μελετώντας την ανάπτυξη ενός είδους βακτηριδίων , παρατηρεί ότι :

- Δυο ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 400
- 4 ώρες μετά την έναρξη της παρατήρησης τα βακτηρίδια ήταν 3200

Αν ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων είναι $P(t) = P_0 \cdot 2^{kt}$

Όπου $P(t)$ ο αριθμός των βακτηριδίων σε χρόνο t (σε ώρες) , P_0 ο αρχικός αριθμός και k σταθερά που εξαρτάται από το είδος των βακτηριδίων , να βρείτε:

- Τη σταθερά k
- Τον αρχικό αριθμό των βακτηριδίων
- Σε πόσα λεπτά ο αρχικός αριθμός των βακτηριδίων έχει διπλασιαστεί ;

33. Σε έναν ασθενή με υψηλό πυρετό χορηγείται αντιπυρετικό φάρμακο . Η θερμοκρασία (πυρετός) $\Theta(t)$ του ασθενούς , t ώρες μετά την λήψη του φαρμάκου , δίνεται από τον τύπο :

$$\Theta(t) = 36 + 4 \left(\frac{1}{2} \right)^t \text{ σε βαθμούς κελσίου}$$

- Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το φάρμακο .
- Να βρείτε σε πόσες ώρες η θερμοκρασία του ασθενούς , θα πάρει τη φυσιολογική τιμή των $36,5^\circ\text{C}$
- Αν η επίδραση του φαρμάκου διαρκεί 4 ώρες , πόση θα είναι η θερμοκρασία του ασθενούς μόλις σταματήσει η επίδραση του φαρμάκου ;

34. Ένα δείγμα 5kg ενός ραδιενεργού ισοτόπου διασπάται σύμφωνα με τον τύπο :

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-kt}$$

Όπου $Q(t)$ παριστάνει την ποσότητα που απομένει μετά από χρόνο t (σε min) , $Q_0 = Q(0)$ η αρχική ποσότητα ($t=0$) και k σταθερά που εξαρτάται από το υλικό . Αν το μισό του αρχικού δείγματος διασπάστηκε σε 10 min , να βρείτε πόση ποσότητα ραδιενεργού υλικού θα έχει απομείνει μετά από 40 min.

35. Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής και έχει χρόνο ημιζωής 12 χρόνια

- Να αποδείξετε ότι η ποσότητα $Q(t)$ του ραδιενεργού υλικού που απομένει μετά από t χρόνια είναι : $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{12}}$, όπου Q_0 η αρχική του ποσότητα.
- Αν μετά από 60 χρόνια έχουν απομείνει 2 kg , να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0
- Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια θα έχουν μείνει 500g από το ραδιενεργό υλικό

5.2 Λογάριθμοι:

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ονομάζουμε λογάριθμο του αριθμού $\theta > 0$ με βάση το $0 < \alpha \neq 1$, ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός χ για τον οποίο ισχύει $\alpha^\chi = \theta$ και συμβολίζεται με $\log_\alpha \theta$.

Δηλαδή:

$$\alpha^\chi = \theta \Leftrightarrow \chi = \log_\alpha \theta \quad \text{με } \theta > 0 \text{ και } 0 < \alpha \neq 1$$

Ο $\log_\alpha \theta$ είναι ο εκθέτης στον οποίο πρέπει να υψώσουμε τον α για να βρούμε τον θ

Ιδιότητες λογαρίθμων που προκύπτουν από τον ορισμό :

Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε για κάθε $\chi \in \mathcal{R}$ και $\theta > 0$ ισχύουν :

- $\log_\alpha \alpha^\chi = \chi$
- $\log_\alpha 1 = 0$
- $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$
- $\log_\alpha \alpha = 1$

π.χ. $\log_6 6^4 = 4$

π.χ. $\log_{2013} 1 = 0$

π.χ. $4^{\log_4 9} = 9$

π.χ. $\log_{2013} 2013 = 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1. Οι λογάριθμοι με βάση το 10, δηλαδή της μορφής $\log_{10} \theta$ γράφονται απλούστερα $\log \theta$ και ονομάζονται δεκαδικοί λογάριθμοι.

$$\log \theta = \chi \Leftrightarrow 10^\chi = \theta$$

2. Οι λογάριθμοι με βάση το e , δηλαδή της μορφής $\log_e \theta$ ή απλούστερα $\ln \theta$ και ονομάζονται νεπέριοι ή φυσικοί λογάριθμοι.

$$\ln \theta = \chi \Leftrightarrow e^\chi = \theta$$

3. Ισχύει η ισοδυναμία:

$$\text{αν } 0 < \alpha \neq 1 \text{ και } \theta > 0 \text{ τότε } \log_\alpha \theta = \chi \Leftrightarrow \alpha^\chi = \theta$$

Παράδειγμα: να βρεθεί το χ ώστε να ισχύει $\log \chi = 3$

Λύση:

Πρέπει $\chi > 0$

$$\log \chi = 3 \Leftrightarrow \chi = 10^3 \Leftrightarrow \chi = 1000$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ :

Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $\kappa \in \mathcal{R}$ ισχύει :

1. $\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$

2. $\log_{\alpha} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$

3. $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta, \theta > 0$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ :

1. Έστω $\log_{\alpha} \theta_1 = \chi_1$ και $\log_{\alpha} \theta_2 = \chi_2$

Τότε : $\alpha^{\chi_1} = \theta_1$ και $\alpha^{\chi_2} = \theta_2$

$\theta_1 \theta_2 = \alpha^{\chi_1} \alpha^{\chi_2}$ επομένως $\theta_1 \theta_2 = \alpha^{\chi_1 + \chi_2}$ άρα $\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = \chi_1 + \chi_2$

$\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$

2. Έστω $\log_{\alpha} \theta_1 = \chi_1$ και $\log_{\alpha} \theta_2 = \chi_2$

Τότε : $\alpha^{\chi_1} = \theta_1$ και $\alpha^{\chi_2} = \theta_2$

$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\alpha^{\chi_1}}{\alpha^{\chi_2}}$ επομένως $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \alpha^{\chi_1 - \chi_2}$ άρα $\log_{\alpha} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \chi_1 - \chi_2$

$\log_{\alpha} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$

3. Έστω $\log_{\alpha} \theta = \chi$ άρα $\alpha^{\chi} = \theta$ οπότε $\alpha^{\kappa \chi} = \theta^{\kappa}$

$\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \chi$

$\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1. Μπορούμε να γράψουμε οποιονδήποτε αριθμό $\chi \in \mathcal{R}$ ως λογάριθμο με βάση το α (όπου $0 < \alpha \neq 1$) σύμφωνα με τον τύπο $\chi = \log_{\alpha} \alpha^{\chi}$

Π.χ. $\chi = \ln e^{\chi}$

2. Οι αντίστροφοι αριθμοί έχουν αντίθετους λογάριθμους ($0 < \alpha \neq 1, \theta > 0$)

$\log_{\alpha} \frac{1}{\theta} = \log_{\alpha} \theta^{-1} = -1 \log_{\alpha} \theta = -\log_{\alpha} \theta$

3. Ισχύει ότι :

$\log_{\alpha} \sqrt[\kappa]{\theta} = \frac{1}{\kappa} \log_{\alpha} \theta$

Παράδειγμα 1ο

Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $A = \frac{2 - \log 4}{\log 5}$

Λύση:

$$A = \frac{2 - \log 4}{\log 5} = \frac{\log 10^2 - \log 4}{\log 5} = \frac{\log \frac{100}{4}}{\log 5} = \frac{\log 25}{\log 5} = \frac{2 \log 5}{\log 5} = 2$$

Παράδειγμα 2ο

Να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{1 + 4 \log 2 - 3 \log 4 + \frac{1}{3} \log 8}{\log 75 - 2 \log \sqrt{3}}$$

Λύση:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 + 4 \log 2 - 3 \log 4 + \frac{1}{3} \log 8}{\log 75 - 2 \log \sqrt{3}} = \frac{\log 10 + \log 2^4 - \log 4^3 + \log \sqrt[3]{8}}{\log 75 - \log \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{\log 10 + \log 16 - \log 64 + \log 2}{\log 75 - \log 3} = \frac{\log \frac{10 \cdot 16 \cdot 2}{64}}{\log \frac{75}{3}} = \frac{\log 5}{\log 25} = \frac{\log 5}{2 \log 5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Τύπος αλλαγής βάσης

Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha, \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει :

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log_{\alpha} \theta}{\log_{\alpha} \beta}$$

Σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης μπορούμε να γράψουμε έναν λογάριθμο $\log_{\beta} \theta$ με τη βοήθεια δεκαδικών ή φυσικών λογάριθμων

$$\log_{\beta} \theta = \frac{\log \theta}{\log \beta} \quad \text{και} \quad \log_{\beta} \theta = \frac{\ln \theta}{\ln \beta}$$

Παράδειγμα 3^ο

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων :

$$i. A = \log_2 6 - \log_4 9 \quad \text{και} \quad ii. B = \frac{\log 45}{\log 3} - \frac{\ln 5}{\ln 3}$$

Λύση:

$$i. A = \log_2 6 - \log_4 9 = \log_2 (2 \cdot 3) - \frac{\log_2 9}{\log_2 4} = \log_2 2 + \log_2 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2 3 = 1$$

$$ii. B = \frac{\log 45}{\log 3} - \frac{\ln 5}{\ln 3} = \log_3 45 - \log_3 5 = \log_3 \frac{45}{5} = \log_3 9 = 2$$

Ασκήσεις στους Λογάριθμους :

1. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

i) $\log_2 16$ ii) $\log_5 25$ iii) $\log_3 81$ iv) $\log_5 5$ v) $\log_7 1$ vi) $\log_7 \frac{1}{7}$ vii) $\log_5 \sqrt{5}$ viii) $\log_8 2$

2. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

i) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$ ii) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt{5}$ iii) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{8}$ iv) $\log_{\sqrt{8}} \frac{1}{4}$ v) $\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{9}$

3. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

i) $\log_4 32$ ii) $\log_9 27$ iii) $\log_4 \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ iv) $\log_{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{2}}{16}$ v) $\log_{\frac{1}{3}} (27\sqrt{3})$

4. Να υπολογίσετε τους λογάριθμους :

i) $\log 100$ ii) $\log 10$ iii) $\log \frac{1}{10000}$ iv) $\log \sqrt{1000}$ v) $\ln e$ vi) $\ln e^3$ vii) $\ln 1$ viii) $\ln \frac{1}{e^2}$ ix) $\ln \sqrt{e}$

5. Να βρείτε τις τιμές των επόμενων παραστάσεων :

i) $\log(\ln e^{100})$ ii) $\ln(\log 10^e)$ iii) $\ln(\log_7 7)$
iv) $e^{\ln 3}$ v) $10^{\log 7}$ vi) $e^{3 \ln 2}$

6. Να βρείτε τον αριθμό a για τον οποίο ισχύει:

i) $\log_a 36 = 2$ ii) $\log_a \frac{1}{8} = 3$ iii) $\log_a 8 = \frac{3}{2}$ iv) $\log_a 4 = -\frac{2}{3}$

7. Να βρείτε τον αριθμό x για τον οποίο ισχύει :

i) $\log_4 x = 3$ ii) $\log_9 x = \frac{3}{2}$ iii) $\log_3 (|x| + 1) = 2$ iv) $\log_x (3x - 2) = 2$

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του x έχει νόημα ο παρακάτω λογάριθμος :

$$\log_x (-x^3 + 9x^2 - 26x + 24)$$

9. Δίνεται ο αριθμός :

$$y = \log \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$$

i. Να βρείτε τους περιορισμούς που ικανοποιεί ο αριθμός x .

ii. Να αποδείξετε ότι :

$$x = \frac{3 \cdot 10^y - 2 \cdot 10^{-y}}{10^y + 10^{-y}}$$

10. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

i) $\log_6 2 + \log_6 18$ ii) $\log 5 + \log 2$ iii) $\log 4 + \log 25$ iv) $\log 50 + \log 2000$
v) $\log_2 24 - \log_2 3$ vi) $\log 40 - \log 4$ vii) $\log 2 - \log 200$ viii) $\log \sqrt{9000} - \log 3$

11. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) 3 \log 2 + \log 125 \quad ii) 2 \log 5 + \log 20 + \log 2 \quad iii) 2 \log 40 - 4 \log 2 \quad iv) \log 300 - \frac{1}{2} \log 9$$

12. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) \frac{1}{2} \log 25 + \frac{1}{3} \log 8 \quad ii) \log 5 + 5 \log 2 - 2 \log 4 \quad iii) \frac{\log 2 + \log 12 - \log 3}{\log 14 - \log 7} \quad iv) \frac{2 \log 6 - \frac{1}{2} \log 16}{\log 48 - 4 \log 2}$$

13. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) \frac{\log 7 + 3 \log 2}{\log 2 + \log 28} \quad ii) \frac{\log 3 + 3 \log 2 - \log 6}{2 \log 2} \quad iii) \frac{\log 5 + \log 6}{1 + \log 3} \quad iv) \frac{\log 6000 - 2}{\log \sqrt{3} + \log 2 + \log \sqrt{5}}$$

14. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) \log(5 - \sqrt{15}) + \log(5 + \sqrt{15}) \quad ii) \log 40 - \log(3 - \sqrt{5}) - \log(3 + \sqrt{5})$$

$$iii) 2 \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(7 - 4\sqrt{3}) \quad iv) 3 \log \sqrt[4]{4 \sqrt{2^3 \sqrt{2}}} + 2 \log 5$$

15. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) 2 \log_3 6 - \log_3 24 + \frac{1}{2} \log_3 4 \quad ii) \frac{\log_2 15 - \log_2 \frac{1}{6} - \log_2 10}{2 \log_2 6 - \log_2 12}$$

$$iii) \frac{2 \log_3 2 + \log_3 18 - 2}{\log_3 12 - 1} \quad iv) \frac{\frac{1}{2} \log_4 25 + \log_4 40 - \frac{3}{2}}{\log_4 10 - \frac{1}{2}}$$

16. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) 10^{1-\log 5} \quad ii) 10^{2 \log 6} \quad iii) 1000^{\log 2} \quad iv) \sqrt{10}^{\log 9} \quad v) e^{2 \ln 5} \quad vi) \sqrt{e}^{\ln 16} \quad vii) \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln 3}$$

17. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) 10^{2 \log 6 - \log 12} \quad ii) 10^{3 - \log 5} \quad iii) 10^{2 - \frac{1}{2} \log 16} \quad iv) e^{\ln 24 - 3 \ln 2} \quad v) \left(\frac{1}{e}\right)^{2 \ln 5 - \ln 75}$$

18. Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} 3x - y = \log \frac{8}{3} \\ x + 2y = \log 18 \end{cases}$$

19. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$i) \log_{11} 7 \cdot \log_7 11 \quad ii) \log_5 3 \cdot \log_9 25 \quad iii) \log_2 25 \cdot \log_5 8 \quad iv) \log_9 8 \cdot \log_4 27$$

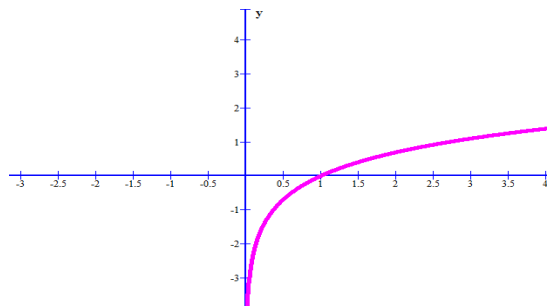
20. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων :

$$\begin{array}{llll} \text{i) } \ln 10 \cdot \log e & \text{ii) } \ln 10000 \cdot \log \sqrt{e} & \text{iii) } \ln \frac{1}{10} \cdot \log e^4 & \text{iv) } \ln \sqrt{10} \cdot \log \frac{1}{e^6} \\ \text{v) } \frac{\log 24}{\log 2} - \frac{\ln 3}{\ln 2} & \text{vi) } \frac{\log 18}{\log 3} - \frac{\ln 4}{\ln 9} & \text{vii) } 5^{\frac{\log 3}{\log 5}} & \text{viii) } 9^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \end{array}$$

5.3 Λογαριθμική Συνάρτηση

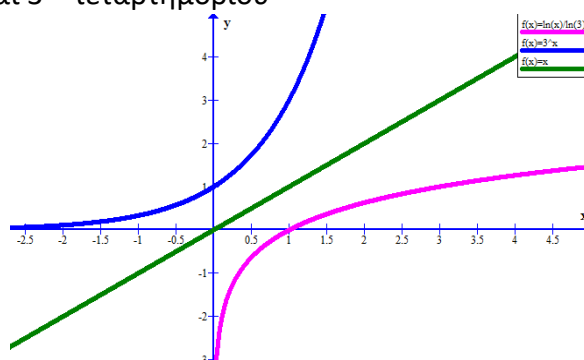
1. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $x > 0$ και $a > 1$

- Πεδίο ορισμού : $(0, +\infty)$
- Σύνολο τιμών : $\mathcal{R}$
- $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα
- Γραφική παράσταση :



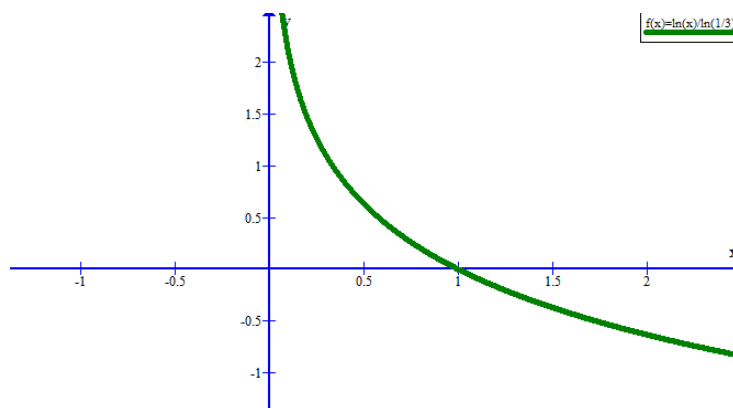
Παρατήρηση:

1. Έχει την ιδιότητα $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (είναι δηλαδή ένα προς ένα 1-1)
Μια ιδιότητα που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση εξισώσεων
2. Η μονοτονία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση ανισώσεων αν το $a > 1$ η f είναι (↑)
Δηλαδή $\log_a x_1 < \log_a x_2 \xLeftrightarrow{a > 1} x_1 < x_2$
3. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = a^x$ και $y = \log_a x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ (διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου



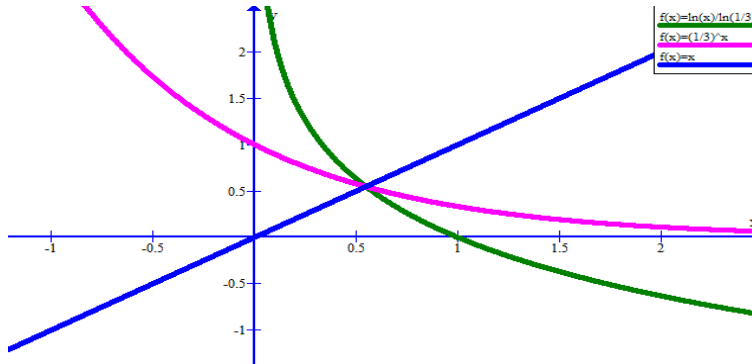
2. Η συνάρτηση $f(x) = \log_a x$ με $x > 0$ και $0 < a < 1$

- Πεδίο ορισμού : $(0, +\infty)$
- Σύνολο τιμών : $\mathcal{R}$
- $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα
- Γραφική παράσταση :



Παρατήρηση:

4. Έχει την ιδιότητα $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ (είναι δηλαδή ένα προς ένα 1-1)
Μια ιδιότητα που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση εξισώσεων
5. Η μονοτονία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην επίλυση ανισώσεων αν το $0 < \alpha < 1$ ή $\alpha > 1$ η f είναι (↓)
Δηλαδή $\log_{\alpha} x_1 > \log_{\alpha} x_2 \xLeftrightarrow{0 < \alpha < 1} x_1 < x_2$
6. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = a^x$ και $y = \log_a x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ (διχοτόμο του 1^{ου} και 3^{ου} τεταρτημορίου



Παράδειγμα 1ο

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης :

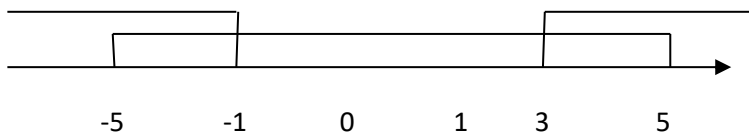
$$f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) + \ln(5 - |x|)$$

Λύση:

Πρέπει : $x^2 - 2x - 3 > 0$ και $5 - |x| > 0$

- $x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow (\Delta = 16, x_1 = 3, x_2 = -1) \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ή } x > 3)$
- $5 - |x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

Συναληθεύοντας έχουμε :



Άρα : το πεδίο ορισμού της f είναι : $A_f = (-5, -1) \cup (3, 5)$

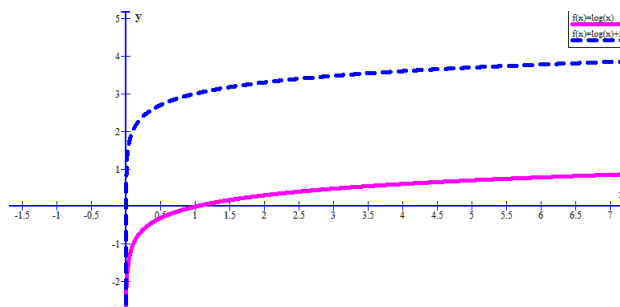
Παράδειγμα 2ο

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

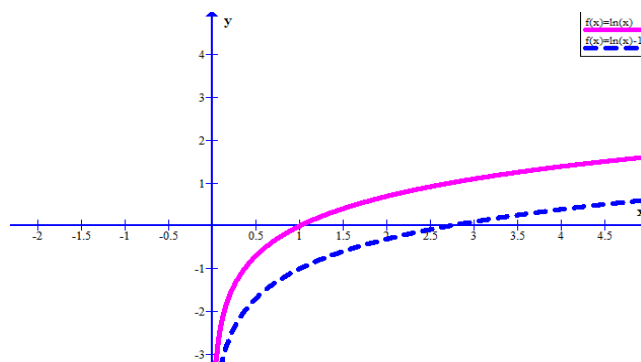
- i. $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log x + 3$
- ii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln \frac{x}{e}$

Λύση:

- i. Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \log x$ και η γραφική παράσταση της $g(x) = \log x + 3$ προέρχεται από την κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 3 μονάδες προς τα πάνω



- ii. $g(x) = \ln \frac{x}{e} = \ln x - \ln e = \ln x - 1$
Οπότε η γραφική παράσταση της g προέρχεται από την κατακόρυφη μετατόπιση της f κατά 1 μονάδα προς τα κάτω



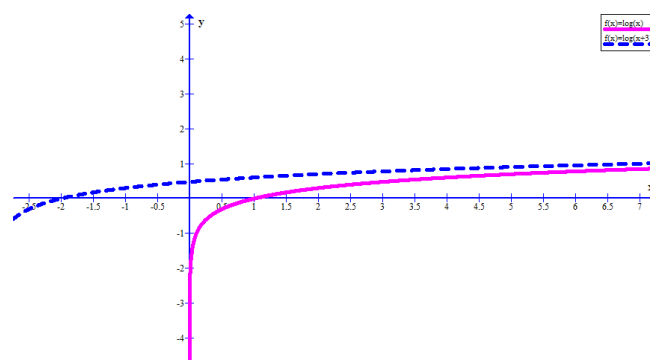
Παράδειγμα 3ο

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

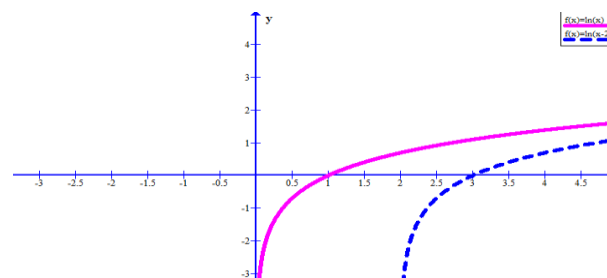
- i. $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x + 3)$
ii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(x - 2)$

Λύση :

- i. Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \log x$ και η γραφική παράσταση της $g(x) = \log(x + 3)$ προέρχεται από την οριζόντια μετατόπιση της f κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά



- ii. Σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x$ και η γραφική παράσταση της $g(x) = \ln(x - 2)$ προέρχεται από την οριζόντια μετατόπιση της f κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά .



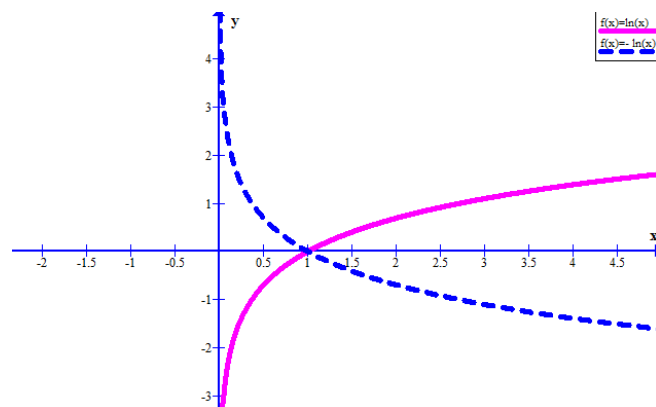
Παράδειγμα 4^ο

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

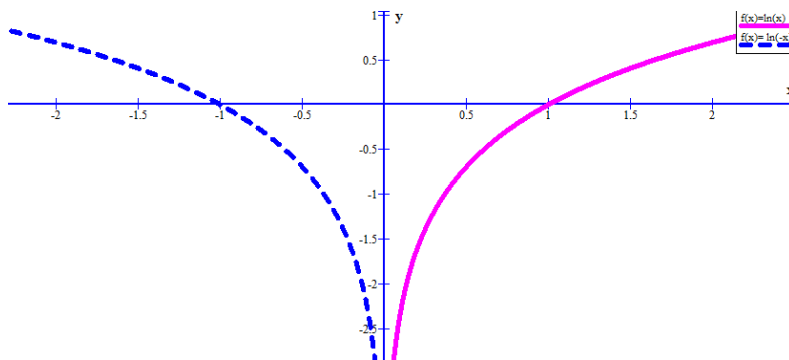
- i. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln \frac{1}{x}$
- ii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(-x)$

Λύση:

- i. $g(x) = \ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x$
Οπότε σχεδιάζουμε την f και η g θα είναι η συμμετρική της ως προς τον $\chi'\chi$



- ii.



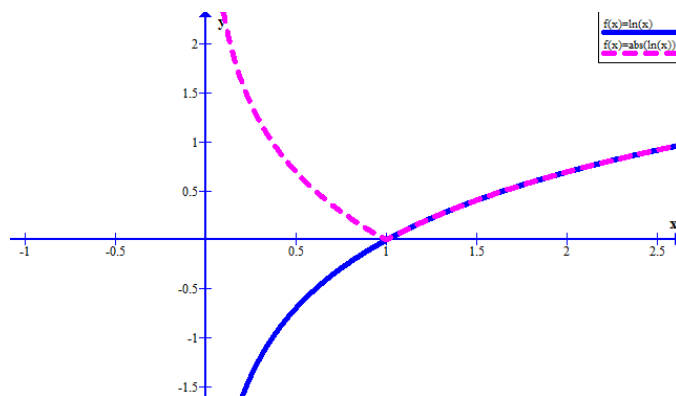
Παράδειγμα 5^ο

Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :

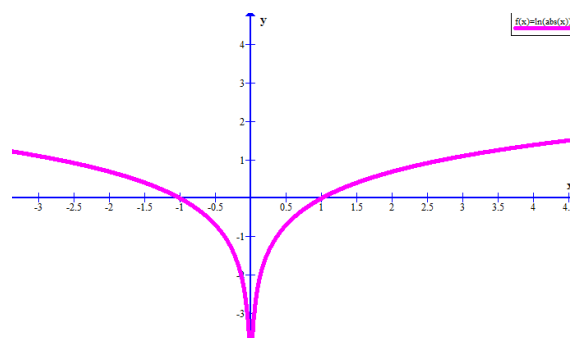
$$i) f(x) = |\ln x| \quad ii) g(x) = \ln|x| \quad iii) h(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$$

Λύση:

- i. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τα τμήματα της $y=\ln x$ που βρίσκονται πάνω από τον x και από τα συμμετρικά ως προς τον x , των τμημάτων που βρίσκονται κάτω από τον x



- ii.
$$f(x) = \ln |x| = \begin{cases} \ln x & , \text{άν } x > 0 \\ \ln(-x) & , \text{άν } x < 0 \end{cases}$$



- iii.
$$f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2 = \frac{1}{2} \ln |x|^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \ln |x| = \ln |x|$$

Οπότε η γραφική της παράσταση είναι ίδια με την γραφική παράσταση του ερωτήματος ii

Παράδειγμα 6ο

Να λυθούν οι εξισώσεις : i) $\log_2(x - 12) = 3$ ii) $\log(x - 6) + \log(x + 1) = 3 \log 2$

Λύση :

- i. $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

$$\log_2(x - 12) = 3 \Leftrightarrow x - 12 = 2^3 \Leftrightarrow x - 12 = 8 \Leftrightarrow x = 20$$

- ii. Πρέπει : $x - 6 > 0 \Leftrightarrow x > 6$

$$\text{Και } x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$$

Συναληθεύοντας έχουμε : $x > 6$

$$\begin{aligned} \log(x - 6) + \log(x + 1) &= 3 \log 2 \Leftrightarrow \log[(x - 6)(x + 1)] = \log 2^3 \stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} x^2 - 5x - 6 \\ &= 8 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 14 = 0 \end{aligned}$$

$$\Delta = 81, x_1 = 7 \text{ (δεκτή)} \quad x_2 = -2 \text{ (απορίπτεται)}$$

Παράδειγμα 7ο

Να λυθούν οι ανισώσεις : i) $\log(x - 20) < 2$ ii) $\ln(x + 3) + \ln(2 - x) < \ln(5 - x)$

Λύση:

i) πρέπει $x - 20 > 0 \Leftrightarrow x > 20$

$\log(x - 20) < 2 \stackrel{\uparrow}{\Leftrightarrow} x - 20 < 10^2 \Leftrightarrow x - 20 < 100 \Leftrightarrow x < 120$
συναληθεύοντας έχουμε : $20 < x < 120$

ii) πρέπει : $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$

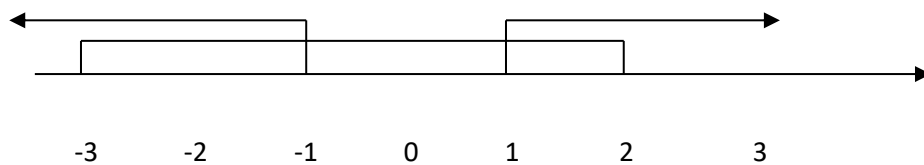
$2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$

$5 - x > 0 \Leftrightarrow x < 5$

συναληθεύοντας έχουμε : $-3 < x < 2$

$\ln(x + 3) + \ln(2 - x) < \ln(5 - x) \Leftrightarrow \ln[(x + 3)(2 - x)] < \ln(5 - x) \stackrel{\uparrow}{\Leftrightarrow} -x^2 - x + 6 < 5 - x$
 $\Leftrightarrow -x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1 \text{ ή } x < -1$

Συναλήθευση:



άρα $x \in (-3, -1) \cup (1, 2)$

Παρατήρηση :

$\log x^2 = 2 \log |x|$

Ασκήσεις στην λογαριθμική συνάρτηση

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
 - i. $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log x + 4$
 - ii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln x - 3$
2. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
 - i. $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log(x + 4)$
 - ii. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(x - 3)$
3. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
 - i. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ και $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$
 - ii. $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ και $g(x) = \log_{\frac{2}{3}} x - 2$
4. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων :
 - i. $f(x) = \log(10x)$
 - ii. $f(x) = \ln \frac{x}{e^2}$
 - iii. $f(x) = \log(10x + 30)$
5. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων :
 - i. $f(x) = \log x$ και $g(x) = \log \frac{1}{x}$
 - ii. $f(x) = \log |x|$, $g(x) = \frac{1}{4} \log x^4$ και $h(x) = |\log |x||$
6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :
 - i) $f(x) = \log(2x - 6)$ ii) $f(x) = \ln(15 - 3x)$ iii) $f(x) = \log(4x + 24) + \ln(35 - 5x)$
7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :
 - i) $f(x) = \ln(|2x - 5| - 3)$ ii) $f(x) = \log(5 - |4 - x|)$ iii) $f(x) = \log(x^2 - 9)$
 - iv) $f(x) = \log(25 - 4x^2)$ v) $f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$ vi) $f(x) = \log(-x^2 + 4x + 5)$
 - vii) $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4)$ viii) $f(x) = \log(x^2 - 2x + 3)$
8. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :
 - i) $f(x) = \log(2x^3 + 3x^2 - 11x - 6)$ ii) $f(x) = \log(-x^3 + 7x + 6)$
9. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού
όπου $f(x) = \log(x^2 - 2x - 3) + \log(x - 2)$ και $g(x) = \log[(x^2 - 2x - 3)(x - 2)]$
10. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :
 - i) $f(x) = \ln \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x}$ ii) $f(x) = \ln \frac{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}{4 - x}$

$$iii) f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) + \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$$

11. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των επόμενων συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \log(2^{2x-5} - 8) \quad ii) f(x) = \log\left(\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} - \frac{1}{27}\right)$$

$$iii) f(x) = \log(8^{x+2} - 4^{x-1}) \quad iv) f(x) = \ln(7^x + 3^x)$$

$$v) f(x) = \ln(4^x - 10 \cdot 2^x + 16) \quad vi) f(x) = \ln(21 \cdot 3^x + 5^{x+3} - 3^{x+4} - 5^{x+2})$$

12. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathcal{R}$ η συνάρτηση :

$$f(x) = \ln((\lambda + 3)x^2 + \lambda x + \lambda) \text{ έχει πεδίο ορισμού το } \mathcal{R}$$

13. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 3 - \log(10 - 2x)$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- iv. Να λύσετε την εξίσωση :

$$8^{\frac{|x|}{3}-1} = f\left(\frac{99}{20}\right)$$

14. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \log \frac{6-x}{6+x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\varepsilon \varphi^2 \chi - 3 = \frac{f(2) + f(4)}{\sigma \nu^2 \chi}$$

- iii. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή
- iv. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

15. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \log(x + 30) = 2 \quad ii) \log_2(x^2 - 9) = 4 \quad iii) \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) = -3 \quad iv) \ln(3x - 12 + e^2) = 2$$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \log(|2x - 5| - 3) = 1 \quad ii) \log\left(\left|\frac{x}{100} - 1\right|\right) = -2 \quad iii) \ln(|x + 2| - 4) = 0$$

17. Να λύσετε τις εξισώσεις :

$$i) \log(x + 2) = \log(4 - x) \quad ii) \ln(x + 3) = \ln(2x + 8) \quad iii) \log(x^2 - 6x) = \log(18 - 3x)$$

18. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $1 + \log(x - 2) = \log 30$ ii) $\log(x^2 - 16) = \log 900 - 2$ iii) $\log x + \log(x + 6) = 4 \log 2$
iv) $\log(x - 2) + \log(x + 2) = \log(8 - x)$ v) $\log 9 + x \cdot \log 3 = \log 54 - \log 2$

19. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $\log(1 + x) = 1 + \log(1 - x)$ ii) $\ln \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{2}$
iii) $2 \log(2x - 1) - \log(3x - 2x^2) = \log(4x - 3) - \log x$
iv) $\ln x - \ln(x - 2) = \ln(x - 3) - \ln(x - 4)$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\log 9 + x \cdot \log 2 = \log 4 + x \cdot \log 3$ ii) $(x - 2) \ln 4 + (2x - 4) \ln 3 = \ln 144 - 2 \ln 2$
iii) $x \cdot \log 2 = \log(2^x + 4) - \log(2^{x+1} - 1)$ iv) $\ln 3 + x \cdot \ln 9 = \frac{1}{3} \ln 9$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\log^2 x - \log x - 2 = 0$ ii) $\ln^2 x - \ln x^2 - 3 = 0$ iii) $\log^2 x + 3 \log \sqrt{x} - 1 = 0$
iv) $\log^2 x^2 - 2 \log x^4 - 12 = 0$ v) $\log^2 x^2 - 10 \log x + 4 = 0$

22. Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις :

i) $\frac{\log x + 1}{\log x} - \frac{2}{\log x + 2} = \frac{4}{\log^2 x + 2 \log x}$ ii) $1 - \frac{\log x^2 - 10}{\log x^3} = \frac{20 - \log x}{\log x^2}$
iii) $\frac{1}{\ln^2 x + \ln x^2} = 1 - \frac{\ln x^2}{\ln(xe^2)}$ iv) $\frac{\log(10x)}{\log x - 1} = \frac{\log(100x)}{\log x + 3} - \frac{4}{\log^2 x + \log x^2 - 3}$

23. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $2^{\log x + 1} + 2^{\log x + 2} = 48$ ii) $2^{\log x} + 2^{2 - \log x} = 5$ iii) $9^{\log x + 1} + 4 \cdot 3^{\log x + 2} + 3 = 0$

24. Να λυθούν οι εξισώσεις :

i) $3^x = 5$ ii) $3 \cdot 5^x - 12 = 0$ iii) $2^{x+3} = 5^{1-x}$ iv) $3^{x-2} = 2^{3-x}$ v) $25^x - 5^{x+1} + 6 = 0$

25. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x^{\log x} = 10000$ ii) $x^{\log x} = 100x$ iii) $x^{2 \log x} = \sqrt{x}$ iv) $x^{\log x} = 10000x^2$

26. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει :

$$x^{\log 2} = 2^{\log x}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $x^{\log 2} + 2^{\log x} = 8$

27. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει :

$$x^{\log 3} = 3$$

β) Να λύσετε την εξίσωση : $9 - 10x^{\log 3} + 9^{\log x} = 0$

28. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\log(x - 12) > 2$ ii) $\log_2(2x - 6) \geq 4$ iii) $\log_{\frac{1}{2}}(2 - 7x) \geq 2$ iv) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 2) \geq -1$

29. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\log(|2x - 5| + 3) < 2$ ii) $\log\left(\left|\frac{x}{100} - 1\right|\right) > 0$ iii) $\ln(|x + 2| - 4) \leq 0$

30. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\log(2x + 6) \geq \log(18 - x)$ ii) $\ln(x + 5) \leq \ln(9 - x)$ iii) $\log(x^2 + 2) - \log(6 - |x|) > 0$

31. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $1 + \log(x + 1) \leq \log(32 - x)$ ii) $\log(x + 2) + \log 3 \leq 2 \log 6$
iii) $\log x + \log(x + 4) \geq 2 \log 2 + \log 3$ iv) $2 \ln x \geq \ln(x - 2) + \ln(x + 6)$

32. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $2 \log 5 + x \cdot \log 3 \leq \log 9 + x \cdot \log 5$ ii) $x \cdot \ln 3 + \ln(3^{x+1} - 1) = \ln(3 + 7 \cdot 3^x)$
iii) $\log(2 \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 4^x) \geq x + \log 7$ iv) $(4x - 5) \ln 6 \leq (2x - 1) \ln 2 + (6x - 9) \ln 3$

33. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\log^2 x - 2 \log x - 3 \geq 0$ ii) $2 \ln^2 x - \frac{5}{2} \ln x^2 + 2 > 0$ iii) $\log^2 x - \log x^3 + 2 < 0$
iv) $2 \log^2 x - 3 \log x^4 + 8 \leq 0$

34. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\log^2 x \leq 4$ ii) $\log^2 x - 1 \geq 0$ iii) $\ln^2 x < 2 \ln x$ iv) $\log^2 x > 0$ v) $\log^3 x - \log^2 x < 0$

35. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\log^2 x \leq \log x^4$ ii) $\log \sqrt{x} \leq \log^2 x$ iii) $\log^3 x - \log^2 x^2 + \log x + 6 \leq 0$
iii) $\ln^3 x^2 + 10 \ln^2 x - 11 \ln x + 2 \geq 0$

36. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $(\log x - 2)(\log x - 1) \geq 0$ ii) $(\log x + 1)(3 - \log x) \cdot \ln x \leq 0$ iii) $(2^x - 8)(\log 5 - \log x) \leq 0$

37. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $\frac{2 \ln x - 1}{\ln x} \geq 1$ ii) $\frac{\log x - 2}{\log x} \leq \frac{\log x - 1}{\log x + 3}$ iii) $\log x \geq \frac{2}{\log x - 1}$ iv) $\frac{\ln x^2 + 1}{\ln(e \cdot x)} > 1$

38. Να λυθούν τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} \log(6x - 4y) = 1 \\ \ln(x - y) = 0 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \log(5x + 4y) - \log 2 = \log 7 \\ 1 + \log(x + y) = \log 30 \end{cases} \quad iii) \begin{cases} \log(x - 2y) = 3 \log 2 \\ \log x + \log y = \log 24 \end{cases}$$

39. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \log(\log(x + 10))$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα y'
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) \geq 0$

40. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \log(2 - \log(|2x - 13| - 3))$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες

41. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) \text{ και } g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$$

- Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$

42. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \ln \frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \ln 2$
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$

43. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = x + \ln(e^x - 2)$$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 100^{\log \sqrt{x}}$
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) \geq 3 \ln 2 + \ln(e^x - 3)$

44. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = \log \left(\left(\frac{1}{2} \right)^x + a \right)$$

Διέρχεται από το σημείο $M(-6, 1 + \log 6)$.

- Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathcal{R}$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 1$
- Να λύσετε την εξίσωση :

Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

$$2^{\log y} + y^{f(-3)} = 2$$

Διαγώνισμα στους λογάριθμους

Θέμα 1°

A. Τι ονομάζουμε $\log_{\alpha} \theta$, λογάριθμο του θ με βάση το α ;

B. Αν $0 < \alpha \neq 1$ να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει :

$$\log_{\alpha}(\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$$

Γ. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

- i. $\log_{\alpha} \theta = \chi \Leftrightarrow \theta = \dots$
- ii. $\log_{\alpha} \alpha = \dots$
- iii. $\log_{\alpha} 1 = \dots$
- iv. $\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \dots$
- v. $\log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2 = \dots$

Θέμα 2°

A. Να αποδείξετε ότι :

- i. $\log 4 + \log 5 - \log 2 = 1$
- ii. $2 \log_5 3 + 3 \log_5 2 - 2 \log_5 6 = \log_5 2$
- iii. $\frac{\log \sqrt{125} + \log \sqrt{27} - \log \sqrt{8}}{\log 15 - \log 2} = \frac{3}{2}$

B. Να λυθεί η ανίσωση $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$

Δ. Να λυθεί η ανίσωση $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16 \leq 0$

Θέμα 3°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1-5a}{a+1}\right)^x$

A. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$

B. Να βρείτε τις τιμές του a ώστε η f να είναι :

- 1. Γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
- 2. Γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο :

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1} \right)$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) - 3 \ln 2 = 0$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 0$

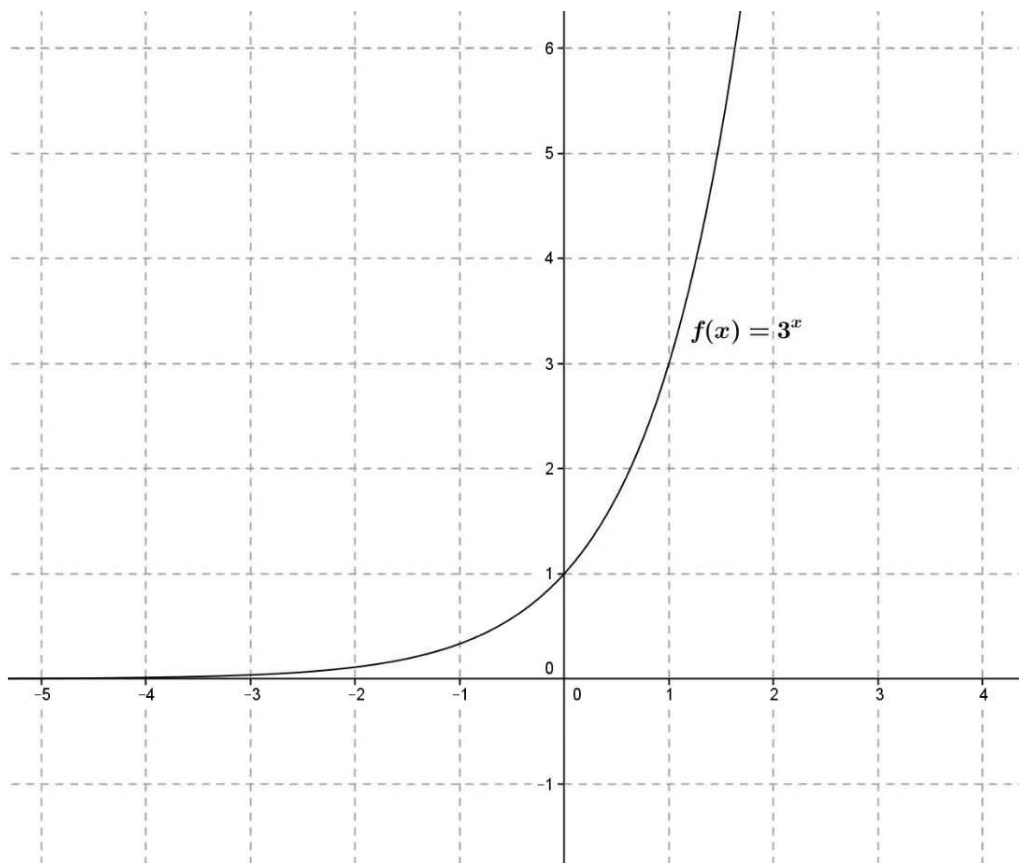
5.4 Ασκήσεις τράπεζας θεμάτων στην Εκθετική – Λογαριθμική Συνάρτηση

§5.1 ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1) ΑΣΚΗΣΗ 2-22630 §5.1

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3x + 1$ και $h(x) = 3x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της f .
(Μονάδες 12)
- β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h ;
(Μονάδες 13)



2) ΑΣΚΗΣΗ 2-22633 §5.1

Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}$, $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

- α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)
- β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$.
(Μονάδες 12)

3) ΑΣΚΗΣΗ 4-22787 §5.1

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = q_0 \alpha^t$, $t \geq 0$, όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), $f(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου (σε mg) και οι αριθμοί α , q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει $0 < \alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές συναρτήσει της αρχικής τιμής q_0 . (Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(t)$	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \frac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4^{ης} ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$

(Μονάδες 5)

4) ΑΣΚΗΣΗ 4-22790 §5.1

Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$). Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια είναι:

$$Q(t) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2} \ln 2} \quad (\text{Μονάδες 10})$$

β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

5) ΑΣΚΗΣΗ 4-22791 §5.1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$. (Μονάδες 7)

6) ΑΣΚΗΣΗ 4-22820 §5.1

Μια ποσότητα ραδιενεργού υλικού (σε κιλά) θάβεται και με την πάροδο του χρόνου t (σε έτη), μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q(t) = Q_0 \cdot e^{ct}$).

α) Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας, να δείξετε

$$\text{ότι } Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t \quad (\text{Μονάδες 10})$$

β) Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό, να βρείτε την αρχική ποσότητα που θάφτηκε. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε μετά από πόσα χρόνια, η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά. (Μονάδες 9)

§5.2 ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

§5.3 ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

7) ΑΣΚΗΣΗ 2-22631 §5.2 - §5.3

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln(x^2 - 8) = \ln 7x$ (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln(x^2 - 8) \geq \ln 7x$ (Μονάδες 12)

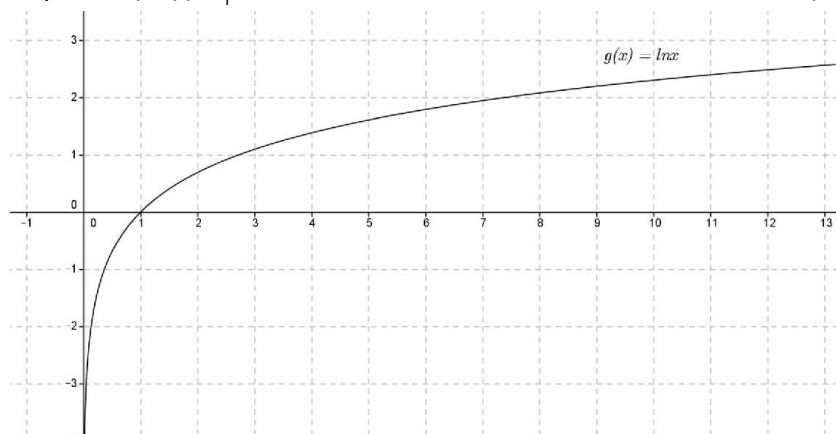
8) ΑΣΚΗΣΗ 2-22632 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-3)$, $x > 3$

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ (Μονάδες 8)

β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f ; (Μονάδες 9)



9) ΑΣΚΗΣΗ 2-22634 §5.2 - §5.3

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$ (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2} \ln(49)$ (Μονάδες 15)

10) ΑΣΚΗΣΗ 2-22635 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - e) - 1$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 12)
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ (Μονάδες 13)

11) ΑΣΚΗΣΗ 2-22636 §5.2 - §5.3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2 + 4)$ και $g(x) = \ln x + \ln 4$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 12)
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$. (Μονάδες 13)

12) ΑΣΚΗΣΗ 2-22637 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3 - \sqrt{x+1})$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 13)
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$ (Μονάδες 12)

13) ΑΣΚΗΣΗ 2-22638 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)
β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x ' και y '. (Μονάδες 10)
γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y = \ln x$. (Μονάδες 7)

14) ΑΣΚΗΣΗ 4-22794 §5.2 - §5.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$ και η αριθμητική τιμή του για $x=2$ να είναι ίση με 12. (Μονάδες 7)
β) Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$
i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-2$. (Μονάδες 5)
ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq -x + 14$. (Μονάδες 7)
iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x) \leq -\ln x + 14$. (Μονάδες 6)

15) ΑΣΚΗΣΗ 4-22796 §5.2 - §5.3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln x^2$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 4)
β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$. (Μονάδες 8)
γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$. (Μονάδες 6)
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(x) = g(\sqrt{e-1})$. (Μονάδες 7)

16) ΑΣΚΗΣΗ 4-22799 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x - 2)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)
β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log \sqrt{6}}$ (Μονάδες 7)
γ) Να λύσετε την εξίσωση $4 \cdot 4^{f(x)} - 9 \cdot 2^{f(x)} + 100^{\log \sqrt{6}} - 4 = 0$ (Μονάδες 13)

17) ΑΣΚΗΣΗ 4-22802 §5.2 - §5.3

Σε ένα ανοιχτό δοχείο υπάρχουν 10 lt ενός υγρού. Το υγρό εξατμίζεται έτσι ώστε ο όγκος του να μειώνεται κατά 15% ανά εβδομάδα.

- α) Να βρείτε την ποσότητα του υγρού που υπάρχει στο δοχείο στο τέλος της 1^{ης} και στο τέλος της 2^{ης} εβδομάδας. (Μονάδες 8)
β) Ο όγκος του υγρού μετά από t εβδομάδες δίνεται από τη συνάρτηση $V(t) = V_0 \cdot \alpha^t$ όπου V_0 και α σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς V_0 και α . (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε πότε ο όγκος του υγρού που υπάρχει στο δοχείο είναι μικρότερος από το μισό της αρχικής του τιμής. (Δίνεται ότι: $\log 5 \cong 0,7$ και $\log 85 \cong 1,93$) (Μονάδες 9)

18) ΑΣΚΗΣΗ 4-22805 §5.2 - §5.3

Σε ένα πείραμα εργαστηρίου, ο αριθμός των βακτηρίων δίνεται από τον τύπο $P(t) = 200 \cdot e^{ct}$, όπου t ο χρόνος σε ώρες από την αρχή του πειράματος. Σε μία ώρα ο αριθμός των βακτηρίων ήταν 328. (Δίνεται ότι: $\log(1,64) \cong 0,5$ και $\log 10 \cong 2,3$)

- α) Να βρείτε τον αριθμό των βακτηρίων όταν ξεκίνησε το πείραμα. (Μονάδες 7)
β) Να αποδείξετε ότι $c = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 9)
γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ο αριθμός των βακτηρίων είναι μεγαλύτερος από το δεκαπλάσιο και μικρότερος από το εκατονταπλάσιο της αρχικής του τιμής. (Μονάδες 9)

19) ΑΣΚΗΣΗ 4-22808 §5.2 - §5.3

Το φορτίο ενός πυκνωτή που εκφορτίζεται μειώνεται εκθετικά. Το φορτίο του πυκνωτή δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου (σε ms) από τον τύπο $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\lambda t}$, όπου Q_0 το αρχικό φορτίο του πυκνωτή (σε μCb).

- α) Αν τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ ms}$ το φορτίο είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ της αρχικής του τιμής, να δείξετε ότι $\lambda = \ln 2$. (Μονάδες 8)
β) Αν τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ ms}$ το φορτίο του είναι $60 \mu\text{Cb}$, να αποδείξετε ότι $Q_0 = 120 \mu\text{Cb}$. (Μονάδες 8)
γ) Πότε το φορτίο του πυκνωτή γίνεται μικρότερο από $15 \mu\text{Cb}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

20) ΑΣΚΗΣΗ 4-22810 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$ (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$ (Μονάδες 9)

21) ΑΣΚΗΣΗ 4-22812 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$ (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$ (Μονάδες 9)

22) ΑΣΚΗΣΗ 4-22814 §5.2 - §5.3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 5x^3 - 8x^2 + \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha = -8$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{(\ln^2 x + 1)^3}{(\ln^2 x + 1)^2 + 1} = \frac{8}{5}$ (Μονάδες 8)

23) ΑΣΚΗΣΗ 4-22816 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e \cdot x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x) < f(x)$. (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(\sqrt{3} \cdot \eta\mu x) = f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 13)

24) ΑΣΚΗΣΗ 4-22819 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(3x - 11)}{\ln(x - 5)}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$ (Μονάδες 8)

γ) Αν $x > 6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 1$ (Μονάδες 8)

25) ΑΣΚΗΣΗ 4-22822 §5.2 - §5.3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x) + f(e^x - 2) = 3\ln 2$ (Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x) + f(e^x - 2) \leq 3\ln 2$ (Μονάδες 10)

6. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στα Συστήματα

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει ότι :

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 \\ 5\alpha + 4\beta = -2 \end{cases}$$

i. Να βρείτε τους αριθμούς α και β

ii. Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} \chi - \alpha\gamma - \beta\omega = \beta \\ \alpha\chi - \beta\gamma + 7\omega = 1 \\ -\beta\chi + \gamma + \omega = -\alpha \end{cases}$$

2. Σε ένα γραμμικό σύστημα 2×2 με αγνώστους χ και γ , ισχύει ότι :

$$3D_x + \lambda D_y = -9D$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση, τη $(\chi, \gamma) = (-1, 3)$.

i. Να βρείτε τον αριθμό λ

ii. Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} x - \lambda y = 5 \\ x^2 + \lambda(xy + y^2) = 1 \end{cases}$$

3. Να λύσετε τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 4y = -9 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = -5 \end{cases}$$

4. Δίνεται το σύστημα :

$$(\Sigma) \begin{cases} \lambda x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda y = 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

- a) Να βρείτε τις D , D_x , D_y και να τις παραγοντοποιήσετε .
b) Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα .

5. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x + \lambda y = 2\lambda - 1 \\ 3x + (2 - \lambda)y = 1 \end{cases}$$

α) Να είναι αδύνατο

β) Να έχει άπειρες λύσεις τις οποίες και να βρείτε .

6. Δίνεται το σύστημα :

$$(\Sigma) \begin{cases} (\lambda + 1)x + 8y = 4\lambda \\ \lambda x + (\lambda + 3)y = 3\lambda - 1 \end{cases} \quad \phi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3, \quad \omega(\lambda) = 4\lambda^2 - 12\lambda + 8, \quad \rho(\lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda - 1$$

καθώς και τα τριώνυμα:

α) Να λύσετε τις εξισώσεις : $\phi(\lambda)=0$, $\omega(\lambda)=0$ και $\rho(\lambda)=0$

β) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα .

γ) Να βρείτε τις D, Dx, Dy του συστήματος .

7. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \alpha x + \beta y = 5$ η οποία διέρχεται από τα σημεία A(1,-2) και B(-3,-4)
Να βρείτε τις τιμές των α και β

8. Να λυθούν τα συστήματα :

$$i) \begin{cases} x + y = 16 \\ x + \omega = 22 \\ y + \omega = 28 \end{cases} \quad ii) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{\omega} = \frac{1}{20} \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \end{cases} \quad iii) \begin{cases} 2x + y - 4\omega = 14 \\ -x + 5y - \omega = 1 \\ 2x - 4y + 5\omega = 13 \end{cases}$$

9. Να διερευνηθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda + 2)y = 5 \end{cases}$$

10. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha x + (\alpha + \beta)y = -3\beta \\ -\beta x + (\alpha - \beta)y = 4\beta \end{cases}, \quad \text{με } \alpha, \beta \neq 0$$

- i. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση
- ii. Αν ισχύει $D_y = D$, να λύσετε το παραπάνω σύστημα

11. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x - \lambda y = 5 \end{cases}$$

- i. Να αποδείξετε ότι το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathcal{R}$
- ii. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathcal{R}$ ισχύει $x_0 + 2y_0 < 8$

7. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στην Τριγωνομετρία

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης :

$$f(x) = a + \beta \cdot \eta\mu 2x$$

Διέρχεται από τα σημεία :

$$M\left(\frac{31\pi}{12}, 22\right), N\left(\frac{53\pi}{12}, 4\right)$$

- Να βρείτε τους αριθμούς α και β
- Να βρείτε την περίοδο, καθώς και τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 1$
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$
- Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$

2. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu(11\pi + x) - \frac{\eta\mu\left(\frac{25\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu\frac{43\pi}{6}}$$

- Να απλοποιήσετε τον τύπο της f
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(2x) + f(x) = 0$
- Να λύσετε την εξίσωση :

$$3(1 + f(x)) = 2\left[f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2$$

3. Δίνεται γωνία $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ για την οποία ισχύει ότι :

$$10\eta\mu^2\omega - \sigma\upsilon\nu\omega - 7 = 0$$

- Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω
- Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{5} = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)}{\eta\mu x}$$

$$\beta) \eta\mu x \cdot \epsilon\varphi x = \left[8\sigma\varphi(5\pi - \omega) - 3\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \omega\right)\right] \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu x)$$

4. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{\alpha - 2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{\alpha - 3\eta\mu x}{1 - \eta\mu x}$$

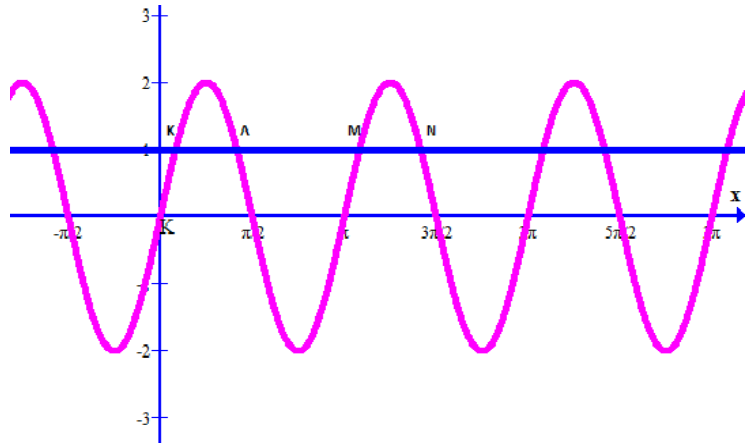
Της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{7\pi}{6}, 1\right)$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f
- Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3\epsilon\varphi^2 x$ για κάθε $x \in A$
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = \frac{\eta\mu 40^\circ}{\sigma\upsilon\nu 130^\circ} + \frac{10 \cdot \eta\mu 70^\circ}{\eta\mu 110^\circ}$

5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας τριγωνομετρικής συνάρτησης f .

Να βρείτε :

- i. Την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f
- ii. Τον τύπο της f
- iii. Της συντεταγμένες των σημείων K , Λ , M και N που τέμνει η ευθεία $y=1$ την C_f



6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $\sqrt{3} \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{\chi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = 3$ ii) $2\eta\mu^3\chi + \eta\mu\chi = 0$ iii) $(1 - \eta\mu\chi) \cdot (1 + \sqrt{2} \cdot \eta\mu 2\chi) = 0$ στο $[0, \pi]$

7. Δίνεται η εξίσωση :

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi + (\alpha + 2)\eta\mu\chi - 1 - 2\alpha = 0, \text{ όπου } \alpha \in \mathcal{R}$$

- i. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\eta\mu^2\chi - (\alpha + 2)\eta\mu\chi + 2\alpha = 0$$

- ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathcal{R}$ έχει λύσεις

- iii. Για $\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ να λύσετε την παραπάνω εξίσωση στο διάστημα $[0, 2\pi]$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \beta \cdot \eta\mu 2\chi$, όπου $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ η οποία έχει μέγιστη τιμή 3 και ελάχιστη -1

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$

- ii. Να βρείτε την περίοδο της f

- iii. Να βρείτε για ποια τιμή του $\chi \in [0, \pi]$ η f παίρνει τη μέγιστη και για ποια την ελάχιστη τιμή της

- iv. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f στο διάστημα $[0, \pi]$

- v. Να γράψετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς : $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $f\left(\frac{5\pi}{16}\right)$, $f\left(\frac{7\pi}{16}\right)$

9. Η συνάρτηση : $f(x) = 2\alpha + \beta \sigma\upsilon\nu \frac{4\chi}{3}$ με $\alpha \in \mathcal{R}$ και $\beta < 0$ έχει μέγιστο το 5 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\pi, \frac{1}{2}\right)$

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-2$ και $\beta=-9$

- ii. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

10. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \alpha - \beta \sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$ με $\alpha \in \mathcal{R}$ και $\beta > 0$

Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 3 και τέμνει τον άξονα των x στο 3, να βρείτε τα α, β .

11. Η συνάρτηση : $f(x) = \alpha + (2\beta - 4)\eta\mu\frac{x}{2}$ με $\alpha \in \mathcal{R}$ και $\beta > 2$ έχει μέγιστο το 3 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=3$

ii. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 4\pi]$

12. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = 3\beta - \alpha \cdot \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) \text{ με } \beta \in \mathcal{R} \text{ και } \alpha > 0$$

Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 2 και τέμνει τον άξονα των y στο 1, να βρείτε τα α και β

13. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = 2\alpha + \frac{\beta - 1}{4}\eta\mu(\omega x) , \alpha \in \mathcal{R} \text{ και } \beta < 1, \omega > 0$$

Έχει ελάχιστη τιμή το -3, διέρχεται από το σημείο $A(\pi, 4)$ και έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{4}$.

Να βρείτε τα α, β, ω .

8. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στα Πολυώνυμα

1. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^3 - 6x^2 + ax + \beta$
Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι -24 , ενώ το $x-2$ είναι παράγοντας του $x+1$
 - i. Να βρείτε τις τιμές των α και β
 - ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$
 - iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$
2. Το πολυώνυμο : $P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + \beta$ έχει παράγοντα το $x^2 - x - 6$.
 - i. Να βρείτε τις τιμές των α και β
 - ii. Να λύσετε την εξίσωση : $P(x)=0$
 - iii. Να λύσετε την εξίσωση :
$$\eta\mu^3\chi = 5(\eta\mu\chi - 1) - 2\sigma\upsilon\nu^2\chi + 1$$
3. Δίνονται τα πολυώνυμα : $A(\chi)=\chi^4 - 5\chi^3 + 9\chi^2 - 10\chi + 10$ και $B(\chi) = \chi^2 - \chi + 1$
 - i. Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $A(\chi):B(\chi)$
 - ii. Το πολυώνυμο : $P(\chi) = 2\chi^3 - 5\chi^2 + \alpha\chi + \beta$ έχει παράγοντα το το πηλίκο της διαίρεσης $A(\chi):B(\chi)$
 - α. Να βρείτε τις τιμές των α και β
 - β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 0$
4. (4Λ/2007) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 16x - 12$
 - i. Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β το $P(\chi)$ έχει παράγοντες τους $\chi+1$ και $\chi-2$
 - ii. Για $\alpha=4$ και $\beta=-1$ να γίνει η διαίρεση $P(x):(x^2 + 5x + 6)$
 - iii. Να λυθεί η εξίσωση $P(\chi)=0$
 - iv. Να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών του χ , στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $\chi'\chi$
5. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax - 2$, $a \in \mathbb{Z}$. Αν το $P(\chi)$ έχει ρίζα άρτιο θετικό ακέραιο τότε
 - i. Να βρείτε το α
 - ii. Για $\alpha=3$ να βρείτε το λ ώστε για το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $\chi + \lambda$ να ισχύει $\upsilon>-4$
6. α. Να λυθεί η εξίσωση : $y^6 - 3y^2 + 2 = 0$
β. Να λυθεί η εξίσωση : $\eta\mu^6\chi = 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2\chi$
7. Αν το πολυώνυμο $P(x) = (3\alpha - 1)x^3 + x^2\eta\mu\pi\theta + 1$, $\theta \in (0,1)$ έχει θετικούς συντελεστές και αρνητική ακέραια ρίζα .
 - i. Να βρείτε το θ και το α
 - ii. Για $\alpha=1$ και $\theta = \frac{1}{2}$ να βρείτε το λ ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντα το $\chi + \lambda$
8. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 2x^2 \ln a^2 + 5x \ln a - 2$, $a > 0$

- i. Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $f(x)$ να βρείτε το a
 - ii. Για $a=e$
 - a. Να δείξετε ότι το $(x-1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$
 - b. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$.
9. (4^ο /2009) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^5 + \kappa x^3 - 12x - \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathcal{R}$
- i. Αν έχει παράγοντα το x και το $x^2 + 4$ να βρείτε τα κ και λ
 - ii. Να γράψεις την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης $P(x): x(x^2 + 4)$
 - iii. Να βρείτε τα σημεία τομής του $P(x)$ με τον $x'x$
10. (4^ο /2010) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$ όπου $a, \beta \in \mathcal{R}$
- iv. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $a=2$ και $\beta=4$
 - v. Να γίνει η ευκλείδεια διαίρεση $P(x):(x+1)$ και να γραφεί η ταυτότητά της.
 - vi. Να βρεθούν τα διαστήματα των τιμών του x για τα οποία η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον $x'x$
11. (1^ο /2010) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - ax^3 + bx^2 - 39x + 18$
- i. Να βρείτε τα a και b ώστε το $P(x)$ να έχει παράγοντες τους $x-2$, $x-3$
 - ii. Αν $a=9$ και $b=29$ να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$
12. (Κ/2012) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - 19x^2 + 33x - 9$, $x \in \mathcal{R}$
- i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $P(x)$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$
 - ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση του πολυωνύμου $P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$
 - iii. Να λύσετε την εξίσωση $3^{3x+1} - 19 \cdot 9^x + 33 \cdot 3^x - 9 = 0$
13. (4^ο /2011) Δίνεται το πολυώνυμο $Q(x) = ax^3 - bx^2 + 3x + 10$
- i. Να βρείτε τον βαθμό του $Q(x)$ για τις διάφορες τιμές των a και b
 - ii. Αν $Q(1)=11$ και $Q(-1)=3$ να δείξετε ότι $a=1$ και $b=3$
 - iii. Να αποδείξετε ότι αν $P(x) = x^3 + 11$ τότε $P(x) = Q(x+1)$
 - iv. Να λύσετε την εξίσωση $Q(x)=-16$
 - v. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $Q(x)$ για $x = 1 + \sqrt[3]{2000}$
14. (ΘΕΜΑ 2000 - 2^ο /2012) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$ όπου $a, \beta \in \mathcal{R}$
- i. Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x): (x+1)$ είναι 2 τότε να δείξετε ότι $a=2$ και $\beta=4$
 - ii. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$

15. (4^ο / 2012) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (x^2 - 1)x^3 - (x^3 - x)x + x - 1$
- Αν το $x = -1$ είναι ρίζα του $P(x)$ να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathcal{R}$
 - Την τιμή του $\lambda \in \mathcal{R}$ ώστε το $P(x)$ να είναι το μηδενικό
 - Την τιμή του $\lambda \in \mathcal{R}$ ώστε το $P(x)$ να είναι σταθερό και μη μηδενικό
 - Για $\lambda = 2$
 - Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x^2 - 4$
 - Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης
 - Να βρείτε τις τιμές του x , όπου η γραφική παράσταση του $P(x)$ βρίσκεται κάτω από την $y = 6x + 1$.
16. (ΘΕΜΑ 2001) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = kx^3 - (k + \lambda)x^2 + \lambda x + 1$
- Αν $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$ και $P(-1) = 23$ να αποδείξετε ότι : $k = -6$ και $\lambda = -5$
 - Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ με το πολυώνυμο $2x + 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης
 - Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 7$ για $k = -6$ και $\lambda = -5$
17. (ΘΕΜΑ 2004) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 8x^3 + (5a - 1)x^2 + 8x - 3a - 6$ όπου $a \in \mathcal{R}$
- Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του $x^2 - 1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης
 - Να βρείτε την τιμή του a , ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια
 - Για $a = 3$, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$ καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$
18. (2^ο / 2010) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + a$
- Να βρείτε την τιμή του a για την οποία η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει ρίζα το 3
 - Για $a = 6$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$
 - Να λύσετε την ανίσωση : $x^3 + 8 \leq 2x^2 + 5x + 2$
 - Να βρείτε τις τιμές του θετικού αριθμού x για τις οποίες ισχύει :
$$\log^3 x - \log x^5 = 2\log^2 x - 6$$
19. (2001 Σ) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)$, όπου
- $$f(x) = x^4 + 5^{2\lambda+1}x^3 - 2 \cdot 3^{\lambda+\frac{1}{2}}x^2 + 25^\lambda x - 1, \lambda \in \mathcal{R}$$
- Αν $x = 1$ είναι παράγοντας του $f(x)$, τότε να βρείτε το λ
 - Για $\lambda = \frac{1}{2}$ να δείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$
 - Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

20. (1999 Σ) Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

- i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $p=1$ είναι ρίζα του $P(x)$
- ii. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$: $(x-1)$
- iii. Να λύσετε την εξίσωση : $x^3 + 4 = x^2 + 4x$
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$

9. Επαναληπτικές Ασκήσεις Στις Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x + 2e^{x-k} - 1$ που η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$

- Να βρείτε το k
- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα
- Να λύσετε την εξίσωση $: 3x + 2e^x = 2$
- Να λύσετε την ανίσωση: $3x + 2e^x > 2$

2. (4^ο /2010) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{a} - 1\right)^x$

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της
- Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα
- Αν $\alpha = \frac{1}{3}$ να λυθεί η εξίσωση $: f(\eta\mu^2 x) + f(\sigma\upsilon\nu^2 x) = 2\sqrt{2}$

3. (4^ο /2012) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, \alpha \in \mathcal{R}$$

και το $A(\ln 2, 3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή
- Να δείξετε ότι $: f(x) > 2$

4. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = 6x^2 \cdot \sqrt{9^{a-1}} - 4x \cdot 3^a - 2^{2a+3}$ Τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $(-1, 0)$, τότε :

- Να βρείτε τον αριθμό α
- Αν $\alpha=1$ να λύσετε την ανίσωση $: 3f(e^x) < 6 - 14e^x$

5. Α. Να λύσετε την ανίσωση $: \ln(e^{2x} + 2) < x + \ln 3$

Β. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{2}{9x-1} = \frac{2}{3x-1} - \frac{3}{4}$$

6. Α. Να λύσετε την ανίσωση :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\eta\mu x} \geq \left(\frac{3}{2}\right)$$

Β. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3x - 3x^{-2} = 2^{2x} - 2^{2x-1}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 2}\right)$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$
- ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 3 \ln 2$
- iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) > 2$

8. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right)$$

- iv. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$
- v. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) - 3 \ln 2 = 0$
- vi. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) < 0$

9. (4^ο /2009) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο :

$$f(x) = \sqrt{2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 4$
- iii. Να λυθεί η ανίσωση :

$$f(x) \cdot \log x \cdot (x^2 - 1) > 0$$

10. (κ/2012) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

- i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)} = 2$
- iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$
- iv. Να λύσετε την ανίσωση :

$$[f(x)]^3 - \ln 2 \cdot [f(x)]^2 + f(x) - \ln 2 < 0$$

11. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \log(2^x + 3)$

- i. Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(2)$ και $f(3)$
- ii. Να δείξετε ότι : $f(\log 5) = \log(5^{\log 2} + 3)$
- iii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) + \log 2 = \log 35 - f(-x)$
- iv. Να λυθεί η ανίσωση : $f(\log x) > \log 11$ με $x > 0$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \log(2^x + 1) + \log(2^x - 1) \text{ και } g(x) = \log(2^{x+1} + 7)$$

- i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$
- iii. Να αποδείξετε ότι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < g(x)$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1 - \ln \alpha)^x$

- Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathcal{R}$
- Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνησίως αύξουσα
- Για τα $\alpha \in (1, e)$ να λύσετε την ανίσωση : $f(2^{x+1}) < f(2 \cdot 3^x - 2^x)$
- Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in (0, e)$ για τις οποίες ισχύει $2 + f(2) = 3 \cdot f(1)$

14. Έστω $P(t)$ η τιμή προϊόντος (σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ) t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 20000 ευρώ, ενώ μετά από 4 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει : $\ln P(t) = a \cdot t + \beta$, $t \geq 0$, $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$

- Να αποδείξετε ότι : $P(t) = 2 \cdot 2^{-3t}$, $t \geq 0$
- Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή είναι ίση με το $\frac{1}{64}$ της αρχικής τιμής
- Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο (σε μήνες) για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής

15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$, $x \in \mathcal{R}$

- Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathcal{R}$ η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2x$
- Να αποδείξετε ότι $f(x) - f(-x) = x$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$
- Να λύσετε την εξίσωση : $5 \cdot f(3^x) - 5 \cdot f(-3^x) - 6 = 9^x$

16. Μετά από μια σχετική έρευνα διαπιστώθηκε ότι, ο βαθμός εισαγωγής $P(t)$ σε χιλιάδες μόρια, ανάλογα με τις ώρες t καθημερινής μελέτης, κάποιων περίπου ισοδύναμων μαθητών της Γ' Λυκείου για την εισαγωγή τους σε κάποια σχολή, δίνεται κατά προσέγγιση από την συνάρτηση :

$$P(t) = 21 - 9^{\frac{2}{t}}, \text{ όπου } 2 \leq t \leq 8$$

- Αν ένας μαθητής μελετά 2 ώρες την ημέρα πόσα μόρια αναμένεται να συγκεντρώσει ;
- Να βρείτε πόσες ώρες τουλάχιστον πρέπει να μελετά καθημερινά ώστε ο βαθμός εισαγωγής του να είναι από 18 000 μόρια και πάνω
- Αν ένας μαθητής μελετά 8 ώρες την ημέρα να δείξετε ότι αναμένεται να συγκεντρώσει πάνω από 19 000 μόρια. (Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,7$)

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x + \ln x - 3$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f καθώς και την τιμή της για $x=1$
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln(x \cdot e^x)$
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση
- Να λύσετε την ανίσωση : $x + \ln(x + 1) < 2(1 - 2^x)$

18. (1^ο /2010) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(4^x - 8) - x \ln 2 - \ln 7$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης
 - Να δείξετε ότι $f(x) = \ln \frac{4^x - 8}{7 \cdot 2^x}$
 - Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) - f(2) - \ln \frac{7}{2} = 0$
19. (ΘΕΜΑ 2001) Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες ευρώ) , t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά . Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300 000 ευρώ , ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής . Αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\ln Q(t) = \alpha \cdot t + \beta$, $t \geq 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, τότε
- Να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$, $t \geq 0$
 - Να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με το $\frac{1}{16}$ της αρχικής του τιμής
 - Να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{9}$ της αρχικής του τιμής
20. (ΘΕΜΑ 2003) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)$
- Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$
 - Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = g(x)$
 - Να λύσετε την ανίσωση : $f(x) > 2g(x)$
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - \ln(1 + \sqrt{x-1})$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να εξετάσετε την f ως προς την μονotonία
22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \ln(e^x - 2)$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(\ln 3, 1)$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - Να δείξετε ότι $\alpha=1$
 - Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα .
23. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
 - Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathcal{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$ και ότι η συνάρτηση f είναι περιττή
 - Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(-1)$
 - Να λύσετε την ανίσωση : $f(e^x) > x + \ln 3$

10. Ερωτήσεις Σωστού Λάθους

1. Η εξίσωση $\eta\mu\chi = \eta\mu\alpha$ έχει λύση μόνο όταν $-1 \leq \alpha \leq 1$
2. Αν $\sin\chi = \sin\theta$, τότε $\chi = 2k\pi \pm \theta$, $k \in \mathbb{Z}$
3. Ισχύει ότι $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \chi = 2k\pi - \theta$ ή $\chi = 2k\pi + \pi + \theta$, $k \in \mathbb{Z}$
4. Ισχύει ότι: $e^\chi = \theta \Leftrightarrow \ln \theta = \chi$, $\theta > 0$
5. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει ότι :

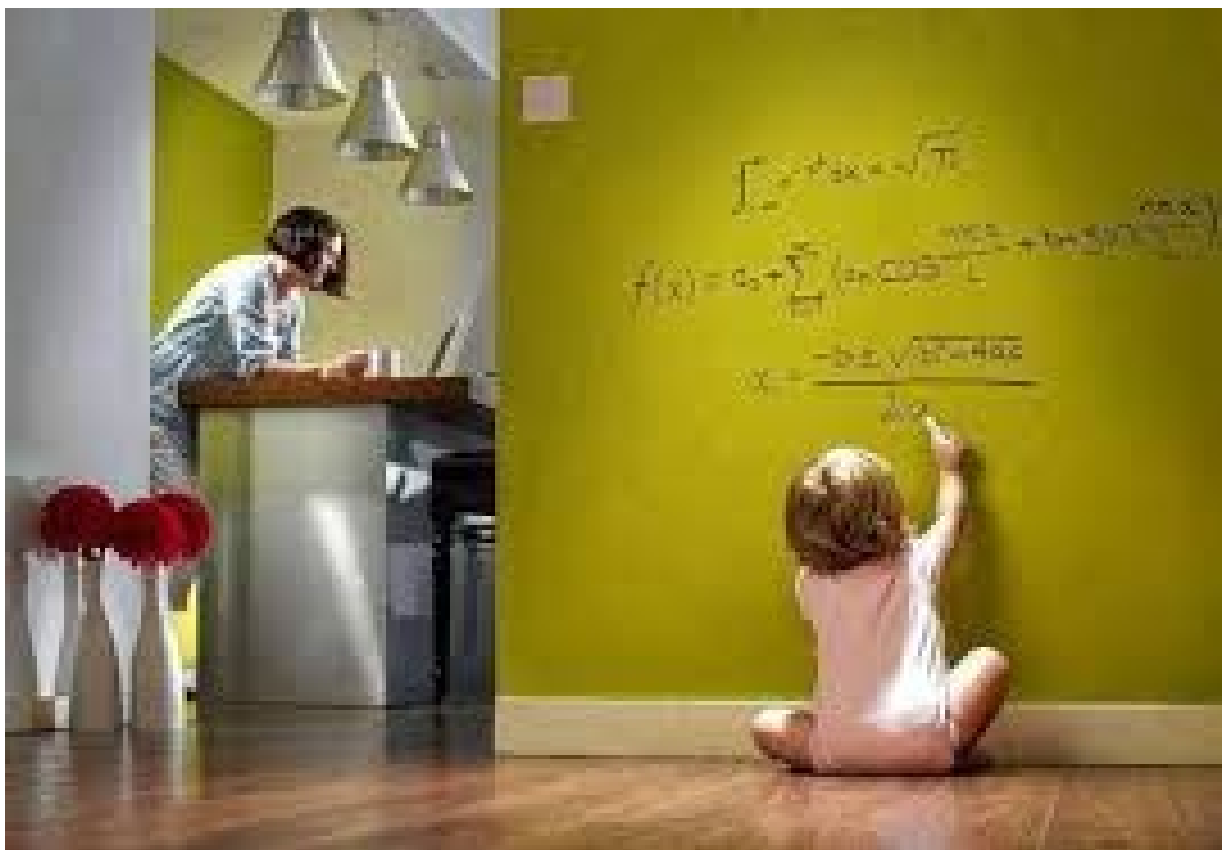
$$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$$

6. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
7. Το ημίτονο έχει περίοδο π
8. Στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ το συνημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση
9. Η $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$
10. Η εξίσωση $\chi^5 + 5\chi - 2 = 0$ έχει ακέραιες ρίζες
11. Ισχύει για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$ η σχέση $\log \chi^2 = 2 \log \chi$
12. Ισχύει πάντα $\left(\frac{2}{3}\right)^\chi < \left(\frac{2}{3}\right)^y \Leftrightarrow \chi > y$, $\chi, y \neq 0$
13. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
14. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει ότι :

$$\log_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \frac{\log_\alpha \theta_1}{\log_\alpha \theta_2}$$

15. Το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x-p)$ είναι πάντα σταθερό πολυώνυμο
16. Ο βαθμός του πηλίκου της διαίρεσης δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών τους
17. Αν ισχύει $P(p) = 0$ τότε το p λέγεται ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$
18. Ένα πολυώνυμο ονομάζεται μηδενικό πολυώνυμο όταν είναι σταθερό
19. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του ενός πολυωνύμου με το $x-p$ ισούται με την τιμή του πολυωνύμου για $\chi=p$
20. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
21. Η ανίσωση $\log \chi \geq 0$ αληθεύει για κάθε $\chi \geq 1$
22. Ο αριθμός -1 είναι ρίζα του $P(x) = x^3 - x^2 - x + \ln e$
23. Το υπόλοιπο $u(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$: $Q(x)$ είναι μικρότερου βαθμού του βαθμού του $Q(x)$

Επαναληπτικά Διαγωνίσματα



Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός

1^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στην άλγεβρα Β' Λυκείου

(1^ο λύκειο 2013)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=r$. Είναι δηλαδή $u=p(r)$

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- i. Για κάθε γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$
- ii. $\ln e^2 = 2$
- iii. Για α, β θετικούς ισχύει $\log(\alpha \cdot \beta) = \log \alpha \cdot \log \beta$
- iv. Η συνάρτηση $f: [-3,4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x^3 + x$ είναι περιττή
- v. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\eta\mu 3x + 2 > 0$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (2\alpha + \beta)x^2 - (\alpha - 3\beta)x + 6$ που έχει παράγοντες τα $x-1$, $x-2$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B1. Να βρεθούν τα α, β

B2. Για $\alpha=1$ και $\beta=-2$

- i. Να επιλυθεί η εξίσωση $P(x)=0$
- ii. Να επιλυθεί η ανίσωση $\frac{\sqrt{P(x)}}{x+2} \geq 0$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παράσταση $A(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$

Γ1. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση $A(x)$;

Γ2. Να αποδειχθεί ότι $A(x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

Γ3. Να επιλυθεί η εξίσωση $A(x)=-4$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{2x}-1}{e^x+1}$

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

Δ2. Να επιλυθεί η εξίσωση $f(x)=0$

Τατιάνα Ανδριανούλου
Μαθηματικός

Δ3. Να επιλυθεί η ανίσωση $f(x) \leq \ln 2$

2^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στην άλγεβρα Β' Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-r$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=r$. Είναι δηλαδή $u=p(r)$

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- i. Η εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu \frac{\pi}{3}$ έχει άπειρες λύσεις στο $\mathbb{R}$
- ii. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού
- iii. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, ορίζεται για $x \neq 0$
- iv. Το 2013 είναι ρίζα του $P(x) = x^2 - x + 2014$
- v. Ισχύει ότι $\ln(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ln \theta_1 \cdot \ln \theta_2$, για $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha + 1) \cdot \sin(\omega x)$ με $\alpha, \omega > 0$ για την οποία ισχύουν :

- Η περίοδος της είναι $T=\pi$
- Έχει μέγιστο το 2

B1. Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\omega=2$

B2. Για $\alpha=1$ και $\omega=2$ να λυθούν οι εξισώσεις :

- a. $f(x) = -1$
- b. $f(x) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x - 2$. το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ είναι 40 , ενώ το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=1$

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x+4} \leq 2$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}$

Δ1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον x'

Δ2. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$, $x \neq e^{\frac{1}{2}}$, $x \neq e^{-\frac{1}{2}}$

Τατιάνα Ανδριανούλου
Μαθηματικός

Δ3. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3$ με $x > 0$, $x \neq e^{\frac{1}{2}}$, $x \neq e^{-\frac{1}{2}}$

3^ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στην Άλγεβρα Β' Λυκείου

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-p$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=p$. Είναι δηλαδή $u=p(r)$

A2. Δίνεται η συνάρτηση $\log_{\alpha} x$, $\alpha > 0, \alpha \neq 1$

- i. Αν $\alpha > 1$ η f είναι γνησίως
- ii. Αν $0 < \alpha < 1$ η f είναι γνησίως

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- i. Για κάθε $x > 0$ ισχύει $e^{\ln x} = x$
- ii. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ο $P(0)$
- iii. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει ότι $\ln x^2 = 2 \ln x$
- iv. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία $y=x$
- v. Αν θ η λύση της εξίσωσης $\sin x = a$ δηλαδή $\sin \theta = a$ τότε $x = 2k\pi \pm \theta$

ΘΕΜΑ Β

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις

B1. $\varepsilon\varphi(x - \pi) = -1, x \in (-\pi, \pi)$

B2. $2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

B3. $x^3 - 7x + 6 = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

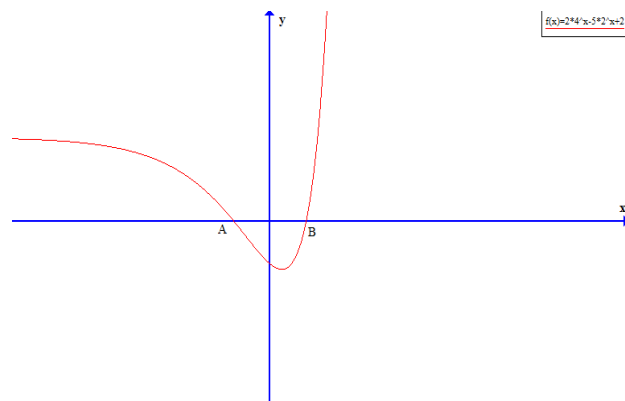
Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f καθώς και τα σημεία A και B

Γ2. Να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον x'

Γ3. Αν $g(x) = \ln f(x)$ να δείξετε ότι :

$$g(2) + g(3) - \ln 35 = 2 \ln 6$$

Γ4. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) - 2 = 5 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x$



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (3^a + 2)x^2 + 3^a \cdot x + 9^a$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του a ώστε το $x-3$ να είναι παράγοντας του $P(x)$

Δ2. Αν $a=1$ να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln g(x)$

Δ3. Αν $a=1$ και $Q(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $P(x)$: $(x-3)$ να λύσετε την εξίσωση $Q(\eta\mu\theta) = \sin^2\theta$

4^ο επαναληπτικό διαγώνισμα στην Άλγεβρα Β' Λυκείου

(1ο Λύκειο 2014)

Θέμα Α

- A. Να αποδείξετε ότι $\log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2 = \log_{\alpha} (\theta_1 \cdot \theta_2)$
- B. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα;
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος
- a) Αν $\eta\mu\omega=1$ τότε υποχρεωτικά $\sigma\upsilon\nu\omega=0$
- b) Αν $\alpha>0$ με $\alpha \neq 1, \theta > 0$ τότε $\alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$
- c) Το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^3 - 5x^2 + 7x + 3 = 0$
- d) αν $\alpha>1$ τότε $f(x) = a^x$ άρτια

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x$

- A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 - 2\eta\mu^2 x$
- B. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$
- Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$

Θέμα Γ

Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 4$, αν $x-1$ και $x-2$ είναι παράγοντες του $P(x)$

- A. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-5$ και $\beta=8$
- B. Να αναλυθεί το $P(x)$ σε γινόμενο παραγόντων
- Γ. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{P(x)} = 2(x-2)$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x - \ln x$

- A. Αν $0 < x < 1$ να δείξετε ότι $f(x) > 0$
- B. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1 - x + \ln^2 x$
- Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1 - 2^{x+1} - x$

5^ο επαναληπτικό διαγώνισμα στην Άλγεβρα Β' Λυκείου
(20 ΛΥΚΕΙΟ 2014)

Θέμα Α

A. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-p$ είναι ίσο με $P(p)$

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος

1. Αν το $P(x)$ είναι n βαθμού με $n \in \mathbb{N}^*$ τότε το $P(x)(x^2 - 1)$ είναι $n+2$ βαθμού
2. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
3. Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \log_\alpha \alpha^\theta$
4. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ έχει περίοδο $T=\pi$
5. Αν $0 < \alpha \neq 0$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε $\log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 = \log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2)$

Θέμα Β

Να λυθούν οι εξισώσεις

1. $\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$
2. $\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = \eta\mu x - 1$
3. $2\eta\mu x = -1$

Θέμα Γ

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - (a + \beta)x^2 + ax - 3$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-3$ είναι -6

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha=11$ και $\beta=-1$

B. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \cdot (e^x - 2) < 0$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) - (2x^2 - 8x + 3) \cdot \sqrt{x+2} = 0$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2) - \ln(e^x - 1)$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f
2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{e^x - 1}\right)$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -\ln 2$
4. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f με την ευθεία $y=x$ δεν τέμνονται

Τατιάνα Ανδριωοπούλου
Μαθηματικός