

Μαθηματικά Γ' Λυκείου

Τεύχος Α'

- 1^ο Κεφάλαιο: Συναρτήσεις
- 2^ο Κεφάλαιο: Διαφορικός
Λογισμός

Περιεχόμενα

0.	Βασικές γνώσεις από το Λύκειο	7
0.1	Τριγωνομετρία	7
		8
0.2	Ταυτότητες – παραγοντοποίηση	10
0.3	Πρόσημο τριωνύμου	11
0.4	Βασικές ιδιότητες απολύτων τιμών	12
0.5	Βασικοί τύποι από προόδους.....	12
1.	ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	15
1.1	Βασικές έννοιες συναρτήσεων	15
1.2	Μονοτονία , ακρότατα , 1-1	30
1.3	Όριο της f όταν $x \rightarrow x_0$	41
1.4	Μη πεπερασμένο όριο στο x_0	54
1.5	Όριο συνάρτησης στο $\pm\infty$	60
1.6	Όριο εκθετικής συνάρτησης $fx = ax$	65
1.7	Συνεχείς Συναρτήσεις :	72
1.8	Βασικά θεωρήματα στη συνέχεια :	77
1.9	Γενικές Ασκήσεις Στις Συναρτήσεις	101
2.	ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	115
2.1	Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο x_0	115
2.2	Παράγωγος συνάρτηση	124
2.3	Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης :	132
2.4	Το πρόβλημα της εφαπτόμενης	137
2.5	Ρυθμός μεταβολής	148
2.6	Θεώρημα Rolle και θεώρημα μέσης τιμής (θ.μ.τ)	156
2.7	Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής	169
2.8	Ακρότατα και Θεώρημα Fermat	181

2.9	Κυρτότητα – Σημεία Καμπής	190
	Ασκήσεις στην κυρτότητα και τα σημεία καμπής	193
2.10	Ασύμπτωτες	196
2.11	Κανόνες De L' Hospital	202
2.12	Μελέτη συνάρτησης.....	206
2.13	Γενικές Ασκήσεις στις παραγώγους.....	211

Συναρτήσεις - Όρια - Συνέχεια Συνάρτησης

After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example.

This was the result:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty$$

0. Βασικές γνώσεις από το Λύκειο

0.1 Τριγωνομετρία

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ

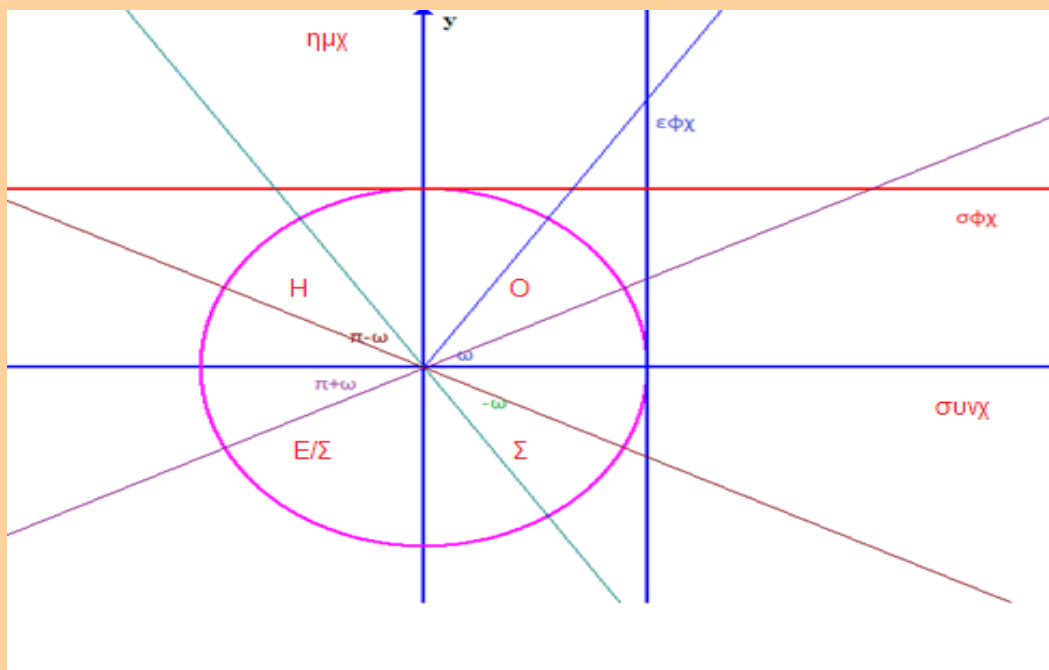
Μοίρες	Rad	ημω	συνω		εφω	σφω
0	0	0	1		0	Δ.Ο
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0		Δ.Ο	0
180°	π	0	-1		0	Δ.Ο
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0		Δ.Ο	0
360°	2π	0	1		0	Δ.Ο

ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ

1. $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$	2. $\varepsilon\varphi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}$	3. $\sigma\varphi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi}$
4. $\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\chi}$	5. $\eta\mu^2\chi = \frac{\varepsilon\varphi^2\chi}{1 + \varepsilon\varphi^2\chi}$	6. $\varepsilon\varphi\chi \cdot \sigma\varphi\chi = 1$

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΠΡΩΤΟ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

ΑΝΤΙΘΕΤΕΣ ΓΩΝΙΕΣ	ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 180°	ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ 180°	ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 90°	ΓΩΝΙΕΣ ΜΕ ΔΙΑΦΟΡΑ 90°
$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$	$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$	$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\eta\mu(90^\circ + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$
$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$	$\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$	$\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$	$\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega$	$\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega$	$\varepsilon\varphi(90^\circ + \omega) = -\sigma\varphi\omega$
$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$	$\sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(90^\circ + \omega) = -\varepsilon\varphi\omega$



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. $\eta\mu x = \eta\mu \theta$

$$x = 2k\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi + \pi - \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

2. $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu \theta$

$$x = 2k\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2k\pi - \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

3. $\epsilon\phi x = \epsilon\phi \theta$

$$x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. $\sigma\phi x = \sigma\phi \theta$

$$x = k\pi + \theta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

- Όταν έχω να λύσω την εξίσωση $\eta\mu x = -\eta\mu \theta$ τότε λύνω την ισοδύναμή της $\eta\mu x = \eta\mu(-\theta)$
- Όταν έχω να λύσω την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu \theta$ τότε λύνω την ισοδύναμή της $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta)$
- Για $\epsilon\phi$ και $\sigma\phi$ ισχύουν τα ίδια με το ημίτονο.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

1. $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$
2. $\eta\mu(\alpha - \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$
3. $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$
4. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$
5. $\epsilon\phi(\alpha + \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha + \epsilon\phi\beta}{1 - \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$
6. $\epsilon\phi(\alpha - \beta) = \frac{\epsilon\phi\alpha - \epsilon\phi\beta}{1 + \epsilon\phi\alpha \cdot \epsilon\phi\beta}$
7. $\sigma\phi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta - 1}{\sigma\phi\beta + \sigma\phi\alpha}$
8. $\sigma\phi(\alpha - \beta) = \frac{\sigma\phi\alpha \cdot \sigma\phi\beta + 1}{\sigma\phi\beta - \sigma\phi\alpha}$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$	$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu 2\alpha &= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \\ &= 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 \\ &= 1 - 2\eta\mu^2\alpha\end{aligned}$	$\epsilon\phi 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1-\epsilon\phi^2\alpha}$	$\sigma\phi 2\alpha = \frac{\sigma\phi^2\alpha - 1}{2\sigma\phi\alpha}$
--	--	---	---

ΤΥΠΟΙ ΑΠΟΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΥ

$\eta\mu^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$	$\epsilon\phi^2\alpha = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$	$4 \cdot \epsilon\phi^2\alpha = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
---	---	--	--

0.2 Ταυτότητες - παραγοντοποίηση**ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ:**

- $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
- $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$
- $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
- $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

Μέθοδοι παραγοντοποίησης :

- 1) **Κοινός παράγοντας:** Αν σε κάθε όρο του αθροίσματος υπάρχει κάποιος κοινός παράγοντας, τότε βγαίνει έξω από μια παρένθεση

$$i) 2x - 2y = 2(x - y)$$

$$ii) x^2 - x = x(x - 1) \quad iii) 4x^2 - 8x = 4x(x - 2)$$

- 2) **Ομαδοποίηση :** (κοινός παράγοντας ανά ομάδες)

$$i) ax - ay + 2x - 2y = a(x - y) + 2(x - y) = (x - y)(a + 2)$$

$$ii) x^2 - x + 2x - 2 = x(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(x + 2)$$

- 3) **Ανάπτυγμα κάποιας γνωστής ταυτότητας :**

$$i) x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$$

$$ii) x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

- 4) **Τριώνυμο : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$**

Βρίσκω τη διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

- Αν $\Delta > 0$ τότε το τριώνυμο έχει 2 ρίζες άνισες : $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$
- Αν $\Delta = 0$ τότε το τριώνυμο έχει μια διπλή ρίζα την $x_0 = \frac{-\beta}{2\alpha}$ και παραγοντοποιείται :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_0)^2$$
- Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

0.3 Πρόσημο τριωνύμου

- Αν $\Delta > 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ετερόσημο του α	Ομόσημο του α

- Αν $\Delta = 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\alpha x^2 + \beta x + \gamma$	Ομόσημο του α	Ομόσημο του α	Ομόσημο του α

- Αν $\Delta < 0$ το πρόσημο δίνεται από τον πίνακα

χ	$-\infty$	$+\infty$
$\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$	Ομόσημο του α	

0.4 Βασικές ιδιότητες απολύτων τιμών

- 1) $|x| = a \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x = a \text{ ή } x = -a$
- 2) $|x| \leq a \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} -a \leq x \leq a$
- 3) $|x| \geq a \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} x \geq a \text{ ή } x \leq -a$

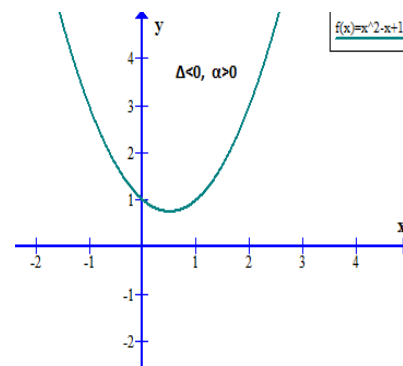
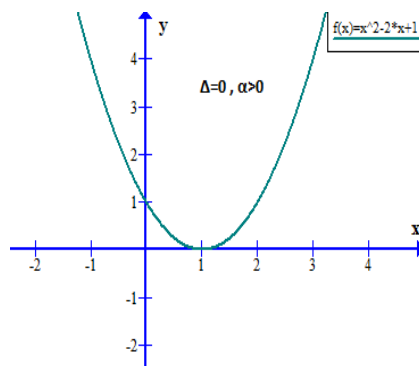
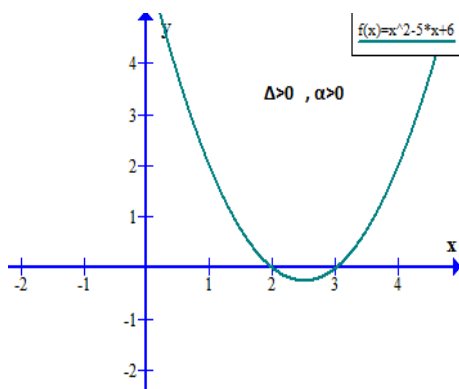
0.5 Βασικοί τύποι από προόδους

	Αριθμητική πρόοδος	Γεωμετρική πρόοδος
	$(\alpha_n): \text{Α.Π} \Leftrightarrow \alpha_{n+1} - \alpha_n = \omega$ $(\alpha_n): \text{σταθερή} \Leftrightarrow \omega = 0$	$(\alpha_n): \text{Γ.Π} \Leftrightarrow \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \lambda$ $\alpha_n \neq 0, \lambda \neq 0$ $(\alpha_n): \text{σταθερή} \Leftrightarrow \lambda = 1$
Νιοστός όρος	$\alpha_n = \alpha_1 + (n - 1)\omega$	$\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}$
Άθροισμα n πρώτων όρων	$S_n = \frac{n}{2}(\alpha_1 + \alpha_n)$ $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha_1 + (n - 1)\omega]$	$S_n = a_1 \cdot \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}$
Διαδοχικοί όροι	$\alpha, \beta, \gamma \Leftrightarrow \beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$	$\alpha, \beta, \gamma \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha \cdot \gamma$

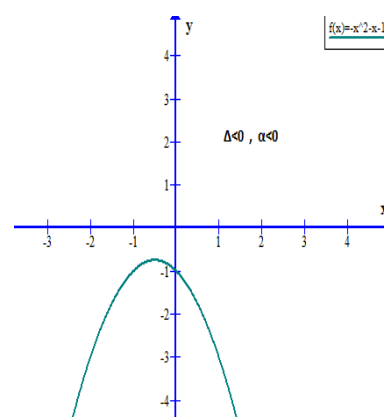
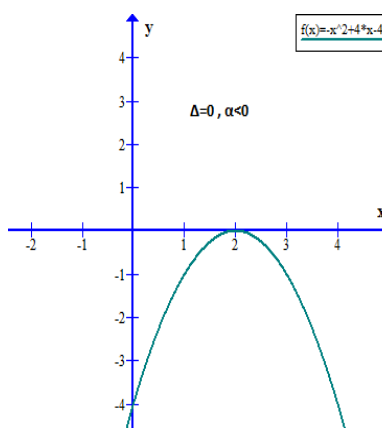
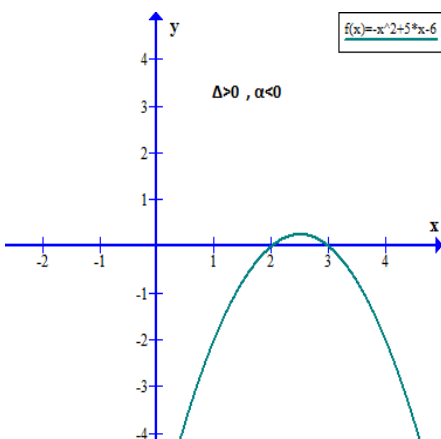
0.6 Μελέτη του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$

Η $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ $a > 0$ παριστάνει μια παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$

$a > 0$



Η $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ $a < 0$ παριστάνει μια παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και κορυφή το σημείο $K(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha})$



0.7 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ:

αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$, $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$

$$(1) \log_{\alpha} \alpha^x = x$$

$$(2) \log_{\alpha} 1 = 0$$

$$(3) \alpha^{\log_{\alpha} \theta} = \theta$$

$$(4) \log_{\alpha} \alpha = 1$$

$$(5) \log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$$

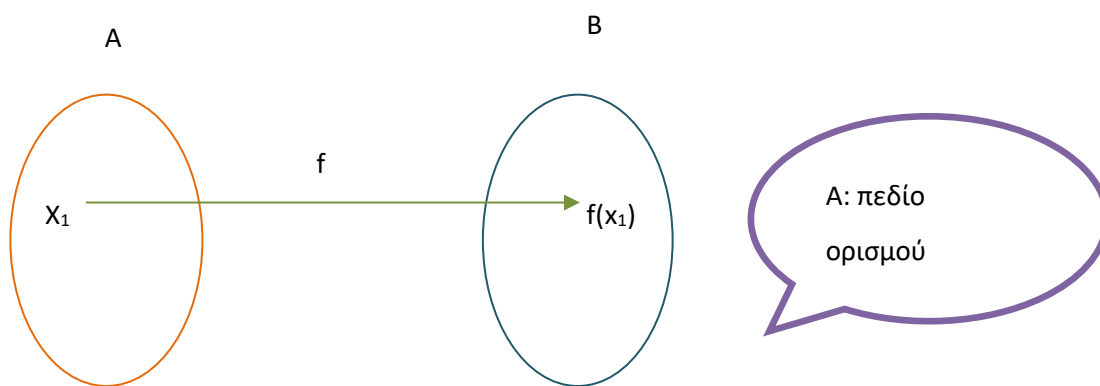
$$(6) \log_{\alpha} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_{\alpha} \theta_1 - \log_{\alpha} \theta_2$$

$$(7) \log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$$

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.1 Βασικές έννοιες συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B



$$f: A \rightarrow B$$

$$A \ni x \rightarrow y = f(x) \in B$$

Για οποιαδήποτε συνάρτηση f ισχύει η συνεπαγωγή: Αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

Εύρεση πεδίου ορισμού

Για να βρώ το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης εξετάζω αν έχω κάποια από τις παρακάτω περιπτώσεις ώστε να πάρω τον αντίστοιχο περιορισμό

(1) $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, πρέπει $B(x) \neq 0$

(2) $f(x) = \sqrt{A(x)}$, πρέπει $A(x) \geq 0$

(3) $f(x) = \ln A(x)$, πρέπει $A(x) > 0$

(4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{A(x)}}$, πρέπει $A(x) > 0$

$$(5) f(x) = \frac{1}{\sqrt{A(x) + B(x)}}, \text{ πρέπει } A(x) \geq 0 \text{ και } \sqrt{A(x)} + B(x) \neq 0$$

Σε κάθε άλλη περίπτωση το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathbb{R}$

1° Παράδειγμα :

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

Λύση:

$$\text{Πρέπει : } x^2 - 5x + 6 > 0$$

$$\Delta = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		+	-	+

$$\text{Άρα } A_f = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

2° Παράδειγμα:

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Λύση :

$$\text{Πρέπει } x \neq 0 \text{ και } 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$



$$\text{Άρα } A_f = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

3° παράδειγμα :

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(1 - e^x)$

Λύση:

$$\text{Πρέπει : } 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

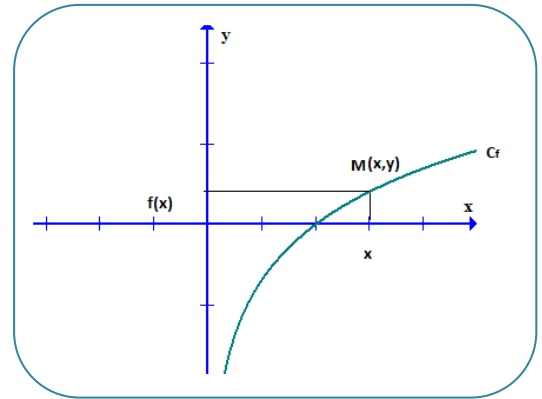
$$\text{Άρα } A_f = (-\infty, 0)$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

ΟΡΙΣΜΟΣ: Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει : $y=g(x)$

Παρατήρηση:

1. Το σημείο $A(\alpha, \beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν $f(\alpha)=\beta$
2. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον x' όταν $f(x)>0$
3. Η C_f βρίσκεται κάτω από τον x' όταν $f(x)<0$
4. Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από εκείνα τα σημεία της C_f που βρίσκονται πάνω από τον x' καθώς και από τα συμμετρικά ως προς τον x' εκείνων των σημείων που βρίσκονται κάτω από τον x'
5. Η γραφική παράσταση της $-f$ είναι η συμμετρική της f ως προς τον x'



Παράδειγμα :

1. Α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης με πεδίο ορισμού το $\mathcal{R}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων
- Β. Δίνεται η περιττή συνάρτηση : $f(x) = x^3 - 4x + a$ με $a \in \mathcal{R}$. Να βρείτε :
 - i. Τον αριθμό a
 - ii. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'
 - iii. Τα σημεία τομής της C_f με τη γραφική παράσταση της $g(x) = -4x^2 - 3x + 4$

Λύση :

Α. Αν η f είναι περιττή τότε $f(-x) = -f(x)$

$$\text{Για } x=0 \quad f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Β. i. $f(0) = 0 \Rightarrow a = 0$

ii. Η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' όταν

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 2) > 0$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x	$-$		$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$		$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$

$$x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$$

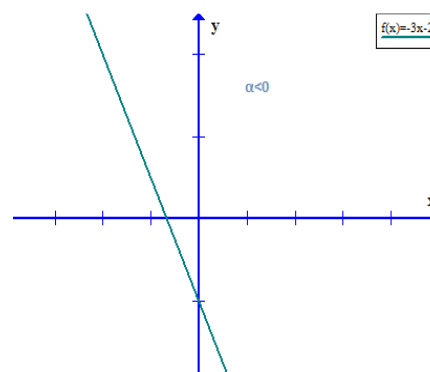
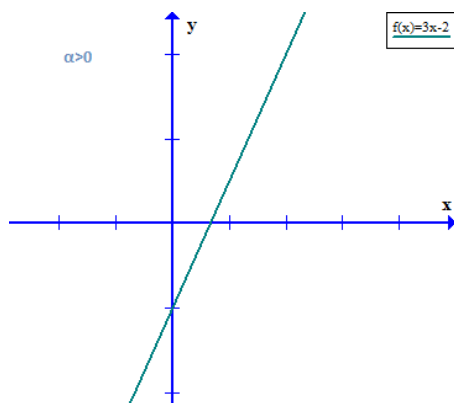
iii) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g όταν $f(x) = g(x)$

$$x^3 - 4x = -4x^2 - 3x + 4 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x^2 - 1) = 0$$

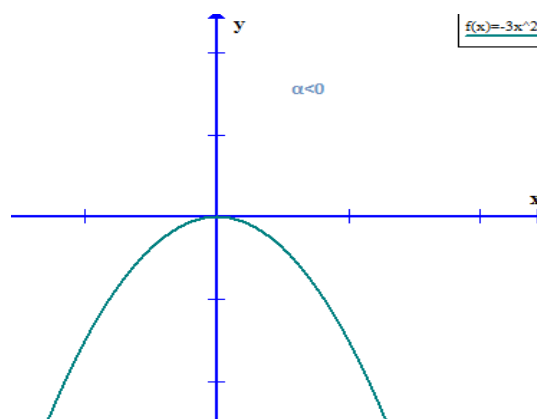
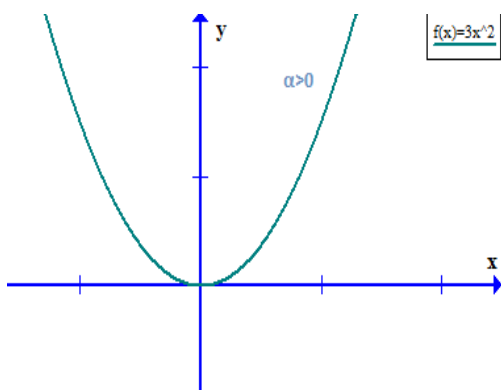
$$\text{Άρα } x = -4 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

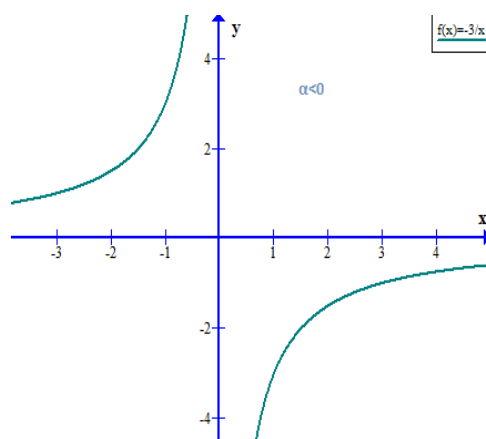
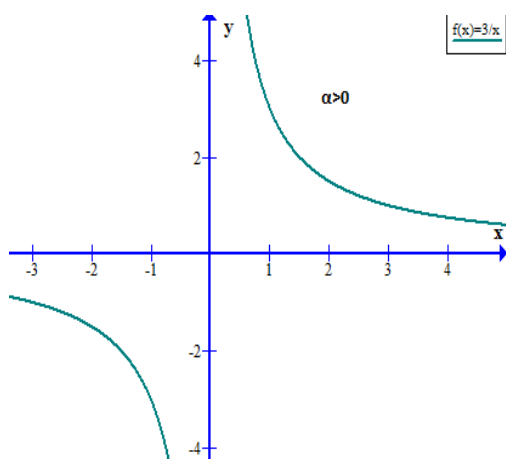
1. $f(x) = \alpha x + \beta$



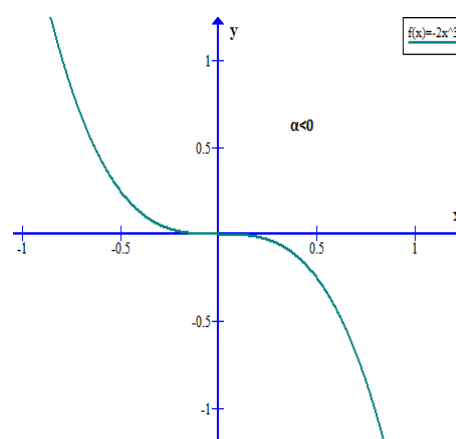
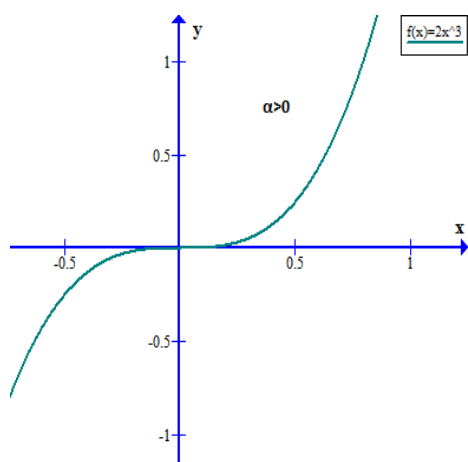
2. $f(x) = \alpha x^2$ (παραβολή)



3. $f(x) = \frac{a}{x} \quad x \neq 0$ (υπερβολή)

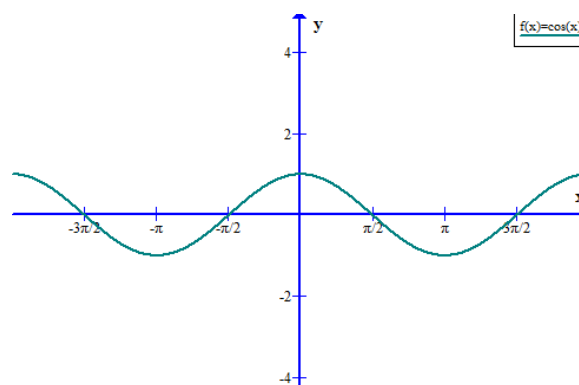
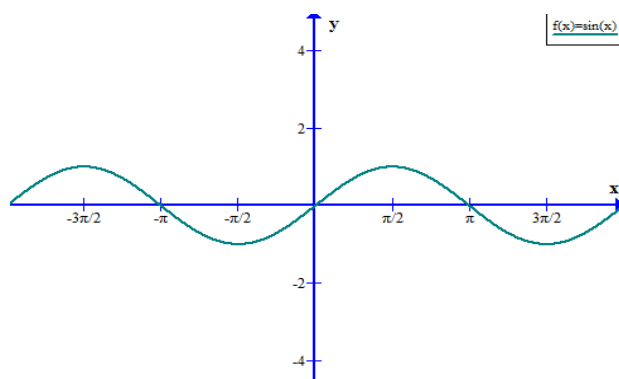


4. $f(x) = \alpha x^3$



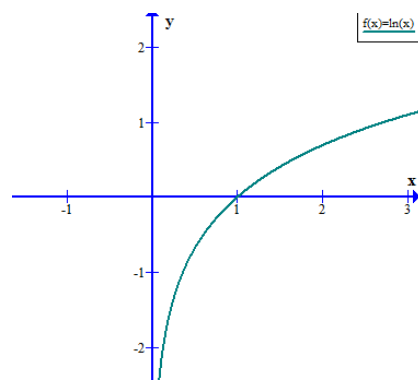
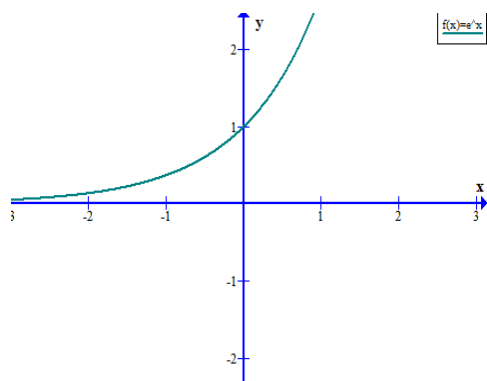
5. $f(x) = \eta \mu x$

$g(x) = \sigma \upsilon \nu x$



6. $f(x) = e^x$

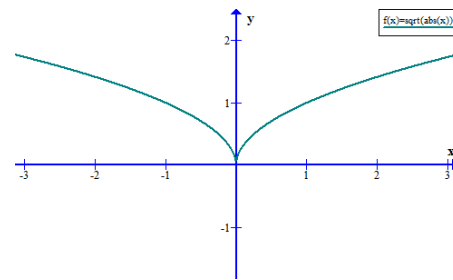
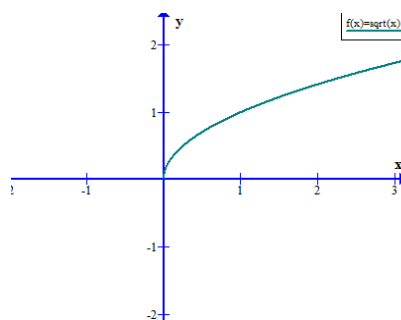
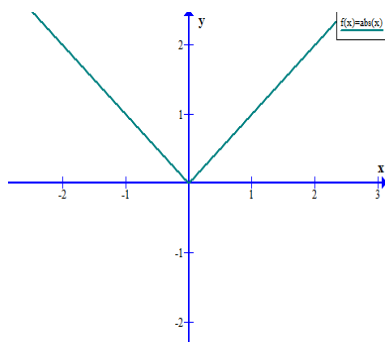
$g(x) = \ln x$



7) $f(x) = |x|$

$g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = \sqrt{|x|}$



ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ :

Έστω δυο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού τα A και B αντίστοιχα

- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $A_{f \pm g} = A \cap B$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, $A_{f \cdot g} = A \cap B$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $A_{\frac{f}{g}} = A \cap B - \{x \in A \cap B | g(x) = 0\}$
- Σύνθεση συναρτήσεων $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$, $\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_f \end{cases}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = 3x^2 + 5x$, $g(x) = \ln x$ να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

i) $f(x)$ ii) $g(x)$ iii) $f(x) + g(x)$ iv) $f(x) \cdot g(x)$ v) $\frac{f(x)}{g(x)}$ vi) $(f \circ g)(x)$

Λύση:

i) Πεδίο ορισμού της f : $A_f = \mathbb{R}$

ii) Πεδίο ορισμού της g : $A_g = (0, +\infty)$

iii) Πεδίο ορισμού της $f+g$: $A_{f+g} = A \cap B = (0, +\infty)$

iv) Πεδίο ορισμού της $f \cdot g$: $A_{f \cdot g} = A \cap B = (0, +\infty)$

v) Πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$: πρέπει $\ln x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$, $A_{f/g} = (0,1) \cup (1, +\infty)$

vi) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(\ln x)^2 + 5\ln x$

$$\begin{cases} x \in (0, +\infty) \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x > 0$$

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Δύο συναρτήσεις είναι ίσες όταν :

- Έχουν τον ίδιο τύπο
- Και το ίδιο πεδίο ορισμού

Παράδειγμα:

Οι συναρτήσεις $f(x) = x + 3$ και $g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ είναι ίσες;

Λύση:

$f(x) = x + 3$, $A_f = \mathbb{R}$

$g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ πρέπει $x + 2 \neq 0$ άρα $x \neq -2$ οπότε $A_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

Οπότε οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες αφού δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού

Ασκήσεις στις Συναρτήσεις**Πεδίο ορισμού συνάρτησης**

1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x+6} \quad ii) f(x) = \frac{7-x}{|2x-1|-5} \quad iii) f(x) = \sqrt{x^2-7x+10}$$

$$iv) f(x) = \ln(-x^2+x+2) \quad v) f(x) = \frac{2^x-3}{\sqrt{3-|x+1|}} \quad vi) f(x) = \frac{e^x}{\ln(x-2)}$$

$$vii) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1} \quad viii) f(x) = \frac{\sqrt{|x|-3}}{x^2+4} \quad ix) f(x) = \frac{\ln(x+5)}{\sqrt{2-x}}$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \frac{x+4}{2x^2-x-1} \quad ii) f(x) = \frac{2}{x^3+1} + \frac{x}{x^2-6x+5} \quad iii) f(x) = \frac{x}{|x|-2} \quad iv) f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-1}-2}$$

$$v) f(x) = \frac{x}{2\sin x - 1} \quad vi) f(x) = \frac{3}{2\eta\mu x + 5} \quad vii) f(x) = \frac{1}{e^{2x} - e^x - 2} \quad viii) f(x) = \frac{2}{\ln(x-1)-1}$$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \sqrt{2-x-x^2} \quad ii) f(x) = \ln(e^x-1) \quad iii) f(x) = \sqrt{|x-1|-1} \quad iv) f(x) = \sqrt{2\ln^2 x + \ln x}$$

$$v) f(x) = \sqrt{2x^2-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad vi) f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x-2}}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(3-2e^x)$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x'
- Να βρείτε τη σχετική θέση της C_f με τον άξονα x'

Ισότητα συναρτήσεων και πράξεις

5. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες

i) $f(x) = \frac{e^{2x} - xe^x}{xe^x}$ και $g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$

ii) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - |x|}$ και $g(x) = 1 + \frac{1}{|x|}$

iii) $f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$ και $g(x) = \sqrt{x} - 2$

iv) $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

6. Αν $f(x) = \frac{x}{x+2}$ και $g(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$, να βρείτε τις συναρτήσεις :

i) $f + g$ ii) $f \cdot g$ iii) $\frac{1}{f}$ iv) $\frac{f}{g}$

7. Αν $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ και $g(x) = \sqrt{1 - e^x}$ να βρείτε τις συναρτήσεις

i) $f - g$ ii) $f \cdot g$ iii) $\frac{1}{f}$ iv) $g^2 - \frac{2}{f}$

8. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln(x-1)$ να βρείτε τις συναρτήσεις :

i) $g \circ f$ ii) $f \circ g$ iii) $f \circ f$ iv) $g \circ g$

9. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i) $f(x) = x^2$ και $g(x) = \ln x$

ii) $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

iii) $f(x) = -\frac{3\pi}{4}$ και $g(x) = \varepsilon\varphi x$

10. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x-5}{x+3}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
 β) Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(f(3))$

11. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^2 + 10x + 2a}{x^3 + a} \quad \text{για την οποία ισχύει } f(10) = 6 \text{ να βρείτε :}$$

- α) Τον αριθμό a
 β) Το πεδίο ορισμού της f
 γ) Τις τιμές $f(25)$, και $f\left(f\left(-\frac{5}{3}\right)\right)$

12. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x + a & , \text{άν } -6 \leq x < 1 \\ x^2 + \beta & , \text{άν } -1 \leq x < 7 \end{cases}$$

Για την οποία ισχύει $f(-2)=5$ και $f(5)=24$

- a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 b) Να βρείτε τους αριθμούς a και β
 c) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$ και $f(f(-3))$
 d) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$

13. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} |x| + a & , \text{άν } -8 \leq x \leq -2 \\ x^2 + a + 4 & , \text{άν } -2 < x \leq 3 \\ \sqrt{x+4} & , \text{άν } 3 < x \leq 15 \end{cases}$$

Για την οποία ισχύει $f(-4)+f(1)+f(12)=7$. Να βρείτε :

- a) Το πεδίο ορισμού της f
 b) Τον αριθμό a
 c) Τις τιμές $f(-2)$, $f(3)$ και $f(f(f(-5)))$.

14. Να βρείτε τα σημεία τομής με τους άξονες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^2 + 2x - 8$ ii) $f(x) = |2x - 1| - 5$ iii) $f(x) = e^x + 1$ iv) $f(x) = \ln(x - 1)$

15. Να βρείτε τη σχετική θέση με τον άξονα $x'x$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

i) $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ ii) $f(x) = \ln|x + 3|$ iii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4$ iv) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{1 - |x|}$

16. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ και $g(x) = x^2 + x + 1$

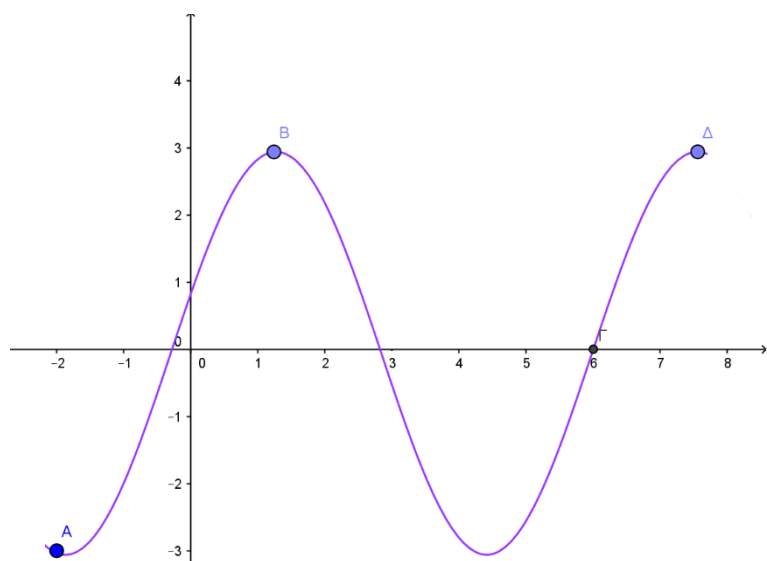
ii) $f(x) = x \ln x - 2x$ και $g(x) = x$

iii) $f(x) = 4^x + 2$ και $g(x) = 6(2^x - 1)$

iv) $f(x) = e^x \cdot \ln x + 6$ και $g(x) = 2e^x + 3 \ln x$

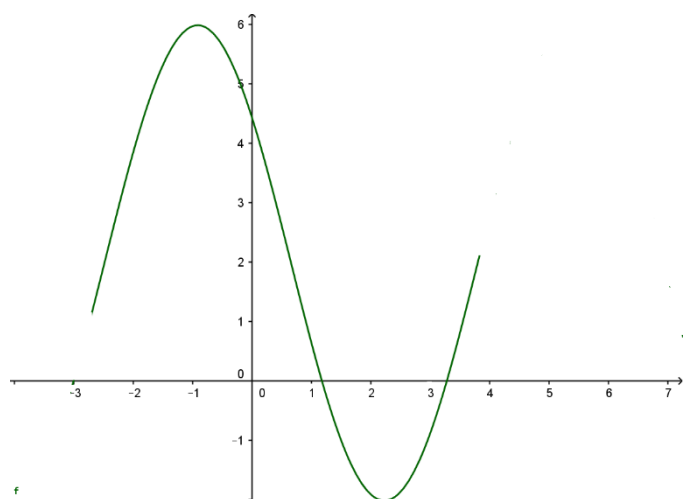
17. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A

- i) Να βρείτε το σύνολο A
- ii) Να βρείτε το σύνολο $f(A)$
- iii) Να λύσετε τις εξισώσεις
a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 3$
- iv) Να λύσετε τις ανισώσεις
a) $f(x) > 0$ b) $f(x) \leq 3$



18. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το A

- i) Να βρείτε το σύνολο A
- ii) Να βρείτε το σύνολο $f(A)$
- iii) Να λύσετε την εξίσωση $(f(x))^2 = 6f(x)$
- iv) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$



19. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις :

$$\alpha) f(x) = e^{|x|} \quad \beta) f(x) = \ln \frac{1}{x} \quad \gamma) f(x) = |x - 2| \quad \delta) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \quad \varepsilon) f(x) = (\sqrt[4]{x})^4$$

20. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x^2 - 4x + |x - 2|$, $g(x) = |x - 2| - x + 4$ και $h(x) = 7 - x$ Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία :

- i. Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g
- ii. Η γραφική παράσταση της h βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + \alpha - 4$ με $\alpha \in \mathcal{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3, 5)$, να βρείτε :

- i. Τον αριθμό α
- ii. Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες
- iii. Τα σημεία τομής της C_f με τη γραφική παράσταση της $g(x) = -4x + 1$
- iv. Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της :

$$h(x) = \frac{2x^2 - |x - 3|}{2}$$

22. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 - 2x + a)$, με $a \in \mathcal{R}$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να βρείτε :

- i. Τον αριθμό a
- ii. Το πεδίο ορισμού της f
- iii. Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$
- iv. Τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = 2\ln 3$

23. Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathcal{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$

$$i) f(x) = \frac{e^{2x} - xe^x}{xe^x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$$

$$ii) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - |x|} \quad \text{και} \quad g(x) = 1 + \frac{1}{|x|}$$

$$iii) f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x} - 2$$

$$iv) f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1$$

$$v) f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} \text{ και } g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$$

$$vi) f(x) = \ln \frac{x^2}{1-x} \text{ και } g(x) = 2\ln x - \ln(1-x)$$

$$24. \text{ Αν } f(x) = \frac{x}{x+2} \text{ και } g(x) = 1 - \frac{4}{x^2}, \text{ να βρείτε τις συναρτήσεις :}$$

$$i) f + g \quad ii) f \cdot g \quad iii) \frac{1}{f} \quad iv) \frac{f}{g}$$

$$25. \text{ Αν } f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \text{ και } g(x) = \sqrt{1 - e^x}. \text{ Να βρείτε τις συναρτήσεις :}$$

$$i) f - g \quad ii) f \cdot g \quad iii) g^2 - \frac{1}{f}$$

$$26. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{6}{x-3} \text{ και } g(x) = x + 1 + \frac{3}{x-3}$$

$$\text{Να ορίσετε τις συναρτήσεις } f - g \text{ και } \frac{f}{g}$$

$$27. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις:}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3} \text{ και } g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^3 + x^2}$$

$$i. \text{ Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων } f \text{ και } g \text{ και να απλοποιήσετε τους τύπους τους}$$

$$ii. \text{ Να ορίσετε τις συναρτήσεις } f + g, f - g, f \cdot g \text{ και } \frac{f}{g}$$

$$28. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις } f(x) = \ln x - 3 \text{ και } g(x) = e^x - 2$$

$$i. \text{ Να ορίσετε την συνάρτηση } f$$

$$ii. \text{ Να λύσετε την συνάρτηση } \left(\frac{f}{g}\right)(x) \geq 0$$

$$29. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις } f(x) = \sqrt{x} \text{ και } g(x) = -x^2 - 1. \text{ Να βρείτε τις συναρτήσεις}$$

$$i) f \circ g \quad ii) g \circ f$$

$$30. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις } f(x) = \frac{x}{x+1} \text{ και } g(x) = \frac{1}{x+3}. \text{ Να βρείτε τις συναρτήσεις}$$

$$i) f \circ g \quad ii) g \circ f$$

$$31. \text{ Δίνονται οι συναρτήσεις } f(x) = \sqrt{x+3} \text{ και } g(x) = x^2 + 1. \text{ Να βρείτε τις συναρτήσεις}$$

$$i) f \circ g \quad ii) g \circ f$$

32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

$$i) f \circ g \quad \quad ii) g \circ f$$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να απλοποιήσετε τον τύπο της
- ii. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ f$

34. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x + \alpha$

$$g(x) = 3x + 2\alpha, \text{ όπου } \alpha \in \mathcal{R},$$

Τέμνονται πάνω στην ευθεία $x=1$

- i. Να βρείτε τον αριθμό α
- ii. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με $g(x) = 3x - 2$ και $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 6x + 10$.

Να βρείτε :

- i. Τη συνάρτηση f
- ii. Τα x για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με $g(x) = 2x - 3$ και $(g \circ f)(x) = 2e^x(e^x + 1) - 15$.

Να βρείτε :

- i. Τη συνάρτηση f
- ii. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες .

37. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{\alpha-x}{x+3}$, με $\alpha \in \mathcal{R}$. Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $A(-5, -4)$

- i. Να βρείτε τον αριθμό α
- ii. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$
- iii. Να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι περιττή

38. Αν οι συναρτήσεις $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ είναι περιττές, να αποδείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $f+g$ είναι περιττή
- ii. Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι άρτια

39. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^{x+1}}{e^{x+1}-1}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$
- ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $(g \circ f)(x) = \frac{x+2}{x+1}$, τότε να βρείτε τη συνάρτηση f
- iii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+a}{x+1}$, με $a \in \mathcal{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-2,3)$.

- i. Να βρείτε τον αριθμό a
- ii. Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ f$
- iii. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $(f \circ f)(x)$ και $g(x) = \frac{-x-1}{x^2+x}$ είναι ίσες.

1.2 Μονοτονία, ακρότατα, 1-1

Μονοτονία

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Μια συνάρτηση f λέγεται:

- γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$
- γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Μια συνάρτηση f λέγεται:

- αύξουσα σε ένα διάστημα Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$
- φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$

Παράδειγμα

Άσκηση 1(σχολικό βιβλίο)

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως

Φθίνουσες i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ ii) $f(x) = 2 \ln(x-2) - 1$ iii) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$

$$iv) f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1$$

Λύση:

- i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ αρχικά βρίσκω το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
Πρέπει $1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ άρα $A_f = (-\infty, 1]$
Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2$
 $\Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- ii) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_f = (2, +\infty)$
Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$
 $\Rightarrow \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα
- iii) Το πεδίο ορισμού της f είναι $A_f = \mathbb{R}$
Έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1-x_1 > 1-x_2$
 $\Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Rightarrow e^{1-x_1} + 1 > e^{1-x_2} + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

- iv) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης δίνεται και είναι το $A_f = (-\infty, 1]$
 Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2$
 $\Rightarrow (1 - x_1)^2 > (1 - x_2)^2 \Rightarrow (1 - x_1)^2 - 1 > (1 - x_2)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

Άσκηση 4 (σχολικού βιβλίου)

Να δείξετε ότι :

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
- Αν δύο συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ , Τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
- Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

Λύση:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ άρα αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$ οπότε $-f(x_1) > -f(x_2)$
 Άρα η $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ άρα αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$ (1)
 Η g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ άρα αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $g(x_1) < g(x_2)$ (2)
 Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$
 Άρα η $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ άρα αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$ (1)
 Η g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ άρα αν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τότε $g(x_1) < g(x_2)$ (2)
 Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $f(x_1)g(x_1) < f(x_2)g(x_2)$
 Άρα η fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

Ακρότατα

ΟΡΙΣΜΟΣ 3: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A θα λέμε

ότι :

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in A$
- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο το $f(x_0)$ όταν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$

$$f(x) \leq \text{ολικό μέγιστό της}$$

$$f(x) \geq \text{ολικό ελάχιστό της}$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, να μελετηθεί η f ως προς τα ακρότατα

Λύση:

$$\text{Έχω } A_f = \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x - 2)^2 + 1$$

$$\text{Οπότε έχω } (x - 2)^2 \geq 0 \text{ άρα } (x - 2)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$$

Επομένως η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο το $f(x_0) = 1$

Λύνω την εξίσωση $f(x_0) = 1$ και προκύπτει ότι η θέση ολικού ελαχίστου είναι η $x_0 = 2$

ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 4: Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :

$$\text{Αν } x_1 \neq x_2 \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :

$$\text{Αν } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } x_1 = x_2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1. Αν η f είναι συνάρτηση και $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$
2. Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι 1-1 (αμφιμονοσήμαντη)
Το αντίστροφο δεν ισχύει
3. Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε αντιστρέφεται

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ:

1^{ov} Εξετάζω αν η συνάρτηση f είναι 1-1

2^{ov} Αν είναι 1-1 θέτω $y=f(x)$ και λύνω ως προς x

3^{ov} $f^{-1}(y) = x$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-4}$

- i. Να εξετάσεις αν η f είναι 1-1
- ii. Να βρείτε την αντίστροφη f^{-1}

ΛΥΣΗ:

- i. Πεδίο ορισμού: πρέπει : $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ άρα $A_f = [4, +\infty)$
έστω $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1-4} = \sqrt{x_2-4} \Rightarrow \sqrt{x_1-4}^2 = \sqrt{x_2-4}^2 \Rightarrow$
 $x_1-4 = x_2-4 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1
- ii. Αφού η f είναι 1-1 αντιστρέφεται

Θέτω $y = f(x) \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{x-4} \Rightarrow y^2 = x-4 \Rightarrow x = y^2+4 \Rightarrow f^{-1}(y) = y^2+4$ ή $f^{-1}(x) = x^2+4$ άρα $A_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

1. Οι αντίστροφες συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$
2. Οι f, f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας
3. Αν οι f, f^{-1} είναι γνησίως αύξουσες τότε τα κοινά τους σημεία βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$
4. Για να βρούμε τα κοινά τους σημεία αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$
5. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα για να βρούμε τα κοινά σημεία των f, f^{-1} αρκεί να λύσουμε μια από τις ισοδύναμες εξισώσεις $f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$
6. Η f διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, \beta)$ αν και μόνο αν $f(\alpha) = \beta$
7. Αν η f είναι γνησίως μονότονη και γνωρίζω δύο σημεία της τότε μπορώ να προσδιορίσω το είδος μονοτονίας της

Παράδειγμα 1°

Η f είναι γνησίως μονότονη και διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,1)$ να προσδιοριστεί το είδος μονοτονίας της f

ΛΥΣΗ:

Η f διέρχεται από το σημείο $A(1,3) \Rightarrow f(1) = 3$

Η f διέρχεται από το σημείο $B(2,1) \Rightarrow f(2) = 1$

$1 < 2$ όμως $f(1) > f(2)$ f γνησίως μονότονη άρα είναι γνησίως φθίνουσα

Λύση εξισώσεων και ανισώσεων με χρήση μονοτονίας

1^{ov} Αν μια εξίσωση είναι γνησίως μονότονη και έχει μια ρίζα τότε αυτή είναι μοναδική.

2^{ov} i) $f(x^2 + 5x) < f(5x + 4) \xrightarrow{f \uparrow} x^2 + 5x < 5x + 4 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$

ii) $f(x^2 + 5x) < f(5x + 4) \xrightarrow{f \downarrow} x^2 + 5x > 5x + 4 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow |x| > 2 \Rightarrow x > 2 \text{ ή } x < -2$

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ $B(5,-2)$

- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα
- ii. Να δείξετε ότι η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα
- iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(e^x)) < -2$

ΛΥΣΗ:

i. $f(1)=5$ και $f(5)=-2$

$1 < 5 \Rightarrow f(1) = 5 > f(5) = -2$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα

ii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \xrightarrow{f \downarrow} f(x_1) > f(x_2) \xrightarrow{f \downarrow} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow (f \circ f)(x_1) < (f \circ f)(x_2)$

Άρα $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα

iii. $f(f(e^x)) < -2 \Rightarrow f(f(e^x)) < f(5) \xrightarrow{f \downarrow} f(e^x) > 5 \Rightarrow f(e^x) > f(1) \xrightarrow{f \downarrow} e^x < 1 \Rightarrow x < 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Αν η f είναι γνησίως μονότονη και $f(x) = -f(4 - x)$ να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση

ΛΥΣΗ:

Προφανής ρίζα $x=2$

$$f(2) = -f(4 - 2) \Rightarrow f(2) = -f(2) \Rightarrow 2f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = 0$$

άρα το $x=2$ είναι προφανής ρίζα και η f είναι **γνησίως μονότονη** άρα η ρίζα είναι μοναδική

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Να λυθεί η ανίσωση : $9 - x^3 < e^{x-2}$

ΛΥΣΗ:

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται : $9 - x^3 < e^{x-2} \Leftrightarrow 9 - x^3 - e^{x-2} < 0$

Θέτουμε $f(x) = 9 - x^3 - e^{x-2}$, $A_f = \mathbb{R}$

Οπότε η ανίσωση γίνεται $f(x) < 0$

Μελετάμε την f ως προς την μονοτονία

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Έχουμε :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow e^{x_1-2} < e^{x_2-2} \Leftrightarrow -e^{x_1-2} > -e^{x_2-2} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι : $f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης παρατηρούμε ότι : $f(2) = 0$

Επομένως η ανίσωση γίνεται : $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(2) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} x > 2$

Ασκήσεις Μονοτονία – Ακρότατα – «1-1»

1. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις :

$$\text{i)} f(x) = 5 - \sqrt{6 - 2x} \quad \text{ii)} f(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{2-x} + 1} \quad \text{iii)} f(x) = e^x + x^3$$

$$\text{iv)} f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2x^5 + 1 \quad \text{v)} f(x) = \ln(x-2) + 3x^2 \quad \text{vi)} \frac{2}{x} - \ln x$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 3$

i. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = (x+2)^2 - 1$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[-2, +\infty)$

3. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις :

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - \frac{1}{x}, & \text{άν } x > 0 \\ 1 - 2x^3 + e^x, & \text{άν } x \leq 0 \end{cases} \quad \beta) f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{άν } x \leq 1 \\ 3x^2 + 1, & \text{άν } x > 1 \end{cases}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{άν } x \geq 0 \\ x + 2, & \text{άν } x < 0 \end{cases}$$

i. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$

ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f

iii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathcal{R}$

5. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{4(a+\sqrt{x})}{3a+\sqrt{x}}$, όπου a πραγματικός αριθμός. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(25,3)$

α) Να βρείτε τον αριθμό a

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4 - \frac{8}{3+\sqrt{x}}$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

6. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\text{i)} f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x < 1 \\ -2x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ii)} f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & x > 0 \\ \frac{3}{x}, & x < 0 \end{cases} \quad \text{iii)} f(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$\text{iv)} f(x) = -2x^2 + 4x - 1 \quad \text{v)} f(x) = 2x^3 - 1$$

$$\text{vi)} f(x) = -x^3 - 3x + 2 \quad \text{v)} f(x) = 2 - \sqrt{x-1} \quad \text{vi)} f(x) = 2e^{3-x} - 1 \quad \text{v)} f(x) = 1 - 2\ln x$$

7. i. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο διάστημα Δ , να δείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .
 ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = 3 - 2x + e^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$
8. έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
 i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
 ii. Αν $f(x) \geq 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
 iii. Αν $g(\Delta) \subseteq \Delta$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
9. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,5)$ και $B(5,-2)$.
 i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
 ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα
 iii. Να λύσετε την ανίσωση $f(f(e^x)) < -2$
10. Έστω οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η C_f τέμνει τον αρνητικό ημιάξονα Ox' και τον άξονα $y'y$ στο $A(0,-1)$. Η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -1 και τον θετικό ημιάξονα oy .
 i. Να βρείτε τη μονοτονία των f και g
 ii. Να λύσετε την ανίσωση $g(f(x^2)) < 0$
11. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:
- i) $f(x) = 2x^2 - x - 1$ ii) $f(x) = -x^2 + 2x$ iii) $f(x) = 2x^2 - 1$
 iv) $f(x) = 2\ln x - 1$ v) $f(x) = 2e^{1-x} - 3, x \in [0,1]$
 vi) $f(x) = 1 - 2\ln(x-1), x \in [2,3]$
12. Να λύσετε τις εξισώσεις :
 α) $2x^5 + 3e^x = 3$ β) $\frac{2}{x} = 1 + \ln(x-1)$ γ) $e^{3-x} - 1 = \ln(x-2)$
13. Να λύσετε τις ανισώσεις
 α) $e^{1-x} < 1 + \ln x$ β) $5x^3 + \ln x < \frac{2}{x} + 3$ γ) $2^{2-x} > \ln(x+2) + 8$
 δ) $e^x + 3x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$

14. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

b) Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{2x^2+3} - \frac{1}{x^2+2x+6} > \sqrt{2x^2+3} - \sqrt{x^2+2x+6}$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$.

a. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

b. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=1$.

c. Να λύσετε την ανίσωση :

$$(3|x| + 1)^2 - (2|x| + 3)^2 > \ln \frac{2|x| + 3}{3|x| + 1}$$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 8e^{2-x} - 2x$

a. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

b. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 4$

c. Να λύσετε την ανίσωση :

$$8(e^{2-x^2} - e^{2-x}) > -2x(1-x)$$

17. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 7)$.

a. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f

b. Να λύσετε την ανίσωση : $f(f(|x| - 4) - 6) - 5 < 0$

18. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις :

α) $f(x) = 3 + |x - 2|$ β) $f(x) = 3 - \frac{4}{2+\sqrt{x-3}}$ γ) $f(x) = (\ln x - 2)^2 - 4$

δ) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

19. Να βρείτε την μέγιστη τιμή κάθε μιας από τις παρακάτω συναρτήσεις

α) $f(x) = 5 - |x + 1|$ β) $f(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$ γ) $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 4}$

δ) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

20. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2^{1+x} + 2^{1-x} + a$, όπου $a \in \mathcal{R}$.

Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(1, 8)$.

a. Να βρείτε τον αριθμό a

b. Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι το 7

21. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Να αποδείξετε ότι:

a. Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα

b. Αν οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα

- c. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα τότε η $f-g$ είναι γνησίως αύξουσα και η $f+g$ είναι γνησίως φθίνουσα
- d. Αν οι f και g είναι γνησίως αύξουσες τότε και η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα
- e. Αν οι f και g είναι γνησίως φθίνουσες τότε η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα
- f. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, τότε οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσες

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 2\alpha x - 3$, με $\alpha \in \mathcal{R}$. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x στο 1

- a. Να βρείτε τον αριθμό α
- b. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- c. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(x) + 3x^2 + 3) + 3 > 0$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \alpha x$ με $\alpha \in \mathcal{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-2, 13)$.

- a. Να βρείτε τον αριθμό α
- b. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- c. Να λύσετε την ανίσωση $3^x(2x + 5) < 1$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^5 + \alpha x + 2$, με $\alpha \in \mathcal{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-1, 4)$

- a. Να βρείτε τον αριθμό α
- b. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- c. Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ f)(x) > 2$

25. Δίνονται η συνάρτηση $g(x) = 3 - 3x$ και η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ g)(x) = -27[(x - 1)^3 + e^{3x}] \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

- a. Να βρείτε τον τύπο της f
- b. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- c. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 e^{x-3} = 27$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + \sqrt{3^x + 1}$

- a. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- b. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία $y=3$.
- c. Να λύσετε την ανίσωση:

$$(4x - 1)^5 - (x - 7)^5 < \frac{3x^{-7} - 3^4 x^{-1}}{\sqrt{3x^{-7} + 1} + \sqrt{3^4 x^{-1} + 1}}$$

27. Να βρείτε εφόσον ορίζονται τις αντίστροφες των παρακάτω συναρτήσεων

$$i) f(x) = \frac{3x-2}{x+1} \quad ii) f(x) = 3 + \sqrt{x-2}$$

$$iii) f(x) = 1 + \ln(x-3) \quad iv) f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

28. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 4x + 5$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

b) Να βρείτε την f^{-1}

30. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 - 8x + 10$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

b) Να βρείτε την f^{-1}

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-3} - 1$

a) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

b) Να βρείτε την αντίστροφη

c) Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με τους άξονες

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a-e^x}{1+e^x}$, με $a \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται

από το σημείο $M\left(\ln 3, -\frac{1}{2}\right)$

a) Να βρείτε τον αριθμό a

b) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1

c) Να βρείτε την f^{-1}

d) Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι περιττή

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$

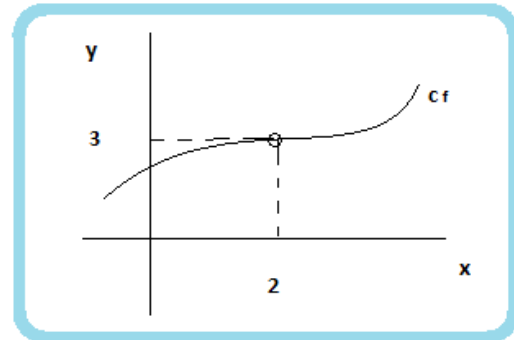
a) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

b) Να βρείτε το $f^{-1}(-3)$

c) Να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}(f(x^2 - 5) + 15) = 2$

1.3 Όριο της f όταν $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$



ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Λέμε ότι το όριο της f όταν το x τείνει στο x_0 είναι ίσο με l και συμβολίζεται $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ όταν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\varepsilon > 0$

τέτοιο ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - l| < \varepsilon$

Πως υπολογίζω όρια;

1^{ον} Η μέθοδος της αντικατάστασης

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2$$

2^{ον} Απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ (άρση απροσδιοριστίας με παραγοντοποίηση)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

3^{ον} Απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ (συζυγή παράσταση)

Παράσταση : $\alpha + \beta$

Συζυγής παράσταση : $\alpha - \beta$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{4}$$

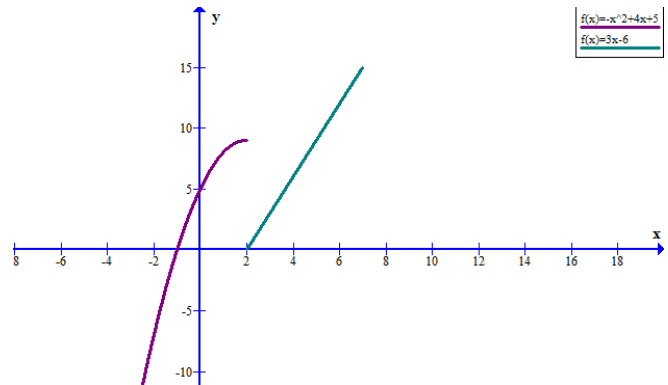
Πλευρικά όρια

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 9$ (το όριο της f όταν το x τείνει

στο 2 απο τα αριστερά)

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ (το όριο της f όταν το x τείνει

στο 2 απο τα δεξιά)



Θεώρημα : Για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ θα πρέπει να **υπάρχουν** τα πλευρικά όρια

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και είναι ίσα. Δηλαδή :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$

Παράδειγμα:

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}, \quad k(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} k(x)$

Λύση:

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1$ άρα υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 0$ άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$
- $k(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x} = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1, & \text{άν } x \geq 0 \\ x - 1, & \text{άν } x < 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -1$

άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} k(x)$

Ιδιότητες των ορίων

ΘΕΩΡΗΜΑ 1^ο

- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

Το αντίστροφο δεν ισχύει

ΘΕΩΡΗΜΑ 2^ο

Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0 το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

Παρατήρηση:

Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 και υπάρχουν τα όρια των f και g στο x_0 τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ :

Αν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε ισχύουν :

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n$$

ΒΑΣΙΚΑ ΟΡΙΑ

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Απόδειξη:

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$

Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_n x^n) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{n-1} x^{n-1}) + \dots + \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 &= \alpha_n \lim_{x \rightarrow x_0} x^n + \alpha_{n-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{n-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0 = \alpha_n x_0^n + \alpha_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0) \end{aligned}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απόδειξη:

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, Q(x_0) \neq 0$$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h αν :

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

ΛΥΣΗ:

$$\left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot 1 = |x| \Rightarrow \left| x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (|x|) &= 0 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{K.P} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ΒΑΣΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$$

Απόδειξη :

Σύμφωνα με την ανισότητα $|\eta\mu x| \leq |x|$ έχω $-|x| \leq \eta\mu x \leq |x|$

Και επειδή : $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} (|x|) = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι : $\lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = 1$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι : $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$ οπότε $\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x}$

Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ επομένως $\lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = \sqrt{1 - \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu^2 x} = \sqrt{1 - 0} = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x &= \lim_{h \rightarrow 0} \eta\mu(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\eta\mu x_0 \sigma\upsilon\nu h + \eta\mu h \sigma\upsilon\nu x_0) \\ &= \eta\mu x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu h + \sigma\upsilon\nu x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \eta\mu h = \eta\mu x_0 \cdot 1 + \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 0 = \eta\mu x_0 \end{aligned}$$

4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0$

Απόδειξη :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x &= \lim_{h \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu x_0 \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu h \eta\mu x_0) \\ &= \sigma\upsilon\nu x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu h - \eta\mu x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \eta\mu h = \sigma\upsilon\nu x_0 \cdot 1 - \eta\mu x_0 \cdot 0 = \sigma\upsilon\nu x_0 \end{aligned}$$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

ΒΑΣΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x} = \lim_{u \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu 4x}{\sigma\upsilon\nu 4x}}{\eta\mu 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu 4x}{4x}}{\frac{\eta\mu 2x}{4x} \cdot \sigma\upsilon\nu 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = \frac{1}{2} \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\eta\mu v}{v} \cdot 1 = 2$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1 - 1 = 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x(x^2 + 1)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2)(\sqrt{5x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x(\sqrt{5x+4}+2)}{5x} = 4$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΟΡΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

ΜΗΔΕΝΙΚΗ Χ ΦΡΑΓΜΕΝΗ

ΧΡΗΣΗ ΚΡΙΤΗΡΙΟΥ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

Παράδειγμα:

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right)$

ΛΥΣΗ:

$$\left|x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right| = |x| \cdot \left|\eta\mu \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$$-|x| \leq x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq |x|$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = 0 \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{Κ.Π}} \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right) = 0$$

ΟΡΙΑ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΑ

1^η περίπτωση Η παράσταση μέσα στο απόλυτο να αλλάζει πρόσημο $\Rightarrow$ παίρνω πλευρικά όρια

Παράδειγμα:

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x^2 + 10x + 25}}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{(x + 5)^2}}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{|x + 5|}{x + 5}$$

Παίρνω πλευρικά όρια και έχω:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{|x + 5|}{x + 5} &= \lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{(x + 5)}{x + 5} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{|x + 5|}{x + 5} &= \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{-(x + 5)}{x + 5} = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} \frac{|x + 5|}{x + 5} \text{ δεν υπάρχει}$$

2η περίπτωση: η παράσταση μέσα στο απόλυτο να έχει ξεκάθαρο πρόσημο οπότε διώχνω την απόλυτη τιμή σύμφωνα με τον ορισμό $|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$

Παράδειγμα:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{|x - 5| - 4}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 5 - 4}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{x - 9} = 1$$

Διότι $\lim_{x \rightarrow 9} (x - 5) = 9 - 5 = 4 > 0$ άρα $x - 5 > 0$ κοντά στο 9

ΟΡΙΟ ΜΕ ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} (4f(x) + 2 - 4x) = -10$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Λύση:

Θέτω $g(x) = 4f(x) + 2 - 4x$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -10$

Λύνω ως προς $f(x)$

$$f(x) = \frac{g(x) + 4x - 2}{4} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) + 4x - 2}{4} = -2$$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x-1} \right) = 1$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Λύση:

Θέτω $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1$

Λύνω ως προς $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot (x - 1) \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x) \cdot (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)] \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 1 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ασκήσεις Στα Όρια

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 3x^2 + 4x - 8)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^3 - 3x^2 + 4x - 8})$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 8}{x + 4} \right)$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) =$

8. Να βρεθούν τα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) + g(x)]$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} [4f(x) - 3g(x)]$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$
- v. $\lim_{x \rightarrow 1} [\sqrt{f(x) + g(x)}]$

3. Να υπολογίσετε τα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^4 - 16}$

4. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^3 - 1}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 7x - 6}{x^4 - 16}$

5. Να υπολογίσετε τα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1 - x^2} + \frac{1}{x - 1} \right)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{4}{x^3 - 2x^2} \right)$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \right)$

6. Να υπολογίσετε τα όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-\sqrt{6-x}}$

7. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x+3}, & \text{αν } x < -3 \\ 3x+5, & \text{αν } x \geq -3 \end{cases}$$

Να βρείτε, αν υπάρχουν τα όρια :

$$i. \lim_{x \rightarrow -4} f(x) \quad ii. \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \quad iii. \lim_{x \rightarrow -3} f(x)$$

8. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{3x^2-5x+2}{x^2-x}, & \text{αν } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

9. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{\sqrt{x+4}-2}, & \text{αν } -4 \leq x < 0 \\ \frac{x^3+2x^2-8x}{2x^2-4x}, & \text{αν } 0 < x < 2 \\ \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

10. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-3|-|x-1|}{x^2-2x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x^2-4|-|x+1|-3}{x^3-9x}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2-x-2|-|3x-1|}{|x^2-3x+8|-10}$

11. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| + 2x - 6}{x^2 - 9}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1| - x^2 + x}{|x^2 + 2x - 3| - x + 1}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| - x^2 - 4}{|x-5| - 3}$

12. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{|x^2 - 2x - 3| + x^3 - x^2 - 5x - 3}{|x^2 - 3x - 4|}$$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x + 4}{x - 3} = 10$. Να βρείτε τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 3x}$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} [xf(x) + x^2 - 8] = 6$. Να βρείτε τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 5f(x)}{\sqrt{f(x)} - 1 - 2}$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 4$. Να βρείτε τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) - xf(x) + 2x}{(x-2)(\sqrt{x+2} - 2)}$

16. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + \lambda x + \mu}{x^2 + 3x + 2} = 5$$

17. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + \alpha}{x^2 - 1}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

- i. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α
- ii. Να υπολογίσετε το παραπάνω όριο

18. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x}{x^2 - 3x + 2}$$

Με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Να βρείτε :

- i. Τις τιμές των α και β
- ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$

19. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}, & \text{αν } -3 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 3x + 2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

20. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x - \alpha}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{\beta x^2 + \gamma x - 1}{x - 1}, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

21. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x + 8}{\sqrt{x+3} - 1}, & \text{αν } -3 \leq x < -2 \\ \frac{x^3 + \alpha x^2 - 4x + \beta}{x^2 - 4}, & \text{αν } -2 < x < 2 \\ \frac{3x^2 - 8}{x^2 - 3x + 2} - \frac{4}{x - 2}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.
- ii. Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{|x-3|}$ Όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε τους αριθμούς α και β καθώς και το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $2x^2 - 7x + 5 \leq f(x) \leq x^2 - x - 4$ για κάθε $x \in (2, 6)$

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3}$

24. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$\frac{x^3 - x}{\sqrt{x+3} - 2} \leq f(x) \leq \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x^2 - x}$$

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

25. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + \beta}{\sqrt{x} - 1}, & \text{αν } x > 1 \\ x^2 + \beta x + 4, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

Όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για την οποία το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

Να βρείτε :

i. Τους αριθμούς α και β

ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

iii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{3f(x)+4}}{f^2(x) - 16}$

26. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^2 + x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \eta\mu x}{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}$

27. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4\eta\mu x}{2x + \sigma\upsilon\nu x - 1}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x\sigma\upsilon\nu x + 3\eta\mu x}{3x^2 + \epsilon\phi x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$
iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x + \epsilon\phi^2 x}{x\eta\mu x}$

28. Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 4x}{x}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 5x}{x^2}$ iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi 3x - \eta\mu 5x}{x}$ v. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x + 9x}{4x + \eta\mu 2x}$

29. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{x^2 + x + \eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

30. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x - 2x}{\sqrt{x+9} - 3}, & \text{αν } x > 0 \\ \frac{3x\eta\mu x + \eta\mu 3x \cdot \eta\mu 5x}{x^3 + 3x^2}, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Να βρείτε αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

31. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 5x + \eta\mu 7x}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\alpha\eta\mu 3x}{\sqrt{x+1} - 1}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του α ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

32. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{\eta\mu 3x} = 2$$

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x+1} - 1} = 6$$

Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$$

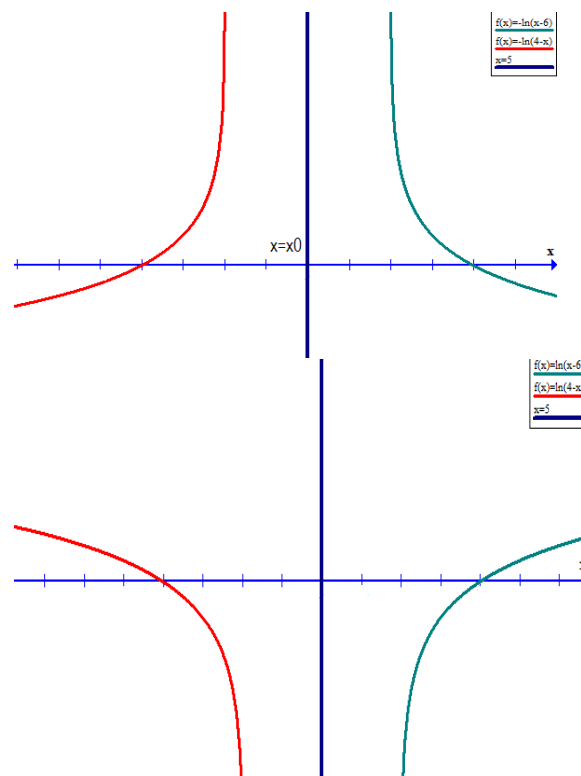
34. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

$$\begin{aligned} \text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x\eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x - x}{x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) \\ \text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x+1} - 1} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \text{v. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu^2 x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}}{x} \right) \end{aligned}$$

1.4 Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



Ιδιότητες

(1) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0

(2) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$

(3) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = 0$

(4) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

(5) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$

(6) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = +\infty$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ν περιττός} \\ -\infty, & \text{ν άρτιος} \end{cases}$

Παρατήρηση :

(1) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty$

(3) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ δεν υπάρχει}$

Πράξεις με όρια:

➤ Όριο αθροίσματος :

Όριο της f	$a \in \mathbb{R}$	$a \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Όριο της g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Όριο της f+g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	AM	AM

➤ Όριο γινομένου :

Όριο της f	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
Όριο της g	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
Όριο της fg	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	AM	AM

Βασικά παραδείγματα:(1/181)

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{x^4+3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{x^2(x^2+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+5}{x^2+3} = (+\infty) \cdot \frac{5}{3} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{4(x-1)^4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^4} = -\frac{1}{4} \cdot (+\infty) = -\infty$

iii. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right)$

Παράδειγμα 2:

(3/182)

Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

Λύση:

$$f(x) = \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\lambda - 1)x^2 + x - 2}{(x + 1)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \\ &= \frac{\lambda - 2}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1} \end{aligned}$$

- αν $\frac{\lambda - 2}{2} \neq 0$ τότε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα)
- αν $\frac{\lambda - 2}{2} = 0$ τότε $\lambda = 2$ οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{3}{2}$

Παράδειγμα 3:

(4/182)

i. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ όταν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 4}{f(x)} = +\infty$

Λύση:

$$\text{θέτω } g(x) = \frac{x - 4}{f(x)} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{λύνω ως προς } f(x) \text{ και έχω } f(x) &= \frac{x-4}{g(x)} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-4}{g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-4) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{g(x)} = -3 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

ii. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ όταν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x+2} = -\infty$

Λύση:

$$\begin{aligned} \text{θέτω } g(x) &= \frac{f(x)}{x+2} \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty \text{ λύνω ως προς } f(x) \text{ και έχω } f(x) \\ &= g(x) \cdot (x+2) \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \cdot (x+2) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \cdot (-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Ασκήσεις στα μη πεπερασμένα όρια

1. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-7}{|x-2|}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x^2-6x+9}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^3+2x^2}$ v) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+4}{x^3+4x^2+4x}$

2. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-3}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-7}{x^2-4}$ iii) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+5}{x^2-2x-8}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-1}{x^3-1}$ v) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^3+4x^2+3x}$

3. Να βρείτε αν υπάρχουν τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|2-x|-3}{|2x-9|-|4x-x^2|}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x-2|-|x+2|}{x^3}$

4. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x}, & \text{άν } x > 0 \\ \frac{x^2+x-4}{x^2-2x}, & \text{άν } x < 0 \end{cases}$$

Να βρείτε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

5. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x}$ ii) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-3}{\sin x}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+2}{\eta \mu x}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x \cdot \eta \mu x}$

6. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x^2}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^3}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x^4-2x^3}$ iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-2|x|}{x^2}$

7. Να υπολογίσετε , αν υπάρχουν , τα παρακάτω όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} \right)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x-7}{|x-2|} - \frac{x-3}{x-2} \right)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x^3-3x^2+3x-1}$

8. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x^3} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu^3 x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x \cdot \eta\mu^2 x}{x^5} \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^3 x}{\sqrt{x^5 + 4} - 2}$$

9. Να βρείτε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lambda x - 3}{|x - 1|} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lambda x + 2}{x^2 - 4x + 4} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x^2 + \lambda x + 1} \quad iv) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\lambda x^2 + \lambda^2 x - 3}{x - 2\sqrt{x} + 1}$$

10. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -5$

a) Να αποδείξετε ότι $\gamma=0$ και $\beta=-5$

b) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 \cdot f(x)] = 3$$

Να βρείτε τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot \eta\mu x \cdot \eta\mu 3x]$$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x^2 - 4x + 4) \cdot f(x)] = -4$$

Να βρείτε τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad ii) \lim_{x \rightarrow 2} [(xf(x) - 2f(x)) \cdot (\sqrt{x^2 - 3} - 1)]$$

13. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + \alpha x + \beta}{x^2 - 4x} \quad \mu\epsilon \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{1}{4}$

a. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

b. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

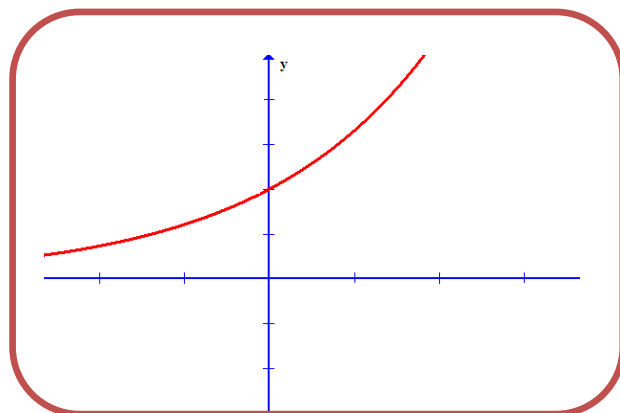
c. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

d. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1.5 Όριο συνάρτησης στο $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \begin{cases} \text{αριθμός} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



Γενικά ισχύουν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^v = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^v} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^v = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } v \text{ άρτιος} \\ -\infty, & \text{αν } v \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^v} = 0$$

Όριο πολυωνυμικής

$$\text{έστω } P(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad \text{τότε} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\alpha_n x^n)$$

π.χ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Γιατί:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Όριο Ρητής Συνάρτησης

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_n x^n + \dots + \alpha_0}{\beta_k x^k + \dots + \beta_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\alpha_n x^n}{\beta_k x^k}$$

Όριο Άρρητης Συνάρτησης

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2}}\right) = +\infty\end{aligned}$$

Βασικά παραδείγματα :

1. (1/187/ ΣΒ) Να βρεθούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$

Λύση:

$$\begin{aligned}\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} + \mu x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \mu x\right) = \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \mu\right)\right] &= -\infty(\mu - 1) = \lambda = \begin{cases} \lambda = -\infty, & \text{αν } \mu > 1 \\ \lambda = +\infty, & \text{αν } \mu < 1 \\ A.M, & \text{αν } \mu = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Αν $\mu=1$ έχω:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(\sqrt{x^2 + 1} - x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2x}\right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)}{\mu} x = \frac{\mu-1}{\mu} (+\infty) = \lambda \\ &= \begin{cases} \text{αν } \frac{\mu-1}{\mu} > 0 \text{ τότε } \lambda = +\infty \\ \text{αν } \frac{\mu-1}{\mu} < 0 \text{ τότε } \lambda = -\infty \end{cases}\end{aligned}$$

$$\text{αν } \mu = 1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\text{αν } \mu = 0 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + 2x^2 + 3}{-5x + 6} = +\infty$$

$$2. \quad i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x| \sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}} - \lambda \right) \right] = +\infty(1 - \lambda) = \begin{cases} \text{αν } 1 - \lambda > 0 \text{ τότε } +\infty \\ \text{αν } 1 - \lambda < 0 \text{ τότε } -\infty \\ \text{αν } \lambda = 1 \text{ τότε } \frac{5}{2} (*) \end{cases}$$

(*) αν $\lambda=1$ τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 10} - x)(\sqrt{x^2 + 5x + 10} + x)}{(\sqrt{x^2 + 5x + 10} + x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x + 10}{(\sqrt{x^2 + 5x + 10} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(5 + \frac{10}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x} + \frac{10}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{5}{2}$$

Ασκήσεις :

1. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 5x^2 + 6x - 3) \quad ii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 7x^3 - 5x - 6)$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^5 - 7x^4 + 6x^2 - 1) \quad iv) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - x^2 + x - 3)$$

2. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 2}{x^2 + 4x - 1} \quad ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 2}{2x^3 + 5x - 1}$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^3 + 3x + 1}{3x - 11} \quad iv) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^6 - 5x^4 + 6x - 1}{-x^3 + 4x^2 - 1}$$

3. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) \quad ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x-2} + \frac{x^2}{x+3} \right) \quad iii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x+1} - \frac{x^3}{x-3} \right)$$

4. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 - 5x^2 + 7x - 3} + 2x \right) \quad ii) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 5} - 4x \right)$$

$$iii) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 + 3x} \right)$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5x + 1} - x) \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 6} - 3x)$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 5x - 3} + x)$$

6. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x^2 + 1}) \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 + x}) \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$$

7. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 5x + 2} - \sqrt{4x^2 - 3x - 1}) \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{25x^2 + 4x - 3} - \sqrt{x^2 - x + 2})$$

8. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5}{\sqrt{4x^2} + 7} \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3x - 1}}{5 - x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3x}}{x - 1} \quad iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x} - \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^2} + 4x - 7}$$

9. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda - 2)x - 3]$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

10. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\lambda - 3)x^3 + (\lambda - 5)x^2 + x - 2]$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

11. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\lambda x^3 + (\lambda - 2)x^2 - 3x + 5}{x^2 - x - 1}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

12. Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda^2 - 9)x^3 + (\lambda - 3)x^2 + (\lambda + 1)x - 2}{x^2 + 3x - 5}$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

13. Να βρείτε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{6x^2 + \lambda x - 7}{2x - 5} + \lambda x \right)$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ

14. Να βρείτε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 3x + 2} + \lambda x)$$

Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

15. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 2)x^2 + (3\alpha - 2\beta)x + 7}{(\beta + 3)x - 13} = 4$$

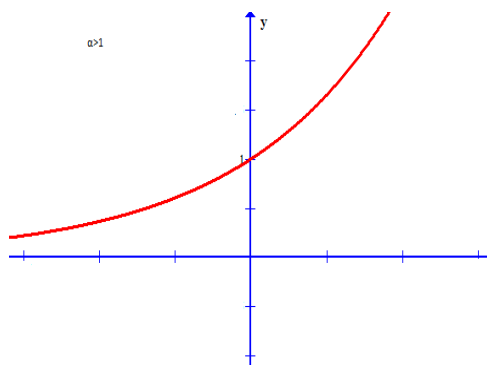
16. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x - 2} + \alpha x + \beta \right) = 5$$

17. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta > 0$ ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\alpha \sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{\beta x^2 - 12x + 5} \right) = 3$$

1.6 Όριο εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$



Av $a > 1$

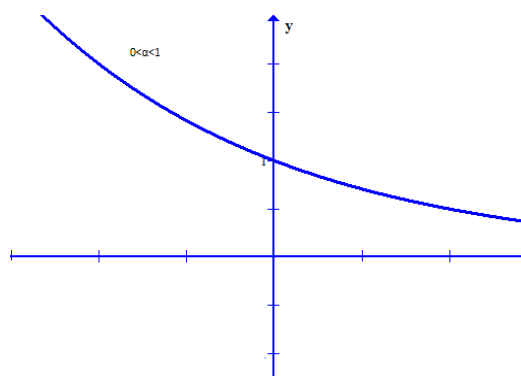
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

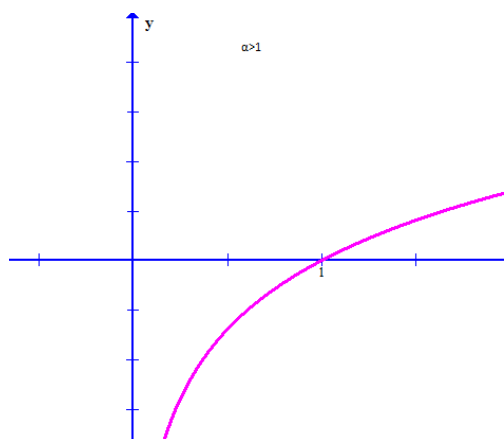
Av $0 < a < 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$



Όριο λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \log_a x$

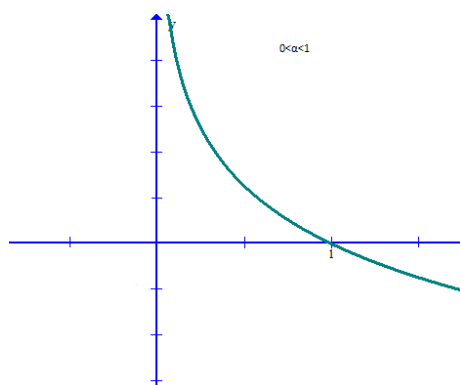


Av $a > 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

Av $0 < a < 1$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

1^ο παράδειγμα:

Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5^x}{2 \cdot 3^x - 7 \cdot 5^x}$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5^x}{2 \cdot 3^x - 7 \cdot 5^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^x + 5^x}{5^x}}{\frac{2 \cdot 3^x - 7 \cdot 5^x}{5^x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1}{2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^x - 7} = -\frac{1}{7}$$

Διότι

$$\frac{3}{5} < 1 \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0$$

Μεθοδολογία:

Διαιρώ με έναν από τους 3^x ή 5^x

- Όταν $x \rightarrow +\infty$ διαιρώ με τον μεγαλύτερο
- Όταν $x \rightarrow -\infty$ διαιρώ με τον μικρότερο

2^ο παράδειγμα :

Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 5x + 6)$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 5x + 6) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\text{Θέτω } x^2 - 5x + 6 = u$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{άρα } u \rightarrow +\infty$$

3^ο Παράδειγμα

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2 \cdot \alpha^x}{3^x + \alpha^x} = \ell$

Λύση:

Αν $\alpha > 3$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2 \cdot \alpha^x}{3^x + \alpha^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^x}{\alpha^x} - 2 \cdot \frac{\alpha^x}{\alpha^x}}{\frac{3^x}{\alpha^x} + \frac{\alpha^x}{\alpha^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{\alpha}\right)^x - 2}{\left(\frac{3}{\alpha}\right)^x + 1} = -\frac{2}{1} = -2$$

Αν $\alpha < 3$ τότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2 \cdot \alpha^x}{3^x + \alpha^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^x}{3^x} - 2 \cdot \frac{\alpha^x}{3^x}}{\frac{3^x}{3^x} + \frac{\alpha^x}{3^x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 2 \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x}{1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x} = \frac{1}{1} = 1$$

Αν $\alpha = 3$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2 \cdot \alpha^x}{3^x + \alpha^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2 \cdot 3^x}{3^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3^x}{2 \cdot 3^x} = -\frac{1}{2}$$

$$\ell = \begin{cases} -2 & \text{αν } \alpha > 3 \\ -\frac{1}{2} & \text{αν } \alpha = 3 \\ 1 & \text{αν } \alpha < 3 \end{cases}$$

Πως υπολογίζω τριγωνομετρικά όρια όταν $x \rightarrow +\infty$;

Τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu x$ δεν υπάρχουν !!!

→ όρια της μορφής $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) \cdot \eta\mu g(x))$

με $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ υπολογίζονται με κριτήριο παρεμβολής

Βασικά παραδείγματα :

1. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \eta\mu x \right)$$

Λύση:

Έχω :

$$\left| \frac{1}{x} \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \quad \text{άρα} \quad -\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{x} \eta\mu x \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|x|} \right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \eta\mu x \right) = 0$$

2. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu u}{u} \right) = 1$$

$\theta\acute{\epsilon}\tau\omega : \frac{1}{x} = u \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
 $\acute{\alpha}\rho\alpha \text{ \textit{όταν } } x \rightarrow +\infty \text{ \textit{το } } u \rightarrow 0$

3. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \cdot \eta\mu x \right)$$

Λύση:

Έχω ότι :

$$\left| \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \cdot \eta\mu x \right| \leq \left| \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \right|$$

$$- \left| \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \right| \leq \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \cdot \eta\mu x \leq \left| \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \right|$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(- \left| \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \right| \right) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\left| \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \right| \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \xRightarrow{K.II} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + 5x} \cdot \eta\mu x \right) = 0$$

4. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 5} \cdot \eta\mu \frac{3x + 1}{x^2 + 1} \right)$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 5} \cdot \eta\mu \frac{3x + 1}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 5} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\eta\mu \frac{3x + 1}{x^2 + 1} \right) = \ell$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 5} \right) = \frac{3}{2}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\eta\mu \frac{3x+1}{x^2+1} \right)^{\frac{3x+1}{x^2+1}=u} \lim_{u \rightarrow 0} (\eta\mu u) = 0$$

$$\text{Άρα } \ell = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0$$

Ασκήσεις στην Εκθετική – Λογαριθμική :

1. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$$

2. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{4^x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{6^x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+3}}{3^{x+2}} \quad iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{2x}}{2^{3x}}$$

3. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x - 8}{5^x + 7^x + 4} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x + 6}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + 2} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^x + 5}{3^x + 4} \quad iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{2^x - 5}$$

4. Να υπολογίσετε τα όρια

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 3^x}{5^x + 2^x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 7^x}{2^x + 3^x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^{x+2} + 6^x}{4^x + 6^{x+1}} \quad iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^{x+1} + 3^{x+2}}{7^x - 3^{x+1}}$$

5. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{2^x + 1} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{2^x + 3^x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 3^x}{x^2 + x - 4}$$

6. Να βρείτε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x^2+1}{x+2}} \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2+1}{x+1}} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + x + 1)$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x^2 + 1}{2 - x} \quad v) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x + 2}{x^2 + 1}$$

7. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3 + 4x) - \ln(x^2 + 2)] \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + 1) - \ln(x^2 + 3x)]$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} [2 \ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 - 3x)]$$

8. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 2\eta\mu x}{4x + 1} \quad iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5\eta\mu x}{2x - 7\sigma\upsilon\nu x}$$

9. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right) \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} - x\right)$$

10. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x+3} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta\mu x}{x^2 - 3x + 2} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\sqrt{x^2 + 3} - x \right) \cdot \eta\mu 5x \right] \quad iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta\mu x - \sqrt{9x^4 + 3}}{x\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{x^4 + 1}}$$

11. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 5} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{5x + \eta\mu x}$$

12. Να υπολογίσετε τα επόμενα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 5} \cdot \eta\mu \frac{3x + 1}{x^2 + 1} \right) \quad ii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{3x - 2}{x^2 + 2} \right)$$

13. i) Να δείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^v} = 0$, $v \in \mathbb{N}^*$

ii) Να βρείτε τα όρια :

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \eta\mu x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x\eta\mu x + 1}{x^2 + \eta\mu x + 3}$$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - \sqrt{x^2 + x + 2}}{2x + 1} = 3$$

Να βρείτε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

1.7 Συνεχείς Συναρτήσεις :

Ορισμός: Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in A$ όταν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ υπάρχει, είναι πραγματικός αριθμός και ισχύει: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Παράδειγμα :

Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$ η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2x, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

$$f(1) = 2$$

Άρα αφού $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Προσοχή !!!

Όταν έχω πλευρικά όρια, για να είναι η f συνεχής πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Παράδειγμα :

Να εξετασθεί ως προς τη συνέχεια $x_0 = 0$ η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x}{x}, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{2+\sqrt{x}}{2}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + \sqrt{x}}{2} = 1$$

$$f(0) = 1$$

Άρα αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ η f είναι συνεχής στο 0



Συνέχεια συνάρτησης σε ένα διάστημα (α, β)

Η f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα (α, β) όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος (α, β)



Συνέχεια συνάρτησης σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ όταν :

- Είναι συνεχής στο (α, β)
- $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$

Βασικές συνεχείς συναρτήσεις :

1^{ov} κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής

2^{ov} κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

3^{ov} οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς

4^{ov} οι εκθετικές και οι λογαριθμικές είναι συνεχείς

Παράδειγμα 1^ο

Να βρεις τον πραγματικό αριθμό α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Όπου

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 12, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

Λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\alpha x + 12) = \alpha + 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \alpha + 12 = 2 \Leftrightarrow \alpha = -10$$

Παράδειγμα 2^ο :

Να εξετάσεις ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x < 5 \\ \frac{x^2 - 5x}{x - 5} + 5, & x \geq 5 \end{cases}$$

Στο πεδίο ορισμού της .

Λύση:

Όταν $x < 5$ η f είναι συνεχής ως ρητή

Όταν $x > 5$ η f είναι συνεχής ως ρητή

Εξετάζω την f ως προς την συνέχεια στο $x_0 = 5$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = 10$$

Ασκήσεις στη συνέχεια συνάρτησης :

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο σημείο x_0 τις συναρτήσεις :

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 1$$

$$ii) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 1$$

$$iii) f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0$$

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 όταν :

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0$$

$$ii) f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ xe^{\frac{x-1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0$$

$$iii) f(x) = \begin{cases} e^{x^2 - 5x + 6}, & x \in [0, 2] \\ x - 1 - \frac{1}{\ln(x - 2)}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 2$$

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

$$i) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + x^2 + 1, & x < 0 \\ \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad ii) f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$$

4. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

$$i) f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + \ln(x^2 + 1), & x < 0 \\ e^{2x} + x - 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad ii) f(x) = \begin{cases} x \eta\mu \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ x e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases} \quad iii) f(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}} - 1, & x < 0 \\ \ln(x + 1) + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sigma\upsilon\nu(x - 1) - 1}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}, & x > 1 \\ 2\alpha - 1, & x = 1 \end{cases}$$

Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

6. Έστω η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^4 + x^2} + \eta\mu 2x}{x^2 + x}, & x > 0 \\ e^x + \lambda, & x \leq 0 \end{cases}$$

i) Να βρείτε το λ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

ii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

7. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \alpha x - 2, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \eta\mu x - 7 \sigma\upsilon\nu x + 2 \ln(x + 1), & x \geq 0 \end{cases}$$

Να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

8. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} 3ae^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

9. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις :

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad ii) f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) = 2x + 3\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε το $f(0)$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2 + 3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να βρείτε τον τύπο της f

12. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 f(x) + x = x\sigma\upsilon\nu x - f(x) \cdot \eta\mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε το $f(0)$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x + \eta\mu x \leq xf(x) \leq 2x^2 + x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής να βρείτε το $f(0)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - \eta\mu(x - 2)| \leq x^2 - 4x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2xf(x) \leq |x - 1| - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) \leq 2xf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

i. Η f είναι συνεχής στο 0

ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

1.8 Βασικά θεωρήματα στη συνέχεια :

Θεώρημα Bolzano:

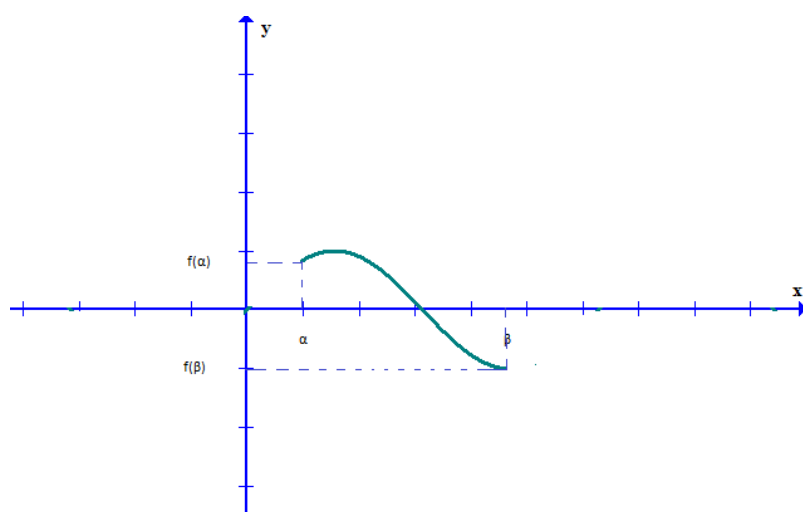
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ η οποία :

- Η f είναι συνεχής στο $[α,β]$
- $f(α) \cdot f(β) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $χ_0 \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f(χ_0)=0$

δηλαδή : υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο ανοιχτό διάστημα $(α,β)$

γεωμετρική ερμηνεία:



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης . επειδή τα σημεία $A(α, f(α))$ και $B(β, f(β))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $χ'χ$, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $χ'χ$ σε ένα τουλάχιστον σημείο

Παρατηρήσεις στο θεώρημα Bolzano

1. το θεώρημα Bolzano είναι **υπαρξιακό** . Δηλαδή εξασφαλίζουμε την ύπαρξη της ρίζας . (όχι την εύρεση της ρίζας)
2. Αν αντί για $f(α) \cdot f(β) < 0$ έχουμε ότι $f(α) \cdot f(β) \leq 0$ τότε ισχύει το θεώρημα Bolzano και μάλιστα επειδή $f(α) \cdot f(β) = 0 \Leftrightarrow f(α) = 0$ ή $f(β) = 0$, μία από τις δύο ρίζες θα είναι ή ο $α$ ή ο $β$
3. Αν επιπλέον έχω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη τότε η ρίζα θα είναι μοναδική

Παραδείγματα:

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $\eta\mu x - x + 1 = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$

Λύση:

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x + 1$ και εφαρμόζω θεώρημα Bolzano στο $[0, \pi]$

- Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα τριγωνομετρικής και πολυωνυμικής

$$\bullet \left. \begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(\pi) = -\pi + 1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(\pi) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης

$$\eta\mu x - x + 1 = 0 \text{ στο } (0, \pi)$$

2. Να λυθεί η εξίσωση : $\frac{\chi^4+1}{\chi-1} + \frac{\chi^6+1}{\chi-2} = 0$ στο (1,2)

Στις κλασματικές εξισώσεις ,
πρώτα κάνω απαλοιφή
παρονομαστών και μετά

Λύση:

$$\frac{\chi^4+1}{\chi-1} + \frac{\chi^6+1}{\chi-2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \frac{\chi^4+1}{\chi-1} + (x-1)(x-2) \frac{\chi^6+1}{\chi-2} = 0$$

$$(x-2)(\chi^4+1) + (x-1)(\chi^6+1) = 0$$

Θέτω

$$f(x) = (x-2)(\chi^4+1) + (x-1)(\chi^6+1)$$

Και εφαρμόζω θεώρημα Bolzano για την f στο (1,2)

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [1,2] \\ f(1) = -2 < 0 \\ f(2) = 64 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1)f(2) < 0$$

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = 0$

$$\text{Δηλαδή η εξίσωση } (x-2)(\chi^4+1) + (x-1)(\chi^6+1) = 0$$

Έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)

Σχόλιο :

1. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \neq 0$ τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$

Δηλαδή : είτε $f(x) > 0$ στο $[\alpha, \beta]$ είτε $f(x) < 0$ στο $[\alpha, \beta]$

2. Αν ρ_1 και ρ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της f και η f είναι συνεχής τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\rho_1, \rho_2]$

Παράδειγμα :

Να βρεθεί το πρόσημο της $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Λύση:

Λύνω την εξίσωση $f(x) = 0$

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) - (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
Επιλέγω χ_0	-3	$-\frac{3}{2}$	0	2	
$f(x_0)$	$f(-3)=-8$	$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{8}$	$f(0)=-2$	$f(2)=12$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Διατύπωση: έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν :

- Η f είναι συνεχής στο $[α,β]$
- $f(α) \neq f(β)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\chi_0 \in (α,β)$ τέτοιος ώστε $f(\chi_0) = \eta$

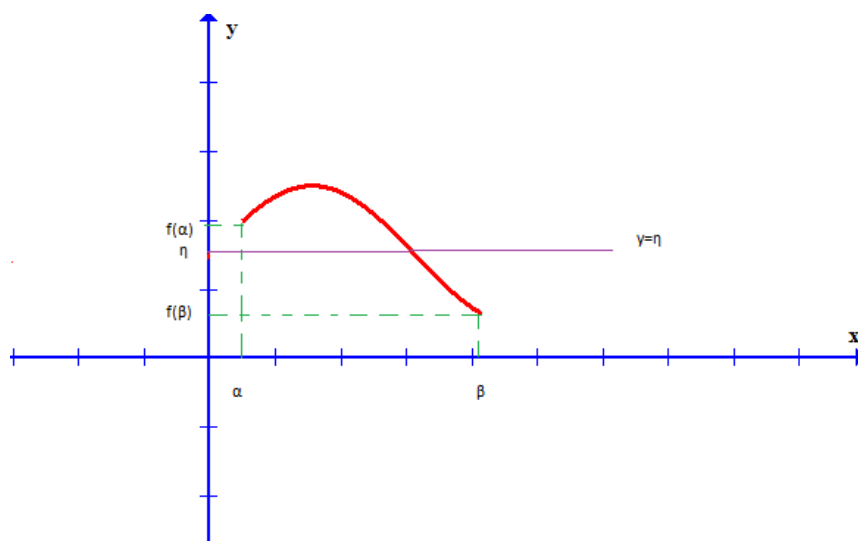
Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $f(α) < f(β)$ τότε θα ισχύει $f(α) < \eta < f(β)$ αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $g(\chi) = f(\chi) - \eta$, $\chi \in [α,β]$, παρατηρούμε ότι :

- η g είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $g(α) = f(α) - \eta < 0$ και
 $g(β) = f(β) - \eta > 0$

επομένως σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano , υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (α,β)$, τέτοιο ώστε $g(\chi_0) = f(\chi_0) - \eta = 0$, οπότε $f(\chi_0) = \eta$

Γεωμετρική Ερμηνεία : Η ευθεία $y = \eta$ τέμνει την f σε ένα τουλάχιστον σημείο



Πρόταση : Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα

$$f(\Delta) = [\dots, \dots]$$

Θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής τότε η f παίρνει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή

$$m \leq f(x) \leq M$$

Το σύνολο τιμών της f είναι: $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$

Μεθοδολογία για την εύρεση συνόλου τιμών:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$

(1) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα τότε το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f([\alpha, \beta]) = [f(\alpha), f(\beta)]$$

(2) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως φθίνουσα τότε το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f([\alpha, \beta]) = [f(\beta), f(\alpha)]$$

(3) Αν η f είναι συνεχής στο (α, β) και γνησίως αύξουσα τότε το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x))$$

(4) Αν η f είναι συνεχής στο (α, β) και γνησίως φθίνουσα τότε το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$$

(5) Αν η f είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα τότε το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f((-\infty, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x))$$

(6) Αν η f είναι συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα τότε το σύνολο τιμών της f είναι :

$$f[(-\infty, +\infty)] = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x))$$

Βασικό παράδειγμα στο θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής

Θ.Μ.Ε.Τ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,2]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10}$$

Λύση:

Η f είναι **συνεχής** συνάρτηση στο **$[0,2]$** άρα θα έχει μια **μέγιστη** και μία **ελάχιστη** τιμή

$$m \leq f(x) \leq M \text{ για κάθε } x \in [0,2]$$

$$0 \in [0,2] \Rightarrow m \leq f(0) \leq M \quad (1)$$

$$1 \in [0,2] \Rightarrow m \leq f(1) \leq M \Rightarrow 5m \leq 5f(1) \leq 5M \quad (2)$$

$$2 \in [0,2] \Rightarrow m \leq f(2) \leq M \Rightarrow 4m \leq 4f(2) \leq 4M \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1),(2) , (3) και έχουμε

$$10m \leq f(0) + 5f(1) + 4f(2) \leq 10M$$

$$m \leq \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10} \leq M$$

$$m \leq f(x_0) \leq M$$

Άρα υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ τέτοιο ώστε :

$$f(x_0) = \frac{f(0) + 5f(1) + 4f(2)}{10}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x-2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η f να είναι συνεχής.

ΛΥΣΗ

Αν $x \neq 2$ η $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x-2}$ είναι συνεχής ως ρητη συναρτηση

Για να είναι η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ αρκεί να είναι συνεχής και στο σημείο $x_0 = 2$. Δηλαδή αρκεί να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 3$.

Για $x \neq 2$ είναι $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x-2} \Leftrightarrow x^2 - \alpha x + \beta = (x-2)f(x)$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - \alpha x + \beta) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2)f(x) = 0 \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\alpha + \beta = 0$

$\Leftrightarrow \beta = 2\alpha - 4$.

Αρα $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x-2} = \frac{x^2 - \alpha x + 2\alpha - 4}{x-2} = \dots = x + 2 - \alpha$

Πρέπει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2 - \alpha) = 3 \Leftrightarrow 4 - \alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Και $\beta = 2 \cdot 2 - 1 \Leftrightarrow \beta = 3$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1 & , 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} & , x > 2 \end{cases}$

Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$. (1) Όμως:

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3\alpha}{x^3} + 1 \right) = \frac{3\alpha}{8} + 1 \\
\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(1 - \sqrt{x-1}) \cdot (1 + \sqrt{x-1})}{(x^2 - 4) \cdot (1 + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{(x-2) \cdot (x+2)(1 + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x+2)(1 + \sqrt{x-1})} = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\text{Είναι } f(2) = \frac{3\alpha}{8} + 1$$

$$\text{Οπότε } \eta \ (2) \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{8} + 1 = -\frac{1}{8} = \frac{3\alpha}{8} + 1 \Leftrightarrow 3\alpha + 8 = -1 \Leftrightarrow \alpha = 3$$

3 . Αν για κάθε x κοντά στο $x_0 = 0$ ισχύει ότι:

$$\eta\mu x + x \leq f(x) \leq 8\sqrt{x+4} - 16 \quad \text{εξετάστε ως προς την συνέχεια την}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{στο } x_0 = 0 .$$

ΛΥΣΗ

$$\text{Είναι } \eta\mu x + x \leq f(x) \leq 8\sqrt{x+4} - 16 \quad (1).$$

$$\text{Για } x > 0 \quad \eta \ (1) \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{x} + 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{8\sqrt{x+4}-16}{x} \quad (2)$$

$$\text{Το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + 1 \right) = 1 + 1 = 2 \quad , \quad \text{το } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8\sqrt{x+4}-16}{x} = \dots = 2 \quad \text{αρα}$$

$$\text{Από κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 2 .$$

$$\text{Για } x \in [-4, 0) \quad \eta \ (1) \Leftrightarrow \frac{8\sqrt{x+4}-16}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} + 1 \quad (3)$$

$$\text{Το } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + 1 \right) = 1 + 1 = 2 \quad , \quad \text{το } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{8\sqrt{x+4}-16}{x} = \dots = 2 \quad \text{αρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = 2 . \quad \text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2 \quad \text{και επειδή}$$

$$g(0) = 2 \Rightarrow g \text{ συνεχής στο } x_0 = 0 .$$

4. Εστω $f: R \rightarrow R$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 + x}{x-1} = 3.$$

α) Βρείτε το $f(1)$

β) βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x-1}$

ΛΥΣΗ

α) Αφού f συνεχής $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\text{Αν } g(x) = \frac{f(x) + x^2 + x}{x-1}, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3 \text{ και } f(x) = (x-1)g(x) - x^2 - x$$

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \cdot 3 - 1 - 1 = -2.$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(x) - x^2 - x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(g(x) - \frac{x^2 + x - 2}{x-1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(g(x) - \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \right) = 0. \end{aligned}$$

5. Εστω $f: R \rightarrow R$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \frac{1}{2}.$$

α) Βρείτε το $f(1)$

β) βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x-1}$

ΛΥΣΗ

α) Αφού f συνεχής $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\text{Αν } g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{x}}{x^2 - x}, \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}, \text{ και } f(x) = (x^2 - x)g(x) + \sqrt{x}$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \text{ αρα } f(1) = 1.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x)g(x) + \sqrt{x} - 1}{x-1} = \dots = 1.$$

6 . Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο R και έχει την ιδιότητα:

$$[f(x) + x][f(x) - x] \leq 2f(x)\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu^2(\pi x) - 2x \text{ για κάθε } x \in R$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Για κάθε } x \in R \text{ είναι } [f(x) + x][f(x) - x] \leq 2f(x)\eta\mu(\pi x) + \sigma\upsilon\nu^2(\pi x) - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - x^2 \leq 2f(x)\eta\mu(\pi x) + 1 - \eta\mu^2(\pi x) - 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2f(x)\eta\mu(\pi x) + \eta\mu^2(\pi x) \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - \eta\mu(\pi x)]^2 \leq (x - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{[f(x) - \eta\mu(\pi x)]^2} \leq \sqrt{(x - 1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |f(x) - \eta\mu(\pi x)| \leq |x - 1| \Leftrightarrow -|x - 1| \leq f(x) - \eta\mu(\pi x) \leq |x - 1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu(\pi x) - |x - 1| \leq f(x) \leq \eta\mu(\pi x) + |x - 1|$$

Για $x = 1$ έχουμε $0 \leq f(1) \leq 0$ επομένως $f(1) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} [\eta\mu(\pi x) - |x - 1|] = \lim_{x \rightarrow 1} [\eta\mu(\pi x) + |x - 1|] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Αρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ και η f είναι συνεχής στο σημείο $x = 1$.

7 . Έστω συνάρτηση $f : R \rightarrow R$ για την οποία δίνεται η σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = f^2(x) + x \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

$$f^3(x) + f(x) = f^2(x) + x \Leftrightarrow f(x)[f^2(x) - f(x) + 1] = x \quad (1) \text{ για κάθε } x \in R$$

Το τριωνυμο $\varphi(y) = y^2 - y + 1$ έχει $\Delta < 0$ αρα $y^2 - y + 1 > 0$ επομένως

$$f^2(x) - f(x) + 1 > 0 \text{ αρα } (1) \Leftrightarrow f(x) = \frac{x}{f^2(x) - f(x) + 1}$$

$$\text{Είναι } |f(x)| = \left| \frac{x}{f^2(x) - f(x) + 1} \right| = \frac{|x|}{f^2(x) - f(x) + 1} \leq \frac{|x|}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \cdot |x|$$

Διοτι το τριωνυμο $\varphi(y)$ εχει ελαχιστη τιμη $\frac{-\Delta}{4\alpha} = \frac{3}{4}$

$$\text{Αρα } -\frac{4}{3} \cdot |x| \leq f(x) \leq \frac{4}{3} \cdot |x|$$

Για $x = 0$ είναι $0 \leq f(0) \leq 0$ και $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{4}{3} \cdot |x| \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{3} \cdot |x| \right) = 0 \text{ αρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

Αρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

8. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ικανοποιεί τη σχέση:

$$x \cdot [x^2 \cdot f(x) - 5x + 1] \geq f(x) - 4, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να βρείτε το $f(1)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι συνεχής στο R θα είναι συνεχής και στο σημείο $x = 1$,
επομένως, $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Για κάθε $x \in R$ είναι :

$$\begin{aligned} x \cdot [x^2 \cdot f(x) - 5x + 1] &\geq f(x) - 4 \Leftrightarrow x^3 \cdot f(x) - 5x^2 + x \geq f(x) - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^3 - 1)f(x) \geq 5x^2 - x - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1)f(x) \geq (x - 1)(5x + 4) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Αν } x > 1 \text{ τότε } (1) \Leftrightarrow f(x) \geq \frac{(x-1)(5x+4)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{5x+4}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5x+4}{x^2+x+1} \Rightarrow f(1) \geq 3 \quad (2)$$

$$\text{Αν } x < 1 \text{ τότε } (1) \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{(x-1)(5x+4)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{5x+4}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x+4}{x^2+x+1} \Rightarrow f(1) \leq 3 \quad (3)$$

Από (2), (3) έχουμε $f(1) = 3$.

9. Να βρεθεί ο τύπος της συνεχούς συνάρτησης $f: [-5, +\infty) \rightarrow R$ για την

οποία ισχύει:

$$xf(x) = \sqrt{x+5} - f(x) - 2 \quad (1) \text{ για κάθε } x \in [-5, +\infty)$$

ΛΥΣΗ

Από την (1) για κάθε $x \in [-5, -1) \cup (-1, +\infty)$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}.$$

Εφ' όσον η f είναι συνεχής στο $[-5, +\infty)$, θα είναι και συνεχής στο $x_0 = -1$, δηλαδή θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \quad (2)$$

Για $x \in [-5, -1) \cup (-1, +\infty)$ είναι :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} = \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{x+5}+2} = \frac{1}{4} \quad \text{Αρα λόγω της (2)} \quad f(-1) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Αρα} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+5}+2} & , x \in [-5, -1) \cup (-1, +\infty) \\ \frac{1}{4} & , x = -1 \end{cases}$$

10. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε :

$$f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2xf(x) + 2g(x) \quad (1) \quad , \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ναδειχθεί ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

Αρκεί να δείξω ότι ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$.

Αφού η σχέση της εκφώνησης ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτω $x = 0$ και έχω ότι :

$$f^2(0) + g^2(0) + 1 = 2 \cdot 0 \cdot f(0) + 2g(0) \Rightarrow f^2(0) + [g(0) - 1]^2 = 0 \\ \Rightarrow f(0) = 0 \text{ και } g(0) = 1.$$

Αρα αρκεί να δείξω ότι ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$.

$$\text{Από (1)} \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 + g^2(x) - 2g(x) + 1 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x]^2 + [g(x) - 1]^2 = x^2 \text{ από όπου έχω :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{[f(x) - x]^2 + [g(x) - 1]^2\} = 0 \quad (2)$$

Από την (2) ΔΕΝ μπορώ να πω ότι κάθε κομμάτι του αθροίσματος είναι 0, διότι δεν υπάρχει σχετική πρόταση στην θεωρία! Γι' αυτό, ΠΡΩΤΑ πρέπει ν' αποδείξω τις παρακάτω προτάσεις και μετά να συνεχίσω απ' την (2) !

α) Θα δείξω ότι, αν για τις συναρτήσεις $\varphi(x), \psi(x)$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi^2(x) + \psi^2(x)] = 0, \text{ τότε είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi^2(x) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \psi^2(x) = 0$$

Αποδειξη

$$\text{Είναι } 0 \leq \varphi^2(x) \leq \varphi^2(x) + \psi^2(x)$$

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow x_0} [\varphi^2(x) + \psi^2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0 \text{ και από κριτήριο παρεμβολής θα}$$

$$\text{είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi^2(x) = 0. \text{ Ομοίως δείχνω ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} \psi^2(x) = 0.$$

β) Τώρα θα δείξω ότι, αν για την συνάρτηση $\varphi(x)$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi^2(x) = 0$

$$\text{τοτε } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0.$$

Αποδειξη

$$\text{Ισχύει ότι } -|\varphi(x)| \leq \varphi(x) \leq |\varphi(x)| \Rightarrow -\sqrt{\varphi^2(x)} \leq \varphi(x) \leq \sqrt{\varphi^2(x)}$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} (-\sqrt{\varphi^2(x)}) = 0 = \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{\varphi^2(x)} \text{ αρα από κρ. παρεμβολής έχω}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0.$$

Βάσει των παραπάνω προτάσεων, από την (2) έχω ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - x]^2 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} [g(x) - 1]^2 = 0 \text{ αρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - x] = 0, \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} [g(x) - 1] = 0$$

Στο πρώτο όριο θετω $h(x) = f(x) - x \Leftrightarrow f(x) = h(x) + x$ αρα και

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (h(x) + x) = 0 + 0 = 0 = f(0).$$

$$\text{Ομοίως } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 = g(0).$$

Αρα οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.

11. Για την συνάρτηση f ισχύει $f(x+y) = f(x)f(y)$ (1) για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\alpha \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο $\alpha \in \mathbb{R}$, οπότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$.

Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Αν θεσω $u = x - x_0 + \alpha$ τότε αν $x \rightarrow x_0$ το $u \rightarrow \alpha$.

Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow \alpha} f(u + x_0 - \alpha) = \lim_{u \rightarrow \alpha} f(u)f(x_0 - \alpha)$

Αρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\alpha)f(x_0 - \alpha) = f(\alpha + x_0 - \alpha) = f(x_0)$.

Αρα η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

12. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad , \text{για κάθε } x, y \in (0, +\infty).$$

α) Ναδειχθεί ότι $f(1) = 0$

β) Ναδειχθεί ότι $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ για κάθε $x > 0$.

γ) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, ναδειχθεί ότι είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Αφού η σχέση της εκφώνησης ισχύει για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$, θέτω $x = y = 1$ και έχω ότι $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

β) Αφού η σχέση της εκφώνησης ισχύει για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$, θέτω

$$y = \frac{1}{x} \text{ και έχω ότι } f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

γ) Θεωρώ τυχαίο $\alpha \in (0, +\infty)$ και θα δείξω ότι η f είναι συνεχής στο α , δηλαδή ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$

Στο όριο αυτό, θέτω $x = \alpha h$ αρα αν $x \rightarrow \alpha$ τότε $h \rightarrow 1$.

$$\text{Αρα } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 1} f(\alpha h) = \lim_{h \rightarrow 1} [f(\alpha) + f(h)]$$

Επειδη f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, $\lim_{h \rightarrow 1} f(h) = f(1) = 0$

Αρα $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ και f είναι συνεχής στο α .

13. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f : R \rightarrow R$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + x^2 - x - 2}{x - 3} = 5 \text{ . Αν η } f \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = 3, \text{ τότε:}$$

α) να υπολογίσετε το $f(3)$.

β) να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -3$.

γ) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)}{x - 3}$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδη η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$, τότε $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (1)

Στο οριο που δίνεται θετω $g(x) = \frac{f(x) + x^2 - x - 2}{x - 3}$ οποτε και είναι $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$.

$$f(x) + x^2 - x - 2 = g(x)(x - 3) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x - 3) - x^2 + x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} [g(x)(x - 3) - x^2 + x + 2] = -4 \text{ .}$$

Αρα λογω της (1) εχω ότι $f(3) = -4$.

β) Αρκει να δειξω ότι $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$.

αφου η f είναι περιττη $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in R$ οποτε

$$\text{για } x = 3 \text{ εχουμε } f(-3) = -f(3) \Leftrightarrow f(-3) = 4 \text{ .}$$

$$\text{είναι } f(x) = -f(-x) \text{ αρα } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -4 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} [-f(-x)] = -4$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(-x) = 4 \text{ . Θετω } -x = y \text{ όταν } x \rightarrow 3 \text{ το } y \rightarrow -3 \text{ αρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(-x) = \lim_{y \rightarrow -3} f(y) = 4 \text{ και } \lim_{y \rightarrow -3} f(y) = f(-3) \text{ .}$$

$$\gamma) l = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)}{x-3} \Rightarrow l = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left[f(x) \cdot \frac{1}{x-3} \right] .$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -4$ και $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$ διότι $x \rightarrow 3^+$ αρα $x - 3 > 0$

Επομένως $l = -\infty$.

$$14. \text{ Έστω η συνάρτηση } f : R \rightarrow R \text{ με } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 9} = 7 \quad (1)$$

(α) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση f στο $x_0=3$

(β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής $x_0=3$, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(x) - 3f(3)}{\sqrt{x+6} - 3}$$

ΛΥΣΗ

$$(α) \text{ Έστω } g(x) = \frac{f(x) + x^2}{x^2 - 9} \text{ τότε } \begin{cases} f(x) = (x^2 - 9)g(x) - x^2 & \text{με } x \neq \pm 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 7 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)g(x) - \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = (3^2 - 9) \cdot 7 - 3^2 = -9$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -9$ οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις

- Αν $f(3) \neq -9$ τότε $(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$ και κατά συνέπεια η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 3$
- Αν $f(3) = -9$ τότε $(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ και κατά συνέπεια η f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$

$$(β) \text{ Από υπόθεση έχουμε } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = -9 \quad (3)$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{xf(x) - 3f(3)}{\sqrt{x+6} - 3} \stackrel{(2),(α)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x[(x^2 - 9)g(x) - x^2] - 3(-9)}{\sqrt{x+6} - 3} \stackrel{0/0}{=} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[x(x-3)(x+3)g(x) - (x-3)(x^2 + 3x + 9)](\sqrt{x+6} + 3)}{(\sqrt{x+6} - 3)(\sqrt{x+6} + 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)[x(x+3)g(x) - (x-3)(x^2 + 3x + 9)](\sqrt{x+6} + 3)}{x-3} = 27$$

15. Έστω οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$(f(x))^{2004} + (g(x))^{2004} = (x\eta\mu x)^{2004} \quad (1) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = g(0) = 0$ και ότι οι f, g είναι συνεχείς

στο $\mathbb{R}$

(β) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - f(x)\eta\mu^2 x}{x^2 + \eta\mu^2 x}$$

ΛΥΣΗ

(α) Στη σχέση (1) θέτουμε $x=0$ και προκύπτει $(f(0))^{2004} + (g(0))^{2004} = 0$

οπότε $f(0) = g(0) = 0$ (2)

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται

$$\begin{cases} (f(x))^{2004} \leq (f(x))^{2004} + (g(x))^{2004} = (x\eta\mu x)^{2004} \\ (g(x))^{2004} \leq (f(x))^{2004} + (g(x))^{2004} = (x\eta\mu x)^{2004} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |f(x)| \leq |x\eta\mu x| \\ |g(x)| \leq |x\eta\mu x| \end{cases} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -|x\eta\mu x| \leq f(x) \leq |x\eta\mu x| \\ -|x\eta\mu x| \leq g(x) \leq |x\eta\mu x| \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 0} (-|x\eta\mu x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x\eta\mu x| = 0$$

Οπότε λόγω της (4) από Κριτήριο Παρεμβολής θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \stackrel{(2)}{=} f(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \stackrel{(2)}{=} g(0)$$

Κατά συνέπεια οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$.

(β) Από τις σχέσεις (3) προκύπτουν ισοδύναμα για $x \neq 0$ οι

$$\begin{cases} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq |\eta\mu x| \\ \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq |\eta\mu x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -|\eta\mu x| \leq \frac{f(x)}{x} \leq |\eta\mu x| \\ -|\eta\mu x| \leq \frac{g(x)}{x} \leq |\eta\mu x| \end{cases} \quad (5)$$

$$\text{Όμως } \lim_{x \rightarrow 1} (-|\eta \mu x|) = \lim_{x \rightarrow 1} |\eta \mu x| = 0$$

Οπότε λόγω της (5) από Κριτήριο Παρεμβολής θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 0$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - f(x)\eta\mu^2 x}{x^2 + \eta\mu^2 x} = \left\langle \text{διαφορούμε με } x^2 \right\rangle = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}}{1 + \left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^2} = 0$$

Ασκήσεις στο θεώρημα Bolzano-Θ.Ε.Τ- Θ.Μ.Ε.Τ

Ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια , τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$ όταν :
 - i) $f(x) = 2x^3 + 3x - 1$
 - ii) $f(x) = (x - 1)2^{x-1} + \ln(x + 1)$

2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα , τουλάχιστον , $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, αν
 - i) $f(x) = x^3 - 3x + 1$
 - ii) $f(x) = \ln(x + 1) + x - 1$
 - iii) $f(x) = e^{x-1} + x - 1$
 - iv) $f(x) = \eta\mu x + 2x - 2$

3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων τέμνουν τον άξονα x' σε ένα τουλάχιστον σημείο x_0 με $x_0 \in (0,2)$
 - i) $f(x) = e^{x-1} - 2$
 - ii) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - x + 2$

4. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον , ρίζα στο $(-1,0)$
 - i) $(x + 1)2^{x+1} = 1$
 - ii) $2 \ln(x + 2) + \eta\mu(\pi x) = 1$

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $3x^3 + \alpha^2 x + \alpha + 2 = 0$ έχει μια τουλάχιστον , ρίζα στο $(-1,1)$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - (\kappa\lambda - 2)x + 1 = 0$, έχει μια , τουλάχιστον , ρίζα στο $(-1,0)$ όταν $\kappa+\lambda=2$

7. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ,
 - i) $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε : $2\eta\mu x_0 - 3\sigma\upsilon\nu x_0 = -2$
 - ii) $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε : $\xi \ln \xi = 1 - \ln \xi$
 - iii) $\gamma \in (0,2)$ τέτοιο ώστε : $2\gamma - 2 = \eta\mu \alpha\gamma$

8. Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα Δ , όταν :
 - i) $\frac{x^4 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 2} = 0$ και $\Delta = (1,2)$
 - ii) $\eta\mu x = \frac{x}{x^2 - 1}$ και $\Delta = (-1,1)$

$$iii) \frac{\eta\mu x}{x-1} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x-3} = 1 \text{ και } \Delta = (0, \pi)$$

9. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{2^x}{x+1} + \frac{3^x}{x-2} = 2010$$

Έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-1, 2)$

10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$f(x) + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} = 0 \text{ έχει μια τουλάχιστον λύση στο } (-1, 2)$$

11. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ώστε

$$f(x_0) + \eta\mu x_0 = \frac{4x_0}{\pi}$$

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\eta\mu x) = \eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $[0, \frac{\pi}{2}]$

Μοναδική λύση

13. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$

14. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 2 - x$ έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$, η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \ln x + x - 2$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα μόνο σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(1, e)$

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Να δείξετε ότι :

- i) Η f είναι γνησίως αύξουσα
- ii) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$

17. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x - 1$. Να δείξετε ότι :

- i) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
 ii) Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

18. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\chi + \eta\mu\chi = 2$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

19. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^5 + 2 = 4\chi^2$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο $(-1, 1)$

20. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\chi^2 - \sigma\upsilon\nu\chi = \chi\eta\mu^2\chi$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

21. Θεωρούμε την εξίσωση :

$$\frac{\alpha}{\chi} + \frac{\beta}{\chi - 2} + \frac{\gamma}{\chi + 2} = 0, \text{ με } \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο $(-2, 2)$

22. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση :

$$\frac{e^x}{x-1} + \frac{x^2+1}{x-2} + \frac{\eta\mu\chi+2}{x-3} = 0$$

Έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες

23. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 \leq f(x) \leq 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu\chi_0) = \eta\mu\chi_0$

24. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha \leq f(x) \leq \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = \frac{\alpha\beta}{\chi_0}$

25. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $4 < f(x) < 5$ για κάθε $\chi \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 5f(x) + 4x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

26. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $\chi \in [1, 2]$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + x = 1 + xf(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

27. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < f(x) \leq 3$ για κάθε $\chi \in [0, 3]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $\xi \in [0, 3)$ τέτοιο ώστε $f^2(\xi) = 3f(\xi) - \xi$

28. Έστω $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0)=f(\alpha)$ και η συνάρτηση $h(x) = f\left(\frac{\alpha}{2} + x\right) - f(x)$

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της h και να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$

- ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[0, \frac{\alpha}{2}\right]$
- iii) Να δείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της C_f με μήκος $\frac{\alpha}{2}$

Πρόσημο συνάρτησης

29. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x - 1$ ως προς το πρόσημο στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
30. Να μελετήσετε ως προς το πρόσημο τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{2} \cdot \eta\mu x$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
31. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2)=1$ και 1 και 4 διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} |(1 + f(3))x^3 - 2x + 3|$

Εύρεση τύπου της f

32. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [-3,3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 + f^2(x) = 9$ για κάθε $x \in [-3,3]$
- i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$
- ii) Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $M(0,3)$ να βρείτε τον τύπο της f
33. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) - 2xf(x) = 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(2,-1)$.
- i) Να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii) Να βρείτε τον τύπο της f
- iii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
34. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in [-2,2]$.
- i) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$
- ii) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(-2,2)$
- iii) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f;

iv) Αν $f(1) = -\sqrt{3}$ να βρείτε τον τύπο της f

Σύνολο τιμών

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \ln(9-x)$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{x} - \ln(9-x) = e$ έχει ακριβώς μια λύση

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x} - \ln x$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x σε ένα ακριβώς σημείο

38. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων :

i) $f(x) = 3x - 1, x \in [0,2]$

ii) $f(x) = -2x + 1, x \in [-1,2]$

iii) $f(x) = \ln x + 2e^x, x \in (0,1]$

iv) $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x, x \in (0, \pi)$

v) $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$

vi) $f(x) = e^{-x} - \ln x$

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x - 1$

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\ln x_0 + e^{x_0} = 1$

Θ.Ε.Τ και Θ.Μ.Ε.Τ

40. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [2,5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in [2,5]$ τέτοιο ώστε :

$$10f(x_0) = 7f(3) + 3f(4)$$

41. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: (1,5) \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (1,5)$ τέτοιο ώστε :

$$10f(\xi) = 3f(2) + 2f(3) + 5f(4)$$

42. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Αν είναι $f(0)=2$ και $f(1)=4$ να αποδείξετε ότι:

- i) Η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη

$$x_0 \in (0,1)$$

- ii) Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :

$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

1.9 Γενικές Ασκήσεις Στις Συναρτήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3.$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

4. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την

τιμή 2011.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x + 2^x < 1$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x=1$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

7. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x+4)] = +\infty$$

8. Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: [1, 5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1,8)$ και $B(5,12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$

11. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:
 $f(f(x)) + f(x) = 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για και $f(1) = 3$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$

iv. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi + \chi}{f(f(x)) + f(x) - 3}$

12. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(\chi - 1)}{\chi^2 - 1} = 2$$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{\chi^2 - 1}$

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

ii. Να βρείτε την συνάρτηση f αν ισχύει: $(f \circ g)(x) = x$.

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

15. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2,-1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = 2x^4 + 3 \ln x + 1$.

a. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

b. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

g. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x)=a$ έχει μοναδική ρίζα.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο

ισχύει: $\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iv. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

18. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x + 1) = 3$.

iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x + 5) \leq 0$.

19. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3,3]$ για την οποία ισχύει $3x^2 + 4f^2(x) = 27$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$.

iii. Να βρεθεί ο τύπος της f .

iv. Αν επιπλέον $f(1) = 6$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

20. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \quad \text{για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \eta \mu \frac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$.

i. Να βρείτε το $f(5)$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$.

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = a^{2x} + 2a^x + 1$ για κάθε

$$x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$$

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0) = -2$ να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}, \alpha < 2$$

iv. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}, \alpha > 3$$

23. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - \xi = 0$

24. i. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xg(x) + 2 \leq 2\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x) + 2f^3(x) = 4x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

ii. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} , αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.

iv. Να λυθεί η εξίσωση: $f(2e^{x-1}) = f(3 - x)$

26. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f \circ f \circ g$

27. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa\eta\mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

- Να βρείτε τα κ, λ .
- Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

28. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

και η $g: \mathbb{R} - \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5 \text{ και } g(x+3) = g(x) + f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- Το κ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
- Το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

29. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3 \ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$

- Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3 \ln 4\mu - 3 \ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2+1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

30. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x-1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf(x) \geq \sigma\eta\nu x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός, να βρεθούν:

i. Το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)+4\eta\mu x+3x}{2x+3\eta\mu x}$

iii. Το $\lim_{x \rightarrow 0} [f(-x) + f(3x)]$ και

iv. Ο τύπος της f αν αυτή είναι συνεχής.

32. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\kappa \eta\mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - \lambda$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **(1)** και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f .

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\eta\nu x}$

33. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=k$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$.

1.10 Ερωτήσεις Σωστού – Λάθους

Να χαρακτηρήσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος

1)Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$ δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ	Σ	Λ
2)Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0	Σ	Λ
3)Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0	Σ	Λ
4)Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	Σ	Λ
5)Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$	Σ	Λ
6)Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της	Σ	Λ
7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$	Σ	Λ
8)Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$	Σ	Λ
9)Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$	Σ	Λ
10) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0	Σ	Λ
11)Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο (α, β) , τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή	Σ	Λ
12)Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$	Σ	Λ
13) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $\chi_{O\gamma}$ και $\chi'_{O\gamma'}$.	Σ	Λ
14)Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μια ακριβώς λύση ως προς y	Σ	Λ

16) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$	Σ	Λ
17) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0	Σ	Λ
18) Ισχύει ότι $ \eta\mu x \leq x $ για κάθε $x \in \mathbb{R}$	Σ	Λ
19) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$	Σ	Λ
20) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα	Σ	Λ
21) Κάθε συνάρτηση 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη	Σ	Λ
22) Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$	Σ	Λ
23) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$	Σ	Λ
24) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ'ανάγκη $f(\beta) > 0$	Σ	Λ
25) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε κατ'ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Σ	Λ
26) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία $y=x$, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}	Σ	Λ
27) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$	Σ	Λ

Διαφορικός Λογισμός

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2.1 Παράγωγος συνάρτησης σε σημείο x_0

Ορισμός: ονομάζουμε παράγωγο της συνάρτησης f στο x_0 και συμβολίζουμε $f'(x_0)$ το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός

Παρατήρηση:

1. Αν στην (1) θέσουμε $x = x_0 + h \Leftrightarrow x - x_0 = h$ τότε έχουμε :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2. Όμοια αν $x - x_0 = \Delta x$ τότε

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

3. την $f'(x_0)$ την συμβολίζουμε και με $\frac{df(x_0)}{dx}$ ή $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$

4. Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει αν υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα

5. Το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f

6. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$\eta: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$

7. Για να εξετάσω ως προς την παραγωγισιμότητα μια συνάρτηση στο x_0 εξετάζω πρώτα αν είναι συνεχής στο x_0 (και μόνο αν βγεί συνεχής συνεχίζω)

Θεώρημα: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε θα είναι και συνεχής στο σημείο αυτό (το αντίστροφο δεν ισχύει)

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$ έχουμε :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0)(x_0 - x_0) = 0\end{aligned}$$

άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

επομένως η f είναι συνεχής στο x_0

- Το αντίστροφο δεν ισχύει (αντιπαράδειγμα)

Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ενώ είναι συνεχής στο 0

δεν είναι παραγωγίσιμη αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$$

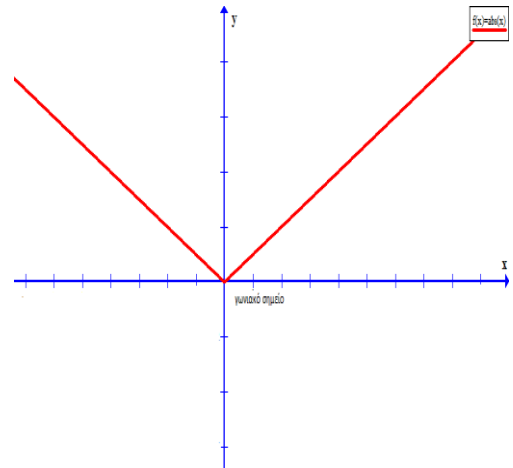
Η f είναι συνεχής στο 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{άρα η } f \text{ δεν είναι παραγωγίσιμη στο } 0$$

Άρα :

$$\begin{aligned} \eta f \text{ παραγωγίσιμη} &\Rightarrow \eta f \text{ είναι συνεχής} \\ \eta f \text{ είναι συνεχής} &\xrightarrow{\text{δεν γνωρίζω}} \eta f \text{ είναι παραγωγίσιμη} \end{aligned}$$



παραδείγματα:

1. (1/219/σ.β) Να βρεθούν οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων

i) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 0$ ii) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$ iii) $f(x) = \eta\mu^2 x$, $x_0 = 0$

Λύση:

i) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$

ii) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{(x - 1)x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x - 1)x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1 - x}{x^2} = -2$

iii) $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \cdot \eta\mu x \right) = 1 \cdot 0 = 0$

2. (2/220/σ.β) Να εξετάσετε ως προς την παραγωγισιμότητα τις παρακάτω συναρτήσεις

i) $f(x) = x|x|$ ii) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}$ iii) $f(x) = |x^2 - 3x|$

Λύση:

i) $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

Εξετάζω ως προς τη συνέχεια στο 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0

Εξετάζω ως προς τη παραγωγισιμότητα στο 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

Και $f'(0) = 0$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ -x + 1, & x < 1 \end{cases}$$

Εξετάζω ως προς τη συνέχεια στο 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 1) = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 1

Εξετάζω ως προς τη παραγωγισιμότητα στο 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x + 1}{x - 1} = -1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1

$$\text{iii)} \quad f(x) = |x^2 - 3x|$$

$$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$x^2 - 3x$		$+$	$-$	$+$

Άρα

$$f(x) = |x^2 - 3x| = \begin{cases} -x^2 + 3x, & \text{άν } x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty) \\ x^2 - 3x, & \text{άν } x \in [0, 3] \end{cases}$$

Εξετάζω ως προς τη συνέχεια στο 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3x) = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0

Εξετάζω ως προς τη παραγωγισιμότητα στο 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x + 1}{x - 1} = -1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

Εξετάζω ως προς τη συνέχεια στο 3

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 3x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 3x) = 0$$

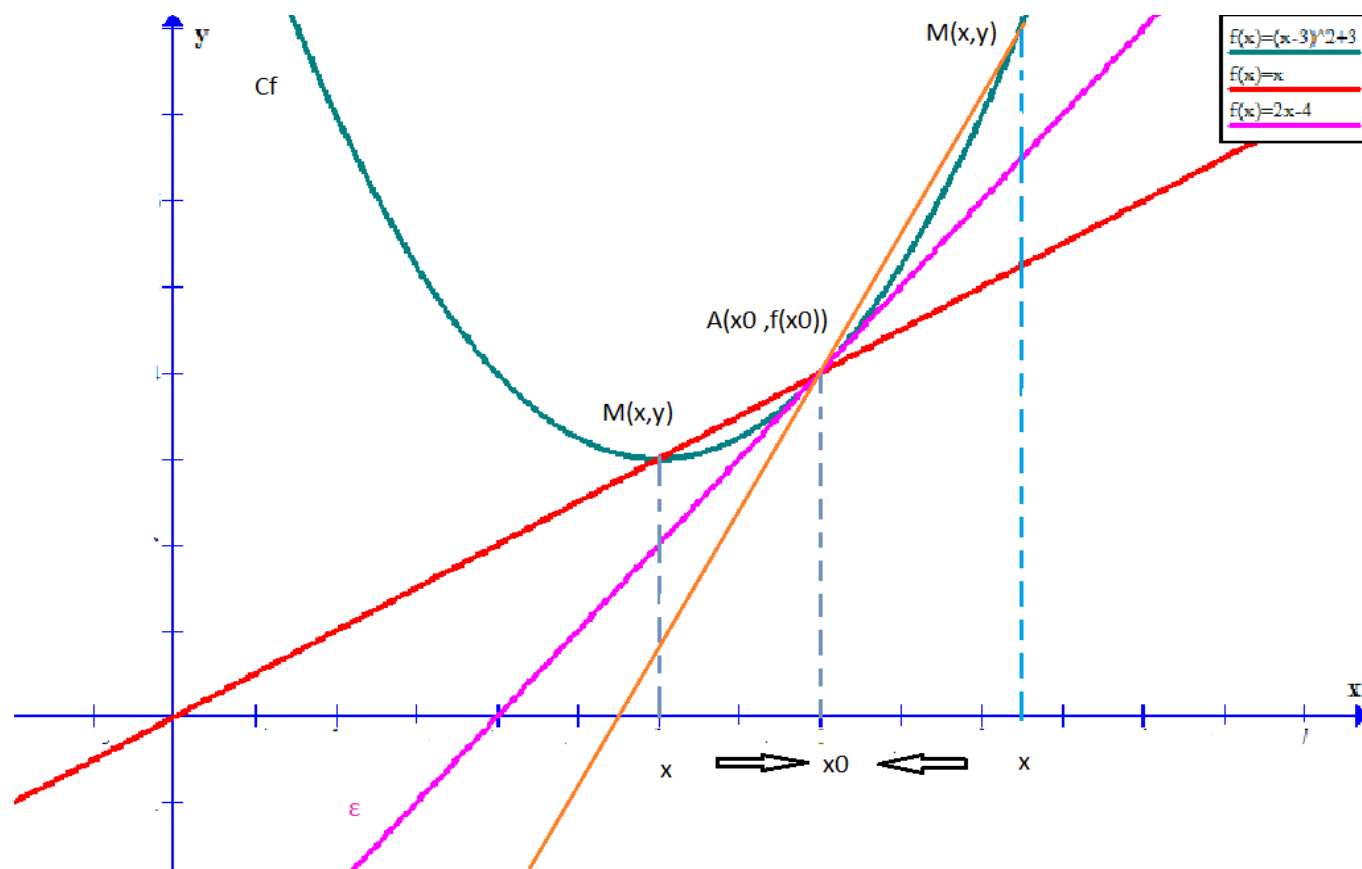
Άρα η f είναι συνεχής στο 3

Εξετάζω ως προς την παραγωγισιμότητα στο 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x - 3)}{x - 3} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x^2 + 3x}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-x(x - 3)}{x - 3} = -3 \end{aligned}$$

2.2 Εφαπτομένη γραφικής παράστασης συνάρτησης



Έχουμε ότι

$$\lambda_{AM} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (x \neq x_0)$$

Όταν το x τείνει στο x_0^+ ή x_0^- τότε η ΑΜ παίρνει μια «οριακή» θέση η οποία είναι η ευθεία ε και λέγεται εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α

Η ε θα έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ορισμός: έστω η συνάρτηση f και $A(x_0, f(x_0)) \in C_f$. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda \in \mathbb{R}$

(δηλαδή αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0) τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο Α την ευθεία που περνάει από το Α και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ .

Δηλαδή: $\varepsilon: y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$

$$\text{ή } y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ασκήσεις στον ορισμό της παραγώγου

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να βρείτε τις $f'(1)$ και $f'(-2)$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x+3}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη
3. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x + \eta\mu x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρεθεί η $f'(0)$

4. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3} - 4, & \text{αν } x \geq 1 \\ x^2 - x - 2, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι :

- i. Η f είναι συνεχής στο 1
 - ii. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x+2| - 3x + 1$
Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο -2

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & \text{αν } x < 0 \\ x - \eta\mu x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο 0

7. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$

8. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x - 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x^2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \text{η οποία είναι συνεχής στο 1.}$$

- i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathcal{R}$
 - ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1
9. (ΘΕΜΑ 2006) Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda x - 3, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x - \lambda, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \text{η οποία είναι συνεχής στο 1}$$

- i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathcal{R}$
- ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1

10. (ΘΕΜΑ 2006) Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & \text{άν } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & \text{άν } x > 1 \end{cases}$$

- i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathcal{R}$ για την οποία η f είναι συνεχής στο 1
- ii. Για $\lambda=0$ να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1

11. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{άν } x \geq 2 \\ x^2 + ax + \alpha, & \text{άν } x < 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο 2

12. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{άν } x \leq -2 \\ 3x^2 + 5x - \alpha, & \text{άν } x > -2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο -2

13. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x^2 - (\alpha + 1)x + 2\beta + 4, & \text{άν } x > 1 \\ x^2 + ax + \beta, & \text{άν } x \leq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο 1

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$2x - 3x^2 \leq f(x) \leq 2x + x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathcal{R}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$

15. (ΘΕΜΑ 2001) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4 \text{ για κάθε } x \in \mathcal{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(0) = 2$
- ii. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$
- iii. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=3$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{R}$$

- i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathcal{R}$ και ισχύει ότι $f'(x_0) = 4x_0 + 3$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + 8x \cdot \eta\mu x \cdot f(x) = x \cdot \eta\mu^2 3x \text{ για κάθε } x \in \mathcal{R}$$

Να βρείτε :

- i. Το $f(0)$
- ii. Το $f'(0)$

18. (ΘΕΜΑ 2005) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$$

a. Να αποδείξετε ότι:

- i. $f(0)=0$
- ii. $f'(0)=1$

b. Να βρείτε το $\lambda \in \mathcal{R}$ έτσι ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$$

19. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2 - x}{x^2 - 2x} = 2$$

- i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$
- iii. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ συνεχής στο 0 για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu 3x}{x^2 - x} = 2$$

- i. Να βρείτε την τιμή $f(0)$
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την $f'(0)$
- iii. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta\mu x \cdot \eta\mu 5x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(2)=3$ και $f'(2)=4$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 2x} \quad ii. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4} \quad iii. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1 - x^2}{x - 2} \quad iv. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$$

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x - 2} = -1$$

- i. Να βρείτε την τιμή $f(2)$
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την $f'(2)$
- iii. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - \sqrt{4x+12}}{x^2 - 1}$$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathcal{R}$. Να αποδείξετε ότι :

$$i. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{h} = \lambda \cdot f'(x_0), \quad \lambda \neq 0$$

$$ii. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5h) - f(x_0 + 4h)}{h} = f'(x_0)$$

2.3 Παράγωγος συνάρτηση

ορισμός:

- (1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο A όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$
 (2) Η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$
 (3) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και επιπλέον ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \in \mathbb{R}$$

Ορισμός παραγώγου : Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη . αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στην $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f': A_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f'(x)$$

Η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f και , συμβολίζεται $\frac{df}{dx}$ που διαβάζεται 'ντε εφ προς ντε χι' ή αλλιώς $f'(x)$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων:

7. Να αποδειχθεί ότι αν $f(x)=c$ τότε $f'(x)=0$

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

Άρα $f' = 0$

8. Να αποδειχθεί ότι αν $f(x)=x$ τότε $f'(x)=1$

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$ τότε :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Άρα $f'(x)=1$

9. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=nx^{n-1}$

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$ τότε :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = \nu x_0^{\nu-1}\end{aligned}$$

Άρα $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Απόδειξη :

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$ τότε:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Άρα : $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

11. Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x$

Απόδειξη :

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$ ισχύει :

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(x+h) - \eta\mu x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \sigma\upsilon\nu h + \eta\mu h \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\eta\mu x \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} + \sigma\upsilon\nu x \cdot \frac{\eta\mu h}{h} \right] = \eta\mu x \cdot 0 + \sigma\upsilon\nu x \cdot 1 = \sigma\upsilon\nu x\end{aligned}$$

επειδή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu h - 1)}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu h}{h} = 0$$

Δηλαδή: $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

12. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\eta\mu x$

Απόδειξη :

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h - \eta \mu h \sin x - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \cdot \frac{(\cos h - 1)}{h} - \eta \mu x \cdot \frac{\eta \mu h}{h} \right] = \sin x \cdot 0 - \eta \mu x \cdot 1 = -\eta \mu x \end{aligned}$$

Δηλαδή: $(\sin x)' = -\eta \mu x$

Συνάρτηση	παράγωγος		Συνάρτηση	Παράγωγος
C	0			
X	1			
x^a	ax^{a-1}		$f^a(x)$	$af^{a-1}(x)f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$		$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$
$\ln x $	$\frac{1}{x}$		$\ln f(x) $	$\frac{f'(x)}{f(x)}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$		$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
e^x	e^x		$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
Ημx	συνx		ημ(f(x))	f'(x)συν(f(x))
Συνx	-ημx		συν(f(x))	-f'(x)ημ(f(x))
Εφx	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$		εφf(x)	$\frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)}$
Σφx	$-\frac{1}{\eta\mu^2 x}$		σφf(x)	$-\frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)}$
a^x	$a^x \ln a$		$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \ln a f'(x)$

Κανόνες παραγώγισης:

1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$

Απόδειξη :

Για $x \neq x_0$ ισχύει :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)\end{aligned}$$

2. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει :

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Απόδειξη :

Για $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\end{aligned}$$

Κανόνες παραγώγισης

$$1. (f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$2. (cf)'(x) = cf'(x)$$

$$3. (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$4. \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$5. (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Η παράγωγος της εφαπτομένης και της συνεφαπτομένης

$$(\varepsilon\varphi\chi)' = \left(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)' = \frac{(\eta\mu\chi)' \cdot \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi \cdot (\sigma\upsilon\nu\chi)'}{(\sigma\upsilon\nu\chi)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

Όμοια

$$(\sigma\varphi\chi)' = -\frac{1}{\eta\mu^2\chi}$$

Ασκήσεις στους κανόνες παραγώγισης

1. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 7$

ii. $f(x) = e^x + 2x^3 - \ln x$

iii. $f(x) = \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + \frac{x^3}{3}$

iv. $f(x) = \frac{x^4}{2} - 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}$

v. $f(x) = \varepsilon\varphi x - \sigma\varphi x$

vi. $f(t) = x^3 - 4x^2 + \ln x - \sigma\upsilon\nu t$

2. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x \cdot \ln x$

ii. $f(x) = (x^3 - 3x^2)e^x$

iii. $f(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)e^x$

iv. $f(x) = 2x^3 \cdot \ln x$

v. $f(x) = e^t \cdot x^3$

3. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^3 \cdot \eta\mu x + 3x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu x$

ii. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2x \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$

iii. $f(x) = x^2 \cdot \ln x - \frac{x^2}{2} + e^2$

iv. $f(x) = x^2 \cdot e^x + e^x - \eta\mu\theta$

v. $f(t) = x^3 \cdot \ln x + e^x \cdot \sqrt{t} - t \cdot \eta\mu t$

4. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \eta\mu x$

ii. $f(x) = xe^x \cdot \ln x - e^x$

iii. $f(x) = x^2 \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$

iv. $f(x) = x \cdot e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$

5. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

ii. $f(x) = \frac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$

iii. $f(x) = \frac{3x^2-2x}{e^x}$

iv. $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$

v. $f(x) = \frac{xe^x}{x+2}$

vi. $f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{e^x}$

6. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 + x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Να βρείτε την παράγωγο της f

7. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} e^x(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x), & \text{αν } x \geq 0 \\ x - \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x, & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

i. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 0.

ii. Να βρείτε την παράγωγο της f

8. Να βρείτε την παράγωγο των επόμενων συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^2 + |x - 2|$

ii. $f(x) = |x| \cdot x^2$

iii. $f(x) = 2x + |x^2 - 1|$

iv. $f(x) = 2x^2 - |x^2 - 2x - 3|$

v. $f(x) = x^2 - |x + 2| + |1 - x|$

9. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^3 + 2\alpha x^2 - x + 4, & \text{αν } x > 2 \end{cases}, \text{ η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε:}$$

i. Την τιμή του $\alpha \in \mathcal{R}$

ii. Την παράγωγο της f

10. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^3 e^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

11. (ΘΕΜΑ 2003) Δίνεται η επόμενη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} -x + a, & \text{αν } x \leq -\frac{4}{3} \\ 2x + 1, & \text{αν } x > -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Η οποία είναι συνεχής .

i. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathcal{R}$

ii. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -\frac{4}{3}$

iii. Για $x \neq -\frac{4}{3}$ να βρείτε την $f'(x)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f'(x) = \frac{1}{2}$

12. Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

ii. $f(x) = x^2(2\ln x - 1)$

iii. $f(x) = (1 - x)\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi$

iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu\chi + \chi \cdot \eta\mu\chi$

2.4 Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης :

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Λύση:

$$f'(x) = (\sqrt{x^2 + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Παράγωγοι συναρτήσεων (οι αποδείξεις τους βασίζονται στην παράγωγο σύνθετης συνάρτησης)

1. Να αποδείξετε ότι $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}, x > 0$

Απόδειξη:

$$\text{Έχουμε } f'(x) = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} (\alpha \ln x)' = x^\alpha \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

2. Να αποδείξετε ότι: $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0$

Απόδειξη:

$$\text{Έχουμε } f'(x) = (a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a$$

3. Να αποδείξετε ότι: $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$

Απόδειξη:

Πράγματι

- Αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ
- Αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε τότε $(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x}$

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$

- a. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται
- b. Να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$

Λύση:

- a. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$
Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει ότι :

- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3$ (1)
- $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2x_1 < 2x_2$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη

$$x_1^3 + 2x_1 < x_2^3 + 2x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα οπότε } 1 < 2$$

b. Για κάθε $x \in \mathcal{R}$ ισχύει $(f^{-1}(f(x)))' = x$ οπότε

$$(f^{-1}(f(x)))' = (x)' \Leftrightarrow (f^{-1})'(x) \cdot f'(x) = 1, \text{ από την παραπάνω σχέση για } x=1$$

έχουμε :

$$(f^{-1})'(f(1)) \cdot f'(1) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) \cdot 5 = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{5}$$

Ασκήσεις στις παραγώγους σύνθετων συναρτήσεων:

Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

1. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$i) f(x) = (x^3 + 5x^2 - 1)^4 \quad ii) f(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 - 1} \quad iii) f(x) = e^{x^2 - 3x}$$

$$iv) f(x) = \sqrt{2x^2 + 1} \quad v) f(x) = 2^{\sin x} \quad vi) f(x) = \ln(x^4 + e^x)$$

2. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$i) f(x) = e^{x^4} \quad ii) f(x) = \varepsilon\varphi 3x \quad iii) f(x) = \sqrt{\eta\mu x}, x \in (0, +\infty)$$

$$iv) f(x) = e^{\sigma\varphi x} \quad v) f(x) = x^3 + 3^x + \sqrt[3]{x} + \alpha^{\sqrt{3}}$$

3. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \eta\mu\sqrt{x}, x \geq 0 \quad ii) f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x \quad iii) f(x) = \sigma\upsilon\nu x^2 \quad iv) f(x) = \eta\mu^2 x^3$$

4. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$i) f(x) = e^{\sqrt{\varepsilon\varphi x}}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad ii) f(x) = \sigma\upsilon\nu(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \quad iii) f(x) = \eta\mu\sqrt{\eta\mu\sqrt{x}}$$

5. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

$$i) f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x \cdot \eta\mu 5x \quad ii) f(x) = e^{2x} \cdot \eta\mu 3x \quad iii) f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^3 \cdot e^x) \quad iv) f(x) = e^{x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$$

6. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2 3x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$$

- a. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$

- b. Την παράγωγο της f

8. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

$$i) f(x) = (x^2 + x)^x \quad ii) f(x) = (\eta\mu x)^x, x \in (0, \pi) \quad iii) f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad iv) f(x) = (\ln x)^x \quad v) f(x) = x^{\eta\mu^2 x}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Να βρείτε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\eta\mu 3x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x) \cdot \eta\mu x)$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^3(2x^2)$. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^5}$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 2^x)$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)$

12. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :

$$i) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad ii) f(x) = \ln\left(\eta\mu \frac{x}{2}\right) \text{ με } x \in (0, \pi) \quad iii) f(x) = e^{4x} \cdot \eta\mu 3x$$

13. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu 3x, & x < 0 \\ 3x \cdot \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να βρείτε την $f''(x)$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu x}$

ii) Να βρείτε την $f^{(3)}(x)$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(\ln x)$. Να αποδείξετε ότι : $x^2 \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) + f(x) = 0$

Συναρτησιακές σχέσεις

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2\sqrt{f(xy)}, \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty). \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

$$f'(x) - f'(y) = -\frac{y-x}{\sqrt{f(xy)}} \cdot f'(xy)$$

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(xy) = yf(x) + xf(y) \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty)$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$ ισχύει ότι :

$$f'(x) - f'(y) = \frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}$$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$

a. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

b. Να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και 1-1, με $f(2)=2$ και $f'(2)=1$

a. Να βρείτε την $(f^{-1})'(2)$

b. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f^3(x) + 2f(x) - 8$

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1

ii) Να βρείτε τη $(g^{-1})'(4)$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, με $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

a. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

b. Να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sin x$ με $x \in (0, \pi)$.

a. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

b. Να βρείτε την $(f^{-1})'(x)$

2.5 Το πρόβλημα της εφαπτόμενης

1^η κατηγορία:

Να βρεθεί η εφαπτομένη της $f(x) = e^x$ στο σημείο $A(0,1)$

Λύση :

Το σημείο $A(0,1)$ είναι σημείο της f άρα το σημείο A είναι το σημείο επαφής

Μεθοδολογία:

δίνεται το σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$
τότε η εφαπτομένη είναι η

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$$

2^η κατηγορία :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x + 6$, να βρεθεί η

εφαπτομένη της C_f σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- Που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=2$
- Που είναι παράλληλη στην $y=-2x+4$
- Που είναι κάθετη στην η: $y = \frac{1}{4}x + 3$
- Που είναι παράλληλη στον άξονα x'

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

$$\varepsilon \parallel x'x \Leftrightarrow \lambda = f'(x_0) = 0$$

Λύση:

$$f'(x) = 2x + 4$$

- $f'(x_0) = 2 \Rightarrow 2x_0 + 4 = 2 \Rightarrow x_0 = -1$
Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(-1, f(-1))$
 $f(-1) = 3$
 $y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$
 $y - 3 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 5$
- $\lambda = -2$
 $f'(x_0) = -2 \Rightarrow 2x_0 + 4 = -2 \Rightarrow x_0 = -3$
Άρα το σημείο επαφής είναι το $A(-3, f(-3))$
 $f(-3) = 3$

Μεθοδολογία :

Όταν μας δίνεται με οποιονδήποτε τρόπο ο συντελεστής διεύθυνσης

Βρίσκουμε το σημείο επαφής από τη σχέση $\lambda = f'(x_0) = \varepsilon_{\text{φω}}$

Και ακολουθούμε τα προηγούμενα βήματα

$$\begin{aligned}
 y - f(-3) &= f'(-3)(x + 3) \\
 y - 3 &= -2(x + 3) \Rightarrow y = -2x - 3 \\
 \text{iii)} \quad \lambda_\eta &= \frac{1}{4} \\
 \varepsilon \perp \eta &\Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -4 \\
 f'(x_0) &= -4 \Rightarrow 2x_0 + 4 = -4 \Rightarrow x_0 = -4 \\
 \text{Άρα το σημείο επαφής είναι το } A(-4, f(-4)) \\
 f(-4) &= 6 \\
 y - f(-4) &= f'(-4)(x + 4) \\
 y - 6 &= -4(x + 4) \Rightarrow y = -4x - 10 \\
 \\
 \text{iv)} \quad f'(x_0) &= 0 \Rightarrow 2x_0 + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -2 \\
 \text{Άρα το σημείο επαφής είναι το } A(-2, f(-2)) \\
 f(-2) &= 2 \\
 y - f(-2) &= f'(-2)(x + 2) \\
 y - 2 &= 0(x + 4) \Rightarrow y = -2
 \end{aligned}$$

3^η κατηγορία:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(-3, -10)$

Λύση:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 2x + 6 \\
 y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0)
 \end{aligned}$$

Το σημείο A δεν επαληθεύει την C_f άρα

δεν είναι το σημείο επαφής

$$-10 - (x_0^2 + 6x_0) = (2x_0 + 6)(-3 - x_0)$$

$$x_0^2 + 6x_0 + 8 = 0$$

$$x_0 = -2 \quad \text{ή} \quad x_0 = -4$$

Οπότε έχουμε δύο σημεία επαφής

$$A(-2, -8) \quad B(-4, -8)$$

$$f'(-2) = 2$$

Μεθοδολογία:

Όταν το σημείο $A(\alpha, \beta)$ δεν είναι το σημείο επαφής τότε αντικαθιστώ στην εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

λύνω την

$$\beta - f(x_0) = f'(x_0)(\alpha - x_0)$$

Και βρίσκω τα σημεία επαφής

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(-2,-8)$ είναι:

$$y - f(-2) = f'(-2)(x + 2) \Rightarrow y + 8 = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x - 4$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\beta(-4,-8)$ είναι:

$$y - f(-4) = f'(-4)(x + 4) \Rightarrow y + 8 = -2(x + 4) \Rightarrow y = -2x - 16$$

4η κατηγορία: (συνθήκες για να εφάπτεται μια ευθεία στην C_f)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y=10x-9$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(2, f(2))$

i) Να βρεθούν οι τιμές των α, β

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3x+2$ εφάπτεται στη C_f

Λύση:

i) Το σημείο $M(2, f(2))$ ανήκει και στην C_f και στην εφαπτομένη

$$\text{άρα για } x = 2 \Rightarrow y = 11$$

$$\text{Άρα } f(2) = 11 \Rightarrow 8 + 4\alpha + 2\beta + 3 = 11 \Rightarrow 4\alpha + 2\beta = 0 \quad (1)$$

$$\text{Και } f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta \xrightarrow{f'(2)=10} 12 + 4\alpha + \beta = 10 \Rightarrow 4\alpha + \beta = -2 \quad (2)$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \beta = 2 \text{ άρα } \alpha = -1$$

ii) Για $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ ο τύπος της f είναι: $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$ και

$$f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$$

η ευθεία $y=3x+2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(x_1, f(x_1))$ όταν

$$\begin{cases} f(x_1) = 3x_1 + 2 \\ f'(x_1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 - x_1^2 + 2x_1 + 3 = 3x_1 + 2 \\ 3x_1^2 - 2x_1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^3 - x_1^2 - x_1 + 1 = 0 \\ x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Άρα η ευθεία $y=3x+2$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(1, f(1))$

5η κατηγορία (κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2$ και $g(x) = x^2 + 2\beta x + \alpha$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Λύση:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2$ έχει πεδίο ορισμού $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} + 2\beta x$$

η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 2\beta x + \alpha$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

Μεθοδολογία

Η ευθεία $(\varepsilon): y = \alpha x + \beta$

Εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ αν και μόνο αν ισχύουν

$$\begin{cases} f(x_0) = \alpha x_0 + \beta \\ f'(x_0) = \alpha \end{cases}$$

Μεθοδολογία:

Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $M(x_0, f(x_0))$ αν και μόνο αν ισχύουν

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x + 2\beta$$

Οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη 1, όταν

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 + 2\beta + \alpha \\ \alpha + 2\beta = 2 + 2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

6^η κατηγορία (κοινή εφαπτομένη σε μη κοινό τους σημείο)

Να βρείτε τις κοινές εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ και } g(x) = x^2 + x + 4$$

Λύση:

Οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x - 3 \text{ και } g'(x) = 2x + 1$$

Βρίσκω τα κοινά τους σημεία

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = x^2 + x + 4 \Leftrightarrow x = 0$$

- εξετάζω αν έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $M(0,4)$

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ -3 = 1 \end{cases} \text{ αδύνατο}$$

Άρα δεν έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο

- Εξετάζω αν έχουν κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία

Έστω ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Rightarrow y = f'(\alpha)x - f'(\alpha)\alpha + f(\alpha)$$

Έστω ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $N(\beta, g(\beta))$

$$y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Rightarrow y = g'(\beta)x - g'(\beta)\beta + g(\beta)$$

για να συμπίπτουν οι ε_1 με την ε_2 πρέπει

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -f'(\alpha)\alpha + f(\alpha) = -g'(\beta)\beta + g(\beta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 3 = 2\beta + 1 \\ -(2\alpha - 3)\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -(2\beta + 1)\beta + \beta^2 + \beta + 4 \end{cases}$$

Μεθοδολογία :

Κοινή εφαπτομένη σε διαφορετικά σημεία

Η εξίσωση της εφ της C_f στο $M(\alpha, f(\alpha))$

$$y = f'(\alpha)x - f'(\alpha)\alpha + f(\alpha)$$

Η εξίσωση της εφ της C_g στο $N(\beta, g(\beta))$

$$y = g'(\beta)x - g'(\beta)\beta + g(\beta)$$

Για να παριστάνουν την ίδια ευθεία πρέπει:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ -f'(\alpha)\alpha + f(\alpha) = -g'(\beta)\beta + g(\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ -2\alpha^2 + 3\alpha + \alpha^2 - 3\alpha + 4 = -2\beta^2 - \beta + \beta^2 + \beta + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha^2 = \beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ (\beta + 2)^2 = \beta^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Οπότε τα σημεία επαφής είναι τα $M(1,2)$ και $N(-1,4)$

Και η κοινή εφαπτομένη είναι $y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 3$

Ασκήσεις στην εξίσωση εφαπτομένης :

Εφαπτομένη στο σημείο επαφής $A(x_0, f(x_0))$

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 9$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$
3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2 - 5x + 4}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & \text{αν } x \leq -2 \\ 2x^2 + 3x + 6, & \text{αν } x > -2 \end{cases}$. Να βρείτε αν υπάρχει, την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(-2, f(-2))$
6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + |x - 3|$. Να εξετάσετε αν ορίζετε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 12 \ln x$ με $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο της $A(2, f'(2))$
8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^3 + 2\alpha x^2 - x + 4, & \text{αν } x > 2 \end{cases}, \quad \text{όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$
 - i) Να βρείτε την τιμή του α
 - ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$
9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2\alpha x + 2\beta - 5, & \text{αν } x > 1 \end{cases}, \quad \text{όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 5$ και η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = x + 7$. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζετε από την ευθεία (ε) και τις εφαπτομένες της C_f στα σημεία τομής της με την (ε)
11. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2x^2 - 3x + 1 \leq f(x) \leq 3x^2 - 9x + 10$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $M(3, f(3))$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση

12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) - 2f(x) = 4x$ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , στο σημείο $A(1, f(1))$

Εφαπτομένη με γνωστή κλίση

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$, με $x \neq 2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που έχουν συντελεστή διεύθυνσης -2
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x-2)^4$. Να βρείτε
- Το πεδίο ορισμού της f
 - Την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): 10x-2y+5=0$
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{4}{x}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): 3y+x-7=0$
16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^{x^2-4x}$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που είναι παράλληλες στον $\chi\chi$
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \ln x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που σχηματίζει με τον $\chi\chi$ γωνία 45°
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 5$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f που σχηματίζει με τον $\chi\chi$ γωνία 135°
19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία:
- Έχει συντελεστή διεύθυνσης 3
 - Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y=5x-7$
 - Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x-7y+2014=0$
 - Είναι παράλληλη στον άξονα $\chi\chi$
 - Σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $\chi\chi$
 - Σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $\chi\chi$
20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, -10)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -3. Να βρείτε:
- Τους αριθμούς α και β

- ii) Τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): 48x - 2y - 2015 = 0$
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 2$ με $\alpha \in \mathbb{R}$, και έστω M το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$. Η εφαπτομένη της C_f στο M σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° . Να βρείτε:
- i) Τον αριθμό α
- ii) Την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): 2x - 10y + 30 = 0$
22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 5$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 Η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον $x'x$, να βρείτε
- i) Την τιμή του λ και την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ)
- ii) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): 9x - y + 2015 = 0$
23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 - 7x + 5$, $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία της $M(1, f(1))$ και $N(-3, f(-3))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Να βρείτε:
- i) Τον αριθμό α
- ii) Τις εφαπτομένες της C_f που είναι κάθετες στην ευθεία $(\zeta): x - 7y + 2014 = 0$

Εφαπτομένη που διέρχεται από γνωστό σημείο

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από τα σημεία:
- i) $A(1, 6)$
- ii) $B(2, -1)$
- iii) $\Gamma(3, 4)$
25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{7-2x}{3-x}$. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, 0)$
26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \alpha x + 6$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(4, f(4))$ είναι κάθετη στην ευθεία $(\zeta): 2x + 6y - 2015 = 0$. Να βρείτε:
- i) Την τιμή του α
- ii) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(3, -1)$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x+\alpha}{x+1}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): $4x+y-5=0$. Να βρείτε:
- Τον αριθμό α
 - Τις εξισώσεις των εφαπτομένων που διέρχονται από το σημείο $A(-2,1)$
28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$, με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(-1,6)$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $5x+y-7=0$. Να βρείτε :
- Τους αριθμούς β και γ
 - Τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(4,5)$
29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f , που διέρχονται από το σημείο $K(3,-4)$
 - Έστω A και B τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτόμενων με τη γραφική παράσταση της f . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία AB .

Ευθεία που εφάπτεται στη C_f

30. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=-3x+6$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 5x + 7$
31. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=-5x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$
32. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x-2y=0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$
33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ με $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(-1, f(-1))$ έχει εξίσωση $y=-4x+7$.
- Να βρείτε τους αριθμούς β και γ
 - Να αποδείξετε ότι και η ευθεία $y=2x+4$ εφάπτεται στη C_f
34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 3$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y=-3x-1$. Να βρείτε
- τους αριθμούς α και β
 - Τις εφαπτομένες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία (ζ): $12x-2y+2014=0$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + a \ln x + 3$ με $a \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(2, f(2))$ είναι παράλληλη στον $x'x$
- Να βρείτε τον αριθμό a
 - Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = -6x + 10$ εφάπτεται στη C_f

Κοινές εφαπτομένες δυο καμπυλών σε κοινό τους σημείο

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 - 7x + 7$ και $g(x) = x^2 - 3x + 3$ να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g στο κοινό τους σημείο, έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
37. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 3x + 4$ και $g(x) = 3(x^2 - x)$ σε ένα κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση
38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - \ln x$ και $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g εφάπτονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο κοινό τους σημείο
39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 4$ και $g(x) = x^2 + \beta x$ με $a, \beta \in \mathbb{R}$. Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία τους $A(1, f(1))$ και $B(1, g(1))$ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο $\Gamma(\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$
- Να βρείτε τους αριθμούς a και β
 - Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες C_f και C_g σε ένα κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
40. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -2x^2 + ax$ και $g(x) = -x^2 + (a - 4)x + 4$ με $a \in \mathbb{R}$. Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία τους $A(1, f(1))$ και $B(1, g(1))$ αντίστοιχα, είναι μεταξύ τους κάθετες
- Να βρείτε τον αριθμό a
 - Να αποδείξετε ότι οι καμπύλες C_f και C_g σε ένα κοινό τους σημείο έχουν κοινή εφαπτομένη της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Κοινές εφαπτομένες δυο καμπυλών σε μη κοινό τους σημείο

41. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 2$ και $g(x) = x^2 - 5x + 6$ να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g

42. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{1-x} + 2$ και $g(x) = 2 - \ln(x - 1)$ και τα σημεία $A(1, f(1))$ και $B(2, g(2))$ των γραφικών τους παραστάσεων. Να αποδείξετε ότι η ευθεία AB εφάπτεται των C_f και C_g στα σημεία A και B .
43. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \alpha x^2 - x + 2$ και $g(x) = x^2 - (\alpha + 1)x + 3$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.
Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $A(-1, f(-1))$ και $B(-1, g(-1))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, να βρείτε :
- Τον αριθμό α
 - Τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g
44. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x^2 + \alpha x + 4$ και $g(x) = x^2 + (2\alpha - 1)x + 16$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.
Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $A(3, f(3))$ και $B(5, g(5))$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, να βρείτε :
- Τον αριθμό α
 - Την κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g

2.6 Ρυθμός μεταβολής

Ορισμός: έστω x, y δύο μεταβλητά μεγέθη τέτοια ώστε $y=f(x)$ όπου f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο x_0 την $f'(x_0)$

Σημείωση:

1. Ο λόγος
$$\frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

Λέγεται μέση ταχύτητα ενός κινητού το χρονικό διάστημα $[t_0, t]$ όπου $S(t)$ η συνάρτηση θέσης του κινητού ως προς το χρόνο t

2.
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0) = u(t_0)$$

Λέγεται στιγμιαία ταχύτητα του κινητού ή ρυθμός μεταβολής του S ως προς t τη χρονική στιγμή t_0

3. Όμοια
$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} = u'(t_0) = a(t_0)$$

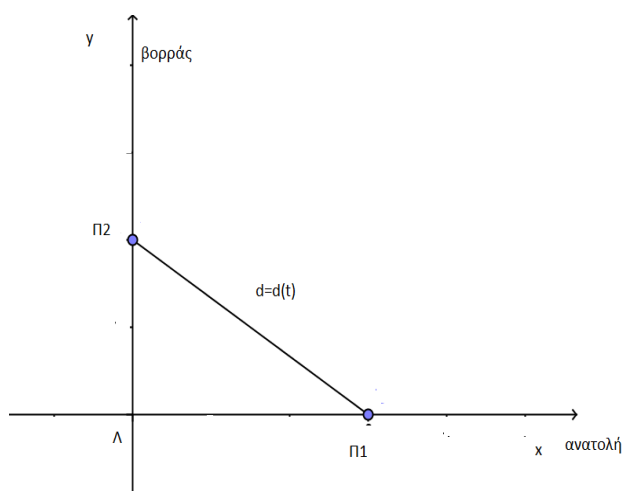
Λέγεται επιτάχυνση του κινητού

Βασικά παραδείγματα

Άσκηση 4 σελ 243

Δύο πλοία Π_1 και Π_2 αναχωρούν συγχρόνως από ένα λιμάνι Λ . Το πλοίο Π_1 κινείται ανατολικά με ταχύτητα 15km/h και το Π_2 βόρεια με ταχύτητα 20km/h

- i. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των Π_1 και Π_2
- ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση των δύο πλοίων $d=(\Pi_1\Pi_2)$ των δύο πλοίων αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε

Λύση:

i. έστω ότι η συνάρτηση θέσης του Π1 είναι

$$S_1 = S_1(t) \text{ Τότε } S_1'(t) = u_1(t) = 15$$

$$\text{άρα } S_1(t) = 15t + c$$

$$\text{για } t=0 \text{ έχουμε } S_1(0) = 15 \cdot 0 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{άρα } S_1(t) = 15t$$

$$\text{όμοια } S_2(t) = 20t$$

ii. Από πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $d^2(t) =$

$$S_1^2(t) + S_2^2(t) \text{ ή } d^2(t) = 225t^2 + 400t^2 = 625t^2$$

$$\text{άρα } d(t) = 25t$$

ο ρυθμός με τον οποίο αυξάνεται η απόσταση είναι: $d'(t) = 25 \text{ km/h}$ **Άσκηση 1/ σελ 244**

Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $10 \text{ cm}^2/\text{sec}$, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται ο όγκος αυτής όταν $r=85 \text{ cm}$

Λύση:

$$E'(t)=10$$

$$r(t)=85$$

$$V'(t)=?$$

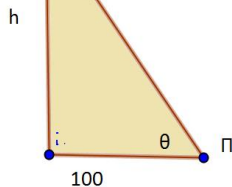
$$E(t)=4\pi r^2(t) \Rightarrow E'(t) = 8\pi r(t)r'(t) \Rightarrow 10 = 8\pi 85r'(t) \Rightarrow r'(t) = \frac{1}{68\pi}$$

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \Rightarrow V'(t) = \frac{4}{3}\pi 3r^2(t)r'(t) = \frac{4}{3}\pi 3 \cdot 85^2 \cdot \frac{1}{68\pi} = 425 \text{ cm}^3/\text{sec}$$

Άσκηση 4/ σελ 244

Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50 m/min . Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100m

Λύση:



$$h'(t) = 50$$

$$h(t) = 100$$

$$\theta'(t) = ?$$

$$\varepsilon\phi\theta(t) = \frac{h(t)}{100} \Rightarrow \frac{\theta'(t)}{\sin^2(\theta(t))} = \frac{h'(t)}{100}$$

$$\text{Όταν } h(t) = 100 \Rightarrow \theta(t) = 45 \Rightarrow \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

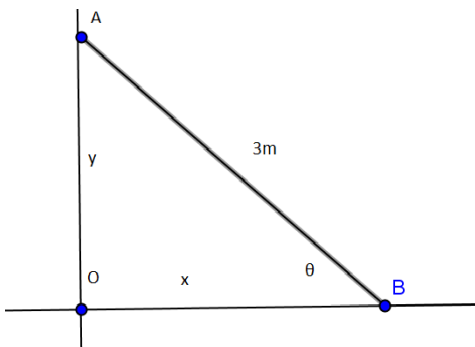
$$\text{Άρα } \frac{\theta'(t)}{\frac{1}{2}} = \frac{50}{100} \Rightarrow \theta'(t) = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 7/ σελίδα 245

Μια σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0 , που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

- Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ
- Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας

Λύση:



$$\text{i. } x'(t_0) = 0,1, y(t_0) = 2,5$$

Από πυθαγόρειο θεώρημα τη δεδομένη χρονική στιγμή έχω

$$x(t_0) = \sqrt{2,75}$$

$$\sin\theta(t) = \frac{x(t)}{3} \Rightarrow -\eta\mu\theta(t) \cdot \theta'(t) = \frac{x'(t)}{3} \Rightarrow$$

$$-\frac{y(t)}{3} \cdot \theta'(t) = \frac{0,1}{3} \Rightarrow -2,5\theta'(t) = 0,1$$

$$\Rightarrow \theta'(t) = -0,04 \text{ rad/sec}$$

$$\text{ii. } x^2(t) + y^2(t) = 9 \Rightarrow 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0 \Rightarrow \text{για } t = t_0 \text{ έχουμε}$$

$$2x(t_0)x'(t_0) + 2y(t_0)y'(t_0) = 0 \Rightarrow y'(t_0) = -\frac{\sqrt{2,75}}{25}$$

Ασκήσεις στον ρυθμό μεταβολής

Ευθύγραμμη κίνηση

1. Η θέση $x(t)$ ενός υλικού σημείου που κινείται σε έναν άξονα, δίνεται από τη σχέση :

$$x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 18t \text{ όπου } t \in \mathbb{R}, \text{ ο χρόνος σε s.}$$
 - a. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του υλικού σημείου τη χρονική στιγμή $t=2s$.
 - b. Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο.
 - c. Να βρείτε σε ποια χρονικά διαστήματα το σημείο κινείται προς τη θετική κατεύθυνση και σε ποια προς την αρνητική κατεύθυνση
 - d. Να βρείτε το ολικό διάστημα που διένυσε το υλικό σημείο κατά τα 4 πρώτα δευτερόλεπτα τις κίνησης του
2. Δύο ποδηλάτες Π_1 , Π_2 ξεκινούν ταυτόχρονα τη στιγμή $t_0=0$ από το σημείο O. Ο ποδηλάτης Π_1 κινείται ανατολικά με σταθερή ταχύτητα 30 km/h ενώ ο ποδηλάτης Π_2 κινείται βόρεια με ταχύτητα 40km/h. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $\Pi_1\Pi_2$ των ποδηλατών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό

Περίμετρος - εμβαδόν – όγκος

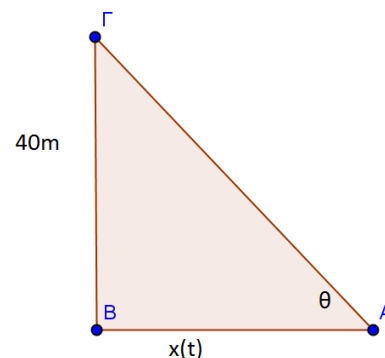
3. Η ακτίνα του κύκλου αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :
 - a. Της περιμέτρου του κύκλου
 - b. Του εμβαδού του κύκλου τη στιγμή που η ακτίνα του είναι 25cm
4. Η πλευρά $a(t)$ (σε cm) τη χρονική στιγμή $t > 0$ (σε sec) ενός τετραγώνου δίνεται απ τη σχέση

$$a(t) = t^2 + 2t + 3$$
 Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραγώνου , τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 11cm
5. Το μήκος ενός ορθογωνίου μειώνεται με ρυθμό 1cm/sec και το πλάτος του αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec . κάποια χρονική στιγμή t_0 το μήκος του είναι 8cm και το πλάτος του είναι 6cm . Τη χρονική στιγμή t_0 , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:
 - a. Της περιμέτρου του ορθογωνίου
 - b. Του εμβαδού του ορθογωνίου
 - c. Της διαγωνίου του ορθογωνίου
6. Η πλευρά ενός ισόπλευρου τριγώνου αυξάνεται με ρυθμό 4m/min . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου , τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 12 cm
7. Η ακμή ενός κύβου αυξάνεται με ρυθμό 3cm/sec . τη χρονική στιγμή που η ακμή είναι 10 cm , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :
 - a. Του όγκου του κύβου

- b. Του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας του κύβου
8. Η ακτίνα μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό $2,5\text{mm/sec}$. τη χρονική στιγμή που η ακτίνα είναι 4cm , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής
- a. Του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας
- b. Του όγκου της σφαίρας
9. Η ακτίνα μιας σφαίρας μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη συνάρτηση $r(t) = t^2 + 1, t > 0$
- Κάποια χρονική στιγμή t_0 ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας είναι $32\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Να βρείτε :
- a. Τη χρονική στιγμή t_0
- b. Τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_0

Ρυθμός μεταβολής της γωνίας ενός τριγώνου

10. Ένας άντρας πλησιάζει ένα κτίριο ύψους 40m με ταχύτητα 2m/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \widehat{BAT}$ τη χρονική στιγμή που ο άνδρας απέχει 30m από τη βάση του κτιρίου.

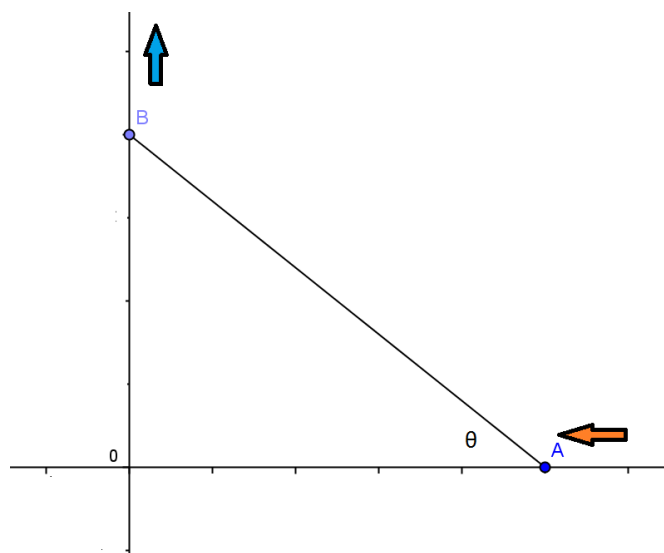


11. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\widehat{A} = 90^\circ$, έχει σταθερή υποτείνουσα $B\Gamma = 10\text{cm}$. Η πλευρά AB αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2cm/s . Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πλευρά AB είναι 8cm , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής :
- i. Πλευράς $A\Gamma$
- ii. Του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$
- iii. Της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$

12. Δύο αυτοκίνητα κινούνται σε δύο κάθετους δρόμους Ox και Oy όπως φαίνεται στο

διπλανό σχήμα. Το αυτοκίνητο A κινείται προς το O με ταχύτητα 20km/h και το αυτοκίνητο B απομακρύνεται από το O με ταχύτητα 50km/h . Τη χρονική στιγμή που τα αυτοκίνητα A και B απέχουν από το O 12 και 5 km αντίστοιχα, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- Της απόστασης των δύο αυτοκινήτων
- Της γωνίας $\widehat{OAB}$



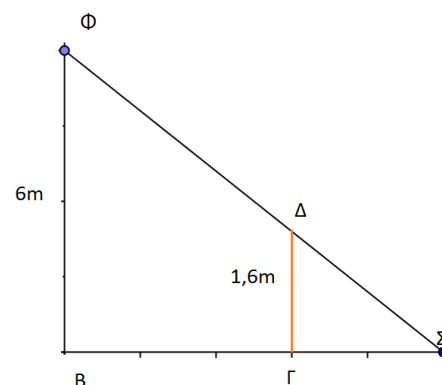
13. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $\widehat{A} = 90^\circ$

, η πλευρά AB αυξάνεται με ρυθμό 6cm/s και η πλευρά $A\Gamma$ μειώνεται με ρυθμό 4 cm/s . Τη χρονική στιγμή που είναι $AB=16\text{cm}$ και $A\Gamma=12\text{cm}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

- Του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$
- Της περιμέτρου του τριγώνου $AB\Gamma$
- Της γωνίας $\widehat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$

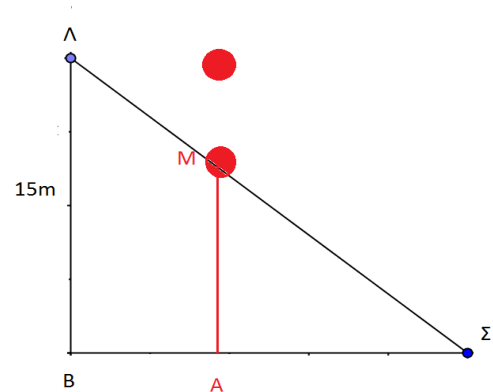
Ρυθμός μεταβολής και όμοια τρίγωνα

14. Μια γυναίκα ύψους $1,6\text{m}$ πλησιάζει προς τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 6m με ταχύτητα $1,1\text{m/s}$. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του μήκους της σκιάς της γυναίκας



15. Μια λάμπα (Λ) ανάβει στην κορυφή ενός φανοστάτη ύψους 15m . Από ύψος 15 m και σε απόσταση 10 m από τον φανοστάτη αφήνουμε να πέσει μια μπάλα (M), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

Να βρείτε πόσο γρήγορα κινείται η σκιά της μπάλας 0,5 s από τη στιγμή που αφήσαμε τη μπάλα να πέσει. (Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$)



Κίνηση σε καμπύλη

16. Ένα κινητό M κινείται πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y = \frac{x^3+2}{6}$
- Τη χρονική στιγμή που το κινητό βρίσκεται στο σημείο A(-2,-1), η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες / s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης της τεταγμένης του κινητού τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο A
 - Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού είναι πάντα θετικός. Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι οκταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης
17. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων O και κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2 + 2x$ έτσι, ώστε η τετμημένη του x να αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες / s. Η προβολή του σημείου M πάνω στον άξονα x'x είναι το σημείο A.
- Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM, όταν το σημείο M έχει τετμημένη ίση με $\frac{1}{2}$
 - Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του M
18. Ένα σώμα κινείται πάνω στην παραβολή με εξίσωση $y = \frac{3x^2}{32}$. Τη χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο A(8,6), η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό 4 μονάδες / s. Στη χρονική στιγμή αυτή να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής :
- Της τεταγμένης του σώματος
 - Της απόστασης του σώματος από την αρχή των αξόνων
19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$. Ένα σώμα κινείται πάνω στη C_f . Όταν το σώμα περνάει από το σημείο A στο οποίο η εφαπτομένη της C_f τέμνει τον άξονα γ'γ στο -1, τότε η

τετμημένη του σώματος αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες /s . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σώματος όταν αυτό διέρχεται από το σημείο A

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{4}$

- i. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της A(6,f(6))
- ii. Ένα σώμα κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f. Τη χρονική στιγμή που το σώμα βρίσκεται στο σημείο A(6,f(6)) , η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 4 μονάδες /s . Στη χρονική στιγμή αυτή να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής
 - Της τεταγμένης του σώματος
 - Της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα x'x η εφαπτομένη της C_f στο σημείο που βρίσκεται το σώμα

2.7 Θεώρημα Rolle και θεώρημα μέσης τιμής (Θ.μ.τ)

Θεώρημα Rolle

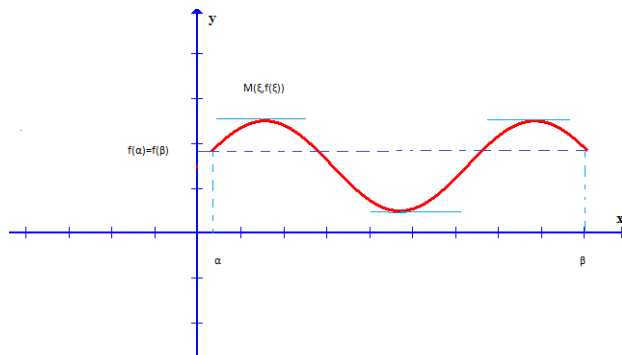
Αν μια συνάρτηση f είναι :

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$
- Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$
- $f(α)=f(β)$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο
ώστε :
 $f'(ξ)=0$

γεωμετρική ερμηνεία :

γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(ξ, f(ξ))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$



Παράδειγμα :

Να εφαρμοστεί το θεώρημα rolle για την $f(x)=x^2 - 2x + 1$ στο $[0,2]$

Λύση:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 1$

- Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$
- $f(0)=1$ και $f(2)=1$

άρα υπάρχει $ξ ∈ (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0 \Rightarrow 2ξ - 2 = 0 \Rightarrow ξ = 1$

Θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού (Θ.Μ.Τ)

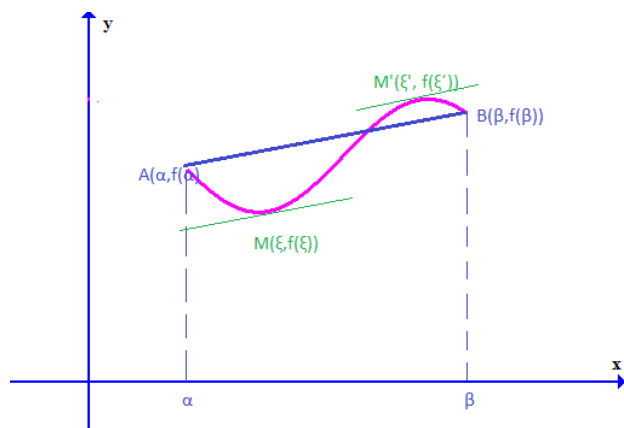
Αν μια συνάρτηση f είναι :

- Συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α,β]$
 - Παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(α,β)$
- τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(ξ) = \frac{f(β)-f(α)}{β-α}$$

γεωμετρική ερμηνεία :

γεωμετρικά αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(ξ, f(ξ))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB



Παράδειγμα :

Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x$ στο $[0,4]$

Λύση:

- Η f είναι συνεχής στο $[0,4]$
 - Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,4)$
- Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{24}{4} = 6$$

$$2\xi + 2 = 6 \Rightarrow \xi = 2$$

Αντιπαραγωγήση:

Είναι η εύρεση μιας αρχικής ή παράγουσας συνάρτησης

Π.χ

$$f(x) = 3x^2 + 4x + 6$$

Ψάχνω να βρώ , μια συνάρτηση από την παραγωγήση της οποίας έχει προέλθει η f

$$F(x) = x^3 + 2x^2 + 6x$$

Παράγουσες βασικών συναρτήσεων

Συνάρτηση f	Παράγουσα F
1. 0	C
2. 1	$x+c$
3. x^α , $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
4. $\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
5. e^x	$e^x + c$
6. $\sin x$	$-\cos x + c$
7. $\cos x$	$\sin x + c$
8. $\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + c$
9. $\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + c$

$$10. a^x \qquad \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$11. \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad 2\sqrt{x} + c$$

$$12. \frac{1}{x^2} \qquad -\frac{1}{x} + c$$

Πίνακας παραγουσών σύνθετων συναρτήσεων

Συνάρτηση f

Παράγουσα F

$$1. \frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad -\frac{1}{g(x)} + c$$

$$2. \frac{g'(x)}{\sqrt{g(x)}} \qquad 2\sqrt{g(x)} + c$$

$$3. \frac{g'(x)}{g(x)} \qquad \ln(g(x)) + c$$

$$4. g^a(x) \cdot g'(x) \qquad \frac{(g(x))^{a+1}}{a+1} + c$$

$$5. e^{g(x)} \cdot g'(x) \qquad e^{g(x)} + c$$

Βασικό παράδειγμα :

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(15) = f(3) + 8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (3, 15)$, διαφορετικά ανά δύο ώστε :

$$f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = 4$$

Λύση:

Βρίσκω το πλάτος του διαστήματος $15 - 3 = 12$

Βρίσκω το άθροισμα των συντελεστών $1+2+3=6$

Και το χωρίζω σε 3 υποδιαστήματα με μήκη

$$\frac{1}{6}12 = 2$$

$$\frac{2}{6}12 = 4$$

$$\frac{3}{6}12 = 6$$

Αντίστοιχα

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο διάστημα [3,5]

♥ Η f είναι συνεχής στο $[3,5]$

♥ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(3,5)$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (3,5)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(5)-f(3)}{5-3} = \frac{f(5)-f(3)}{2}$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο διάστημα [5,9]

♥ Η f είναι συνεχής στο $[5,9]$

♥ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(5,9)$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (5,9)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(9)-f(5)}{9-5} = \frac{f(9)-f(5)}{4}$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο διάστημα [6,12]

♥ Η f είναι συνεχής στο $[9,15]$

♥ Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(9,15)$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_3 \in (9,15)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_3) = \frac{f(15)-f(9)}{12-6} = \frac{f(15)-f(9)}{6}$

Επομένως :

$$f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) + 3f'(\xi_3) = \frac{f(5)-f(3)}{2} + 2\frac{f(9)-f(5)}{4} + 3\frac{f(15)-f(9)}{6} = \frac{f(15)-f(3)}{2}$$

$$= \frac{8}{2}$$

Ασκήσεις στο Θεώρημα Rolle

Βασικές εφαρμογές στο θεώρημα Rolle

1. Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$

i. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $[-2, 0]$

ii. $f(x) = \ln(x + 1)$, $[0, 1]$

iii. $f(x) = 1 + \eta\mu 3x$, $[0, \pi]$

iv. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$, $[0, 2]$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & x < 1 \\ -8x^2 + 20x - 9, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 2]$ και να βρείτε το σημείο $A(\xi, 0)$, $\xi \in (0, 2)$, όπου η C_f τέμνει τον x'

3. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ , ώστε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις, να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα Δ

i. $f(x) = 2\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + (\beta^2 + 1)x + \gamma$ και $\Delta = [0, 1]$

ii. $f(x) = \begin{cases} 4\alpha x + 2\beta, & x \leq 1 \\ x^2 - 4\gamma x + 1, & x > 1 \end{cases}$ και $\Delta = [-3, 3]$

iii. $f(x) = \begin{cases} \alpha x - 1, & x \leq 2 \\ x^2 - \beta x + \gamma, & x > 2 \end{cases}$ και $\Delta = [-2, 6]$

4. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- i. Να δείξετε ότι για την f ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον, $\xi \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο ώστε $\sigma\varphi \frac{1}{\xi} = 2\xi$
5. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0, \pi]$, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και $f(0) + f(\pi) = 0$
- i. Να δείξετε ότι για τη συνάρτηση $g(x) = f(x)\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f'(\xi)\sigma\varphi \xi$

Ύπαρξη ρίζας της $f'(x) = 0$ με γνωστή f

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ln(x + 1)$. Να αποδείξετε ότι:
- Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$
 - Η εξίσωση $(x + 1)^{x+1} = e^{1-x}$ έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\sin x$. Να αποδείξετε ότι :
- Υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $x = x_0$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
 - Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 1 - x + \sigma\phi x$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$
8. (θέμα εξετάσεων) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και ισχύει $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + x)\sin x$
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,1)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1,2)$
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x + 1)\sin x = (x^2 + x)\eta\mu x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2,2)$
10. Αν η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει τρεις ρίζες πραγματικές και άνισες ανά δύο να δείξετε ότι $\alpha^2 > 3\beta$.
11. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι 1-1, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$
12. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$
13. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(\alpha) = 0$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

Αντιπαραγωγή

14. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις να είναι ισοδύναμη με την $g'(x) = 0$

- i. $3x^2 + 2\alpha x + \beta + f'(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
 - ii. $x^2 + \frac{2}{x} + \sigma\upsilon\nu x + f'(x) = 0, x > 0$
 - iii. $(3x - 2)f'(x) + 3f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
 - iv. $f'(x) = f(x) \cdot \varepsilon\varphi x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
 - v. $f'(x) = f^2(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x, f(x) \neq 0, x \in \mathbb{R}$
 - vi. $f'(x) + f(x) = 0$
 - vii. $f'(x) + 2xf(x) = 0, x > 0$
 - viii. $f'(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$
 - ix. $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)} = -1, x \in \mathbb{R}$
15. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $4x^3 - 4x - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1,0)$.
 16. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $4x^3 - 3\alpha x^2 = 2(\alpha + 8)x - 4\alpha$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-2,2)$
 17. Να αποδείξετε ότι η επόμενη εξίσωση : $4x^3 + 3(\alpha + 1)x^2 - 2(\beta + 3)x - 3\alpha + \beta - 5 = 0$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-1,2)$
 18. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) - f(0) = e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x) - 2x = e^x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$
 19. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x) - \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
 20. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [2,4] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) - f(2) = \ln 2$.
Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $xf'(x) = 2x^2 - 6x + 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(2,4)$
 21. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 3$ και $f(2) = 6$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2\xi$
 22. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, με $f(2) - f(0) = 6$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3\xi^2 - \xi$
 23. Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^2 + 2\lambda x - \lambda - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

24. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2007x^{2006} - 2006(\lambda + 1)x^{2005} + \lambda = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$
25. Αν $6\alpha = -7 + 3\beta \ln 2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \alpha\pi \cdot \eta\mu(\pi x) + \frac{\beta}{x}$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$
26. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0) = 2f(1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = -\frac{2x}{x^2+1} \cdot f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$
27. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + xf'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,2)$
28. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(6) = 3f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$
29. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 2f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \sin \xi + f(\xi) \eta\mu \xi = 0$
30. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x-2)f'(x) + f(x) = 0$
31. Δίνονται συναρτήσεις f και g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) . Ισχύουν ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ και $f(\beta)g(\alpha) - f(\alpha)g(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :
- $$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$$
32. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$
33. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = f(1) \cdot e^2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$
34. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = f(3) \cdot e^6$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) + 3f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1,3)$
35. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία με τετμημένες 1 και 2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $2f'(\xi) = 5f(\xi)$

Το πολύ κ ρίζες

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$, με $\mu \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$
37. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^5 - 5x + \alpha = 0$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$
38. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^6 + x^2 = \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$
39. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - x^2 = \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες

Υπαρξη ρίζας με άτοπο

40. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και ισχύει $f(x) \cdot \sin x \neq f'(x) \cdot \eta \mu \chi$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Να δείξετε ότι :
- $f(0) \cdot f(\pi) \neq 0$
 - Η f έχει μια, τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$
41. Έστω οι συναρτήσεις f, g , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(x) \cdot g'(x) \neq f'(x) \cdot g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν χ_1, χ_2 είναι διαδοχικές ρίζες της g , να δείξετε ότι :
- Οι χ_1, χ_2 δεν είναι ρίζες της f
 - Υπάρχει $\chi_3 \in (\chi_1, \chi_2)$ το οποίο είναι ρίζα της f

Μοναδική ρίζα με θεώρημα Bolzano και Rolle

42. Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x) \neq e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $0 < f(x) < 1$, για κάθε $x \in [0, 1]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 1$
43. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $0 < f(x) < 1$ Για κάθε $x \in [0, 1]$ και $f'(x) \neq 2x$ για κάθε $x \in (0, 1)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = x_0^2 + 1$
44. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[1, 2]$ με $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, 2]$ και $f'(x) \neq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (1, 2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{1}{2}x_0$

Ασκήσεις στο Θ.Μ.Τ

1. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x^2 - (\beta + 1)x + 2\beta - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Με $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$. Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[-1,3]$.

- i. Να βρείτε τις τιμές των α και β
 - ii. Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ για την f στο $[-1,3]$
2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(-1) = 3$ και $f(2) = 15$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4$
 3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = f(1) + 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (-1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$
 4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει : $f(\alpha) = 2\beta + 6\alpha$ και $f(\beta) = 5\beta + 3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f'(\xi) = 3$
 5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 5f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 2f(1)$
 6. Δίνεται η παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 6$. Να αποδείξετε ότι :
 - i. Η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων
 - ii. Υπάρχουν δύο τουλάχιστον εφαπτομένες της C_f παράλληλες στην ευθεία $3x - y + 2014 = 0$
 7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(5,9)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,5)$ διαφορετικά μεταξύ τους , ώστε

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4$$
 8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(6) = f(2) + 10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (2,6)$ διαφορετικά μεταξύ τους , ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 5$
 9. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(10) = f(1) + 9$. Να δείξετε ότι :

- i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,10)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 3$
- ii. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,10)$ τέτοιο ώστε $4f'(x_1) + 5f'(x_2) = 9$
10. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(22) = f(2) + 4$.
Να δείξετε ότι :Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (2,22)$ διαφορετικά ανά δύο, ώστε $f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 6f'(\xi_3) = 2$
11. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(\alpha) = \beta - 2\alpha$ και $f(\beta) = 3\beta - 4\alpha$. Να δείξετε ότι :Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 10$
12. (ΘΕΜΑ 2001) Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι:
- i. Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$
13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = 3\alpha$ και $f(\beta) = 3\beta$.
Να αποδείξετε ότι :
- i. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε $f(\xi) = 3(\alpha + \beta - \xi)$
- ii. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$, διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = 9$
14. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με $f(1) = 2$ και $f(5) = 20$. Να αποδείξετε ότι :
- i. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (1,5)$ με $x_1 < x_2$ ώστε $f(x_1) = 6$ και $f(x_2) = 12$
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1,5)$ ώστε
- $$\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{3}{f'(\xi_2)} + \frac{4}{f'(\xi_3)} = 2$$
15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι $f(1) = 2$ και $f(3) = f(4) = 6$. Να αποδείξετε ότι :
- i. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$, ώστε $f'(x_0) = 2$
- ii. Υπάρχει $\xi \in (1,4)$, ώστε $f'(\xi) = 1$
16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε
- i. Υπάρχει $x_0 \in (1,3)$, ώστε $f(x_0) = 6$
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε

$$\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$$

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{R}$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $5f(x_0) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια ώστε

$$\frac{3}{f'(\xi_1)} + \frac{2}{f'(\xi_2)} = \frac{5}{f'(\xi)}$$

Θ.Μ.Τ και ανισότητες

18. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη , με $f(1) = f(3) = 0$ και $f(2) > 0$ να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ με $\xi_1 < \xi_2$ ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$
- ii. Υπάρχει $\xi \in (1,3)$ ώστε $f''(\xi) < 0$

19. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$ να αποδείξετε ότι :

$$f(2) + f(3) < f(1) + f(4)$$

20. Αν $0 < \alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι :

$$e\alpha < \alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \cdot \beta^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}} < e\beta$$

21. Αν είναι $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι :

$$(\beta - \alpha)\epsilon\phi\alpha < \ln \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta} < (\beta - \alpha)\epsilon\phi\beta$$

22. Για κάθε $x \geq 0$ να αποδείξετε ότι :

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$$

23. Για κάθε $x \geq 1$ να αποδείξετε ότι :

$$x - 1 \leq \ln x < 1 - \frac{1}{x}$$

24. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει ότι :

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$

- a. Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ για την f στο $[e, \pi]$

b. Να αποδείξετε ότι $2 - \frac{e}{\pi} < \ln \pi < \frac{\pi}{e}$

26. Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{2}{5} < \ln \frac{5}{3} < \frac{2}{3}$$

27. (2003) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει : $f(\alpha) = f(\beta) =$

0 και υπάρχουν αριθμοί $\gamma, \delta \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$
- ii. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) > 0$ και $f''(\xi_2) < 0$
- iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$

28. (2005) Δίνεται συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

- a. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1
- b. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση :

$$f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$$

- c. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία :

$$\varepsilon: y = -\frac{1}{668} \cdot x + 2005$$

2.8 Συνέπειες Θεωρήματος Μέσης Τιμής

1^η συνέπεια του Θ.Μ.Τ

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ

- είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ
- τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ

Απόδειξη :

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$ Πράγματι :

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1)

Επειδή είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi)=0$ οπότε λόγω της (1) είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$

2^η συνέπεια του Θ.Μ.Τ

Έστω δυο συναρτήσεις f και g ορισμένες σε ένα διάστημα αν

- Οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει :
 $f(x)=g(x)+c$

Απόδειξη :

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Επομένως σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ .
 άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$ οπότε $f(x)=g(x)+c$

3^η συνέπεια του Θ.Μ.Τ

έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα Δ να αποδείξετε ότι

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ

Απόδειξη:

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που $f'(x) > 0$

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$

Πράγματι στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Οπότε έχουμε : $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0$

οπότε $f(x_2) > f(x_1)$

ομοίως αποδεικνύεται και στην περίπτωση που $f'(x) < 0$

Βασικά παραδείγματα

1. Να βρείτε τον τύπο της f όταν $f'(x) = 3x^2 - 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$

Λύση:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \Leftrightarrow f'(x) = (x^3 - 3x^2)' \Leftrightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + c$$

Επειδή

$$f(2) = 5 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c = 9$$

Άρα

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 9$$

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 11$ και $(x-1)f'(x) = 2x^2 + 3x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τον τύπο της f

Λύση:

Για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ισχύει ότι :

$$(x-1)f'(x) = 2x^2 + 3x - 5 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(2x+5)(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow f'(x) = 2x+5 \Leftrightarrow f'(x) = (x^2+5x)'$$

Άρα υπάρχουν σταθερές c_1 και c_2 ώστε :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + c_1, & x < 1 \\ x^2 + 5x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

Οπότε ο τύπος της f είναι :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + c_1, & x < 1 \\ c, & x = 1 \\ x^2 + 5x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ άρα ισχύει ότι :

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow c = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 5x + c_2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 5x + c_2) \Leftrightarrow c = 6 + c_1 = 6 + c_2$$

Επίσης είναι : $f(2) = 11 \Leftrightarrow c_2 = -3$

Επομένως

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x - 3, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x^2 + 5x - 3, & x > 1 \end{cases}$$

Άρα

$$f(x) = x^2 + 5x - 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ασκήσεις στις συνέπειες του Θ.Μ.ΤΣταθερή συνάρτηση

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 3$ και :

$$x \cdot f'(x) = 3x - 2f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$

- b) Να βρείτε τον τύπο της f

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση:

$$f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathcal{R}$$

Για την οποία ισχύει $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ και $f'(x) = f(x) \sigma \phi x$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\eta \mu x}$ είναι σταθερή στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

- b) Να βρείτε τον τύπο της f

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 4e^{-2}$

και :

$$2\sqrt{x} \cdot f'(x) + f(x) = e^{-\sqrt{x}} \text{ για κάθε } x \geq 0$$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot f(x) - \sqrt{x}$ είναι σταθερή στο $[0, +\infty)$

- b) Να βρείτε τον τύπο της f

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 4e^{-2}$

και :

$$f'(x) = -\frac{3f(x)}{x} \text{ για κάθε } x > 0 \text{ Κια } f(1) = 2$$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 f(x)$ είναι σταθερή

- b) Να βρείτε τον τύπο της f

- c) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x) = \frac{4}{x} \cdot f(x) \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f'(2) = 64$$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}$ με $g(x) = \frac{f(x)}{x^4}$ είναι σταθερή

- b) Να βρείτε τον τύπο της f

c) Να βρείτε το :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^8 - 12x^4 + x} - f(x) \right)$$

6. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει ότι :

$$f'(x) = -4x^3 \cdot f^2(x) \text{ και } f(0) = 1$$

a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Με $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^4$ είναι σταθερή

b) Να βρείτε τον τύπο της f

c) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 f(x) \eta \mu x)$

Εύρεση τύπου συνάρτησης

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2)=5$ και

$$f'(x) = 2x + 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f$$

8. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0)=3$ και

$$f'(x) = e^x - \eta \mu x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f$$

9. Να βρείτε τον τύπο της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. $f'(x) = 3x^2 + x + 1, f(0) = 2$

ii. $f'(x) = \eta \mu x - \sigma \nu \nu x, f(0) = 2$

iii. $f'(x) = 2e^x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}, f(1) = 2e$

10. Να βρείτε τον τύπο της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. $f''(x) = 6x + 2, f'(0) = 1, f(1) = -3$

ii. $f''(x) = 2x - \eta \mu x - \frac{1}{x^2}, f'(1) = \sigma \nu \nu 1, f(1) = \eta \mu 1$

11. Να βρείτε τον τύπο της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. $f'(x) = \eta \mu x + x \sigma \nu \nu x, f(0) = 1$

ii. $f'(x) = 2x \sigma \nu \nu x - x^2 \eta \mu x, f(0) = 2$

iii. $f'(x) = e^x (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x), f(0) = 3$

iv. $f'(x) = \ln x + 1, f(1) = 2$

12. Να βρείτε τον τύπο της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. $f'(x) = \frac{x \sigma \nu \nu x - \eta \mu x}{x^2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$

ii. $f'(x) = \frac{2x-x^2}{e^x}, f(0) = 3$

iii. $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}, f(0) = 1$

iv. $f'(x) = \frac{\sin x}{\eta \mu^2 x}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

13. Να βρείτε τον τύπο της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις

i. $f'(x) = 3x^2 f(x), f(x) > 0$ και $f(0) = 1$

ii. $f'(x) - 2xe^{-f(x)} = 0, f(1) = 1$

iii. $x^2 f'(x) + e^{-f(x)} = 0, f(1) = 0$

iv. $f'(x) + 2xf^2(x) = 0, f(x) \neq 0, f(0) = 1$

14. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\pi) =$

0 και

$xf'(x) + f(x) = \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

15. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln 2) =$

$\ln 16$ και

$xf'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^x$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τον τύπο της f

16. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(0) =$

e και

$$f'(x) - 2xf(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f

18. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) =$

0 και

$$xf'(x) - 2f(x) = x \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τον τύπο της f

19. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xe^x f'(x) +$

$e^x f(x) = \sin x - \eta \mu x$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f

20. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = -2$ και

$$f(x)f'(x) = e^{2x} + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f

21. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $xf'(x) = -f(x)$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

a) Τον τύπο της f

b) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \ln x)$

22. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$ και

$$f'(x) - 4x^3 \cdot e^{-f(x)} = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε:}$$

a) Τον τύπο της f

b) Το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5 \ln x)$

23. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$ και

$$f'(x) - f(x) = \sin x \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε:}$$

a) Τον τύπο της f

b) Το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Ένωση διαστημάτων

24. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x) + xf''(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2014. \text{ Να αποδείξετε ότι } f(x) = 2014 \text{ για κάθε}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

25. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-2) = 3$ και :

$$(x-1)f'(x) = 2x^2 + x - 3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f

26. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 4$,

$$f(-1) = -2 \text{ και}$$

$$xf'(x) - 2f(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f

Σχέση της μορφής $f'(x) = f(x)$

27. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$

και

$$xf'(x) = (x-1)f(x) \text{ για κάθε } x > 0$$

Να βρείτε τον τύπο της f

28. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}$

και

$$f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = f(x)\eta\mu x \text{ για κάθε } x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

Να βρείτε τον τύπο της f

29. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 3$ και

$$f'(x) - x^3 = f(x) - 3x^2 \text{ να βρείτε τον τύπο της } f$$

30. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f''(x) -$

$$2f'(x) + f(x) = 0$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 5x + 3$. Να βρείτε :

- Τις τιμές $f'(0)$ και $f(0)$
- Τον τύπο της f

Συνδυαστικά θέματα

31. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 0$ και

$$xf'(x) - f(x) = x \text{ για κάθε } x > 0$$

- Να βρείτε τον τύπο της f

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A(4,5)$

32. (2001) Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f(0) = 1 \text{ και } f'(0) = 0. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

- Η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$$

Είναι σταθερή

- $(f(x)e^x)' = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

33. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$ και

$$f(x) + f'(x) = 2xe^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- Να βρείτε τον τύπο της f

- b) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 0)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): x + y + 2014 = 0$

Μελέτη μονοτονίας

34. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις

- i. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$
- iii. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 7$
- iv. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 13$
- v. $f(x) = x^4 - 2x^2$
- vi. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$
- vii. $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 21$
- viii. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 21$

35. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x) &= \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} & \text{ii) } f(x) &= \frac{4x^2 + 1}{x} & \text{iii) } f(x) &= \frac{x - 2}{x + 1} & \text{iv) } f(x) &= \\ &= \frac{x}{2} + \frac{2}{x} & \text{v) } f(x) &= x^3 + \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

36. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x) &= (x - 1)e^x & \text{ii) } f(x) &= \frac{x + 2}{e^x} & \text{iii) } f(x) &= \sqrt{2x - x^2} & \text{iv) } f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}} \\ \text{v) } f(x) &= \ln(x + 1) - \frac{2x}{x + 2} & \text{vi) } f(x) &= \frac{x}{\ln x} & \text{vii) } f(x) &= 2\ln(x - 2) - x^2 + 4x + 1 \end{aligned}$$

37. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις :

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 7, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2 - 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ -2x^3 + 3x^2 - 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

38. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις :

$$\text{i) } f(x) = x^2 - 4x + 3 - |2x - 4| \quad \text{ii) } f(x) = (2 - x) \cdot |x - 2| + 2x + 1$$

39. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις συναρτήσεις :

$$\text{i) } f(x) = \begin{cases} e^{x^3 - 3x^2}, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^2 e^{1-x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad \text{ii) } f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 - 2, & \text{αν } x < 1 \\ x \ln x - 2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

40. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} -2x^3 - 3x^2 + \alpha x + 81, & \text{αν } x \leq 1 \\ 2x^3 - 21x^2 + 6\alpha x + 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases} \quad \mu\epsilon \alpha \in \mathbb{R}$$

Η οποία είναι συνεχής

- a) Να βρείτε την τιμή του α
- b) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

41. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + 3, & \text{αν } x \leq 2 \\ \beta x^2 - 3\alpha x - 5, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Η οποία είναι παραγωγίσιμη

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

Εύρεση μονοτονίας με χρήση παραγώγου ανώτερης τάξης

42. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση:

$$f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 7$$

43. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση :

$$f(x) = e^x + x \ln x - (e + 1)x$$

44. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση :

$$f(x) = 2e^{x-1} - x^2 + 3$$

45. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2 + x^2 e^x + 2x e^x}{2e^x}$$

46. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση :

$$f(x) = 2ex(\ln x - 1) - x^2$$

47. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση :

$$f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x$$

Προσδιορισμός παραμέτρων

48. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 + 3\alpha x^2 + 6x - 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

49. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση : $f(x) = \frac{2x^3}{3} + (2\mu - 1)x^2 + 2(\mu^2 - 1)x - 21$

Είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

50. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = (2x + \alpha)e^x - x^2 + \beta x + 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η C_f έχει στο σημείο της $M(0, f(0))$ οριζόντια εφαπτομένη την ευθεία $(\epsilon): y = -2$

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

Εξισώσεις

51. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i) $e^x = 1 - 2x$

ii) $3x^2 + 2x = 5 - \ln x$

iii) $e^{x-1} + x^3 = 3 - x$

iv) $(x^2 + 3x + 4)e^x = 4$

v) $e^x = e^{-x} - xe^{-x}$

vi) $2^x + 5^x = 7^x$

vii) $\ln x = x - 1$

viii) $1 + x \ln x = x$

ix) $e^x = x + 1$

x) $x \ln x = 2x - e$

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 b) Να λύσετε τις εξισώσεις
 i) $1 + x^3 e^{-x} = e^{-x}$
 ii) $e^{x^3-6} - e^{7x} = (7x)^3 - (x^3 - 6)^3$

53. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e}{x} - \ln x$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 b) Να λύσετε τις εξισώσεις :
 i) $\frac{e}{x} = \ln x$
 ii) $\frac{e}{|x|+3} + \frac{e}{2|x|+1} = \ln \frac{|x|+3}{2|x|+1}$

54. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $x^2 + 2\ln x = 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$

55. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $3x + 1 = 4\sin x$ έχει μοναδική λύση στο $(0,\pi)$

56. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i) $e^{x-1} \leq 1 - \ln x$ ii) $e^x + 2x < e^{-x} - x^3$ iii) $x^4 + 4x > \ln \frac{1}{x+1}$ iv) $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \geq x$

57. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i) $2^x + 3^x < 5^x$ ii) $\frac{x+5}{x+2} - \ln x \leq 2$ iii) $1 + \ln x < \frac{4-2x^2}{x+1}$ iv) $\ln(x^2 + 1) + e^x \geq 1 - x$

58. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln x + \sqrt{x}$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 b) Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις :
 i) $\frac{1 - \ln x}{\sqrt{x}} \geq 1$

ii) $\ln \frac{x^2 + 8}{9x} \geq 3\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + 8}$

59. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = e^x + x$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 b) Να λύσετε τις ανισώσεις :
 i) $e^{x^2+x-2} + x^2 + x < 3$
 ii) $e^{|x|+3} - e^{2|x|+1} \geq |x| - 2$

60. Να αποδείξετε τα επόμενα :

- i) $e \ln x \leq x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
 ii) $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 iii) $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
 iv) $x^2 - 1 \geq 2\ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

61. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι :

$$f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
- b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$
- c) Να λύσετε την ανίσωση : $f(2e^{x-1}) - f(3 - x^3) < 0$

62. (2003) Δίνεται η συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x) = -f(2 - x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- a) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
- b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα
- c) Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45°

2.9 Ακρότατα και Θεώρημα Fermat

Ορισμός :

1. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό μέγιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό μέγιστο της f**

2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **τοπικό ελάχιστο**, όταν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Το x_0 λέγεται **θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου**, ενώ το $f(x_0)$ **τοπικό ελάχιστο της f**

Θεώρημα Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Να αποδειχθεί ότι : Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό τότε :

$$f'(x_0) = 0$$

(θέμα 2011)

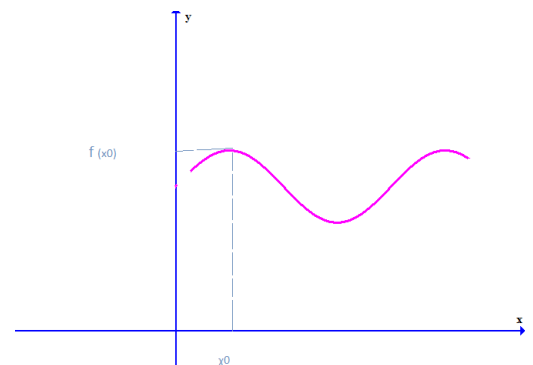
Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σε

Αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$

$$\text{Και } f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (1)$$



Επειδή επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

-αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ τότε λόγω της (1) θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (2)

-αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ τότε λόγω της (1) θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (3)

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι : $f'(x_0) = 0$

Κριτήριο τοπικών ακροτάτων

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. να αποδειχθούν τα παρακάτω:

- i. Αν $f'(\chi) > 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) < 0$ στο (χ_0, β) τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f
- ii. Αν $f'(\chi) < 0$ στο (α, χ_0) και $f'(\chi) > 0$ στο (χ_0, β) τότε το $f(\chi_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f
- iii. Αν η $f'(\chi)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$ τότε το $f(\chi_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Απόδειξη :

i) Επειδή $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0)$ και η f είναι συνεχής στο χ_0 η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, χ_0) έτσι θα έχουμε $f(x) \leq f(\chi_0)$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0]$ (1)

Επειδή $f'(\chi) < 0$ για κάθε $\chi \in (\chi_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο χ_0 η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\chi_0, \beta)$ έτσι θα έχουμε $f(x) \leq f(\chi_0)$ για κάθε $\chi \in [\chi_0, \beta)$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι ισχύει $f(x) \leq f(\chi_0)$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \beta)$

Που σημαίνει ότι το $f(\chi_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής

ii) Ομοίως

iii) Έστω ότι $f'(\chi) > 0$ για κάθε $\chi \in (\alpha, \chi_0) \cup (\chi_0, \beta)$

Επειδή η f είναι συνεχής στο χ_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(\alpha, \chi_0]$ και $[\chi_0, \beta)$ επομένως για $\chi_1 < \chi_0 < \chi_2$ ισχύει $f(\chi_1) < f(\chi_0) < f(\chi_2)$. άρα το $f(\chi_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f . θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β)

Πράγματι, έστω $\chi_1, \chi_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\chi_1 < \chi_2$

-Αν $\chi_1, \chi_2 \in (\alpha, \chi_0]$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, \chi_0]$ θα ισχύει $f(\chi_1) < f(\chi_2)$

-Αν $\chi_1, \chi_2 \in [\chi_0, \beta)$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\chi_0, \beta)$ θα ισχύει $f(\chi_1) < f(\chi_2)$

-Αν $\chi_1 < \chi_0 < \chi_2$ τότε όπως είδαμε $f(\chi_1) < f(\chi_0) < f(\chi_2)$

οπότε σε όλες τις περιπτώσεις $f(\chi_1) < f(\chi_2)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β)

βασικά παραδείγματα :

1. Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 1$$

Λύση:

Η

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 1$$

Έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$f'(x) = (2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 1)' = 10x^4 - 20x^3 - 30x^2 = 10x^2(x^2 - 2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1 \text{ ή } x = 3$$

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
x^2	+	+	⊖	+	+
$x^2 - 2x - 3$	+	⊖	-	⊖	+
$f'(x)$	+	⊖	⊖	⊖	+
$f(x)$	↗	T.M	↘	↘	T.E ↗

2. Για τον πραγματικό αριθμό $a > 0$ ισχύει ότι :

$$a^x \geq x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ να αποδείξετε ότι : } a = e$$

Λύση:

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι : } a^x \geq x + 1 \Leftrightarrow a^x - x - 1 \geq 0$$

$$\text{Θέτω } f(x) = a^x - x - 1, \text{ με } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι : } f(0) = 0$$

$$\text{Έτσι για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε ότι } f(x) \geq f(0)$$

Δηλαδή η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο, είναι παραγωγίσιμη στο 0 που είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$

Επομένως από θεώρημα Fermat συμπεραίνουμε ότι

$$f'(0) = 0 \Leftrightarrow a^0 \ln a - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e$$

Κάνουμε επαλήθευση για $a = e$

$$f(x) = e^x - x - 1$$

$$f'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘	O.E	↗

Ασκήσεις στο θεώρημα Fermat

Ακρότατα συνάρτησης απλού τύπου

1. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

a) $f(x) = x^3 - 3x$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

c) $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 5$ d) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

2. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f(x) = \frac{4}{x^2 + 2}$ b) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ c) $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 5}$ d) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$

3. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

a) $f(x) = e^x(x^2 - 7x + 13)$ b) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ d) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$

4. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ b) $f(x) = \ln(2x^2 - 4x + 3)$ c) $f(x) = x^2 - 8\ln x$ d) $f(x) = \ln x - \ln(x^2 + 1)$

5. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

a) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ b) $f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{7 - x}$ c) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{6 - x^2}$

6. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2x\ln x$ b) $f(x) = (2x - 1)\ln x - x$ c) $f(x) = 2e^x + x^2 - 2x + 3$

7. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 6, & \text{αν } x \leq 2 \\ x^2 - 8x + 14, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & \text{αν } x \leq 0 \\ -x^2 + 6x + 3, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4ax + a, & \text{αν } x \leq 3 \\ x^2 - (3a - 1)x + 3a, & \text{αν } x > 3 \end{cases}$$

i) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

Προσδιορισμός παραμέτρων

9. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 - 3(a + 2)x^2 + 6(a + 1)^2x + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές των a και β η f παρουσιάζει στο 1 τοπικό ελάχιστο το 3

10. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 12x - 7$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές των a και β η f παρουσιάζει ακρότατα στο -2 και στο 1 καθώς και το είδος των ακροτάτων

11. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + a$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του a η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με 2014
12. (2004) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6ax + \beta$ όπου $a, \beta, x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$
- Να αποδείξετε ότι $a = -6$ και $\beta = 54$
 - Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία
 - Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(-1, 2)$
13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x - x^2$, όπου $a \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$
- Να βρείτε την τιμή του a
 - Να λύσετε την ανίσωση :
- $$(3|x| + 1)^2 - (|x| + 9)^2 < 2 \ln \frac{3|x| + 1}{|x| + 9}$$
14. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $a^2 < 2\beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει τοπικά ακρότατα
15. (2005) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + 3x - 2$ όπου $x, \kappa \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$. Να αποδείξετε ότι :
- $\kappa = -1$
 - Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα
 - Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Ακρότατα και λύση εξίσωσης

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2xe^{2x} - 1$
- Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
17. Να λύσετε τις εξισώσεις :
- $\ln(x + 1) = x$
 - $x \ln x = 2x - e$
18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 4 \ln x$ και $g(x) = 1 - 2 \ln x$. Να αποδείξετε ότι :
- Οι C_f , C_g έχουν μοναδικό κοινό σημείο
 - Στο κοινό τους σημείο οι C_f , C_g έχουν κοινή εφαπτομένη , της οποίας να βρείτε την εξίσωση

Απόδειξη ανισοτήτων με τη βοήθεια ακροτάτων

19. Να αποδείξετε ότι :
- $x^2 \geq 1 + 2 \ln x$ για κάθε $x > 0$
 - $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$
 - $(1 + x)e^x \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - $\ln(ex) \leq x \leq$ για κάθε $x > 0$

20. Να αποδείξετε ότι :

- a) $e^x - 1 \geq \ln(x + 1)$ για κάθε $x > -1$
- b) $e^x + e^{-x} \geq x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- c) $ex^{ex} \geq 1$ για κάθε $x > 0$
- d) $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$

21. a) Να αποδείξετε ότι: $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

b) Να μελετήσετε τη συνάρτηση :

$$f(x) = 6e^x(x - 1) - x^2(2x + 3)$$

ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

22. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = 2e^{x+1} - 2x - 3$$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα

23. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την επόμενη συνάρτηση : $f(x) = 6x \ln x - 6x - x^3$

Από ανισότητα σε ισότητα

24. Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $x^2 + x \geq 2 + \alpha \ln x$ για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $\alpha=3$

25. Αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - \ln x$, ισχύει ότι $f(x) \geq f(1)$, για κάθε $x > 0$, να βρείτε το

26. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2^x + 5^x + \lambda^x - 7^x - 10^x$. Να βρείτε το $\lambda > 0$, ώστε $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

27. Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x + \frac{\alpha}{x} \geq \alpha$, να βρείτε το α

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + a^x - 3^x - 4^x$, με $x \in \mathbb{R}$ όπου $a > 0$, για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

- a) Τον αριθμό α
- b) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

29. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$f(x) + f(2x) \leq 2e^{\eta\mu^3 x} - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε :

- a) Την $f'(0)$
- b) Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu^2 x}$

Σύνολο τιμών συνάρτησης

30. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

- a) $f(x) = \sqrt{1-x} - \ln x$
- b) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \frac{4-x}{x-2}$

31. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων

a) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, x \in [-1, 3]$

32. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x^2+3x}$

c) $f(x) = \frac{x^2+6}{x^2+3}$

33. (2006) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln(x - 5) + 2x - 12$

a) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f;

b) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

c) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

d) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2006$ έχει μοναδική λύση στο πεδίο ορισμού της

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + \ln x$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2014$ έχει μοναδική ρίζα

35. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 4\eta\mu x + 3x^2 - 4x$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2015$ έχει ακριβώς δύο ρίζες

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-2} - \ln(x - 1)$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 12x$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

b) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

c) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

39. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $e^{x^3+2} = ae^{3x^2}$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$

40. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f: (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ Για την οποία ισχύει $f(\sqrt{e}) = \ln 2$ Και

$$e^{-f(x)} \cdot f'(x) = \frac{1}{x} \text{ για κάθε } x \in (0, e)$$

- a) Να βρείτε τον τύπο της f
 b) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2014$ έχει ακριβώς μια λύση

Προβλήματα ακροτάτων

41. Οι κορυφές ενός τριγώνου είναι τα σημεία $A(0,0)$, $B(x, \sin x)$, $\Gamma(\eta\mu^3 x, 0)$ όπου $0 < x < \frac{\pi}{2}$
 a) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ως συνάρτηση του x
 b) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου είναι μέγιστο
 c) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του τριγώνου
42. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση $y = -2x + 4$
 a) Να βρείτε τα σημεία K και Λ στα οποία η ευθεία τέμνει τους άξονες x' και y' αντίστοιχα
 b) Έστω $M(x, y)$ σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$, από το οποίο φέρνουμε τις MA και MB κάθετες στους άξονες x' και y' αντίστοιχα. Να βρείτε το σημείο M ώστε το $OAMB$ να έχει μέγιστο εμβαδό ($O(0,0)$)
43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 9 - x^2$. Να βρείτε το σημείο εκείνο της C_f το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από το $A(3,9)$
44. (2005) Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και 20 σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες ευρώ) x σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση $K(x) = 4x^2 + 30$ και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες ευρώ) με τη συνάρτηση :
- $$E(x) = 3x^2 + 20x$$
- a) Να βρείτε το κόστος κατασκευής 5 σκαφών
 b) Να βρείτε τον τύπο $P(x)$ της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου
 c) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους
 d) Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος ;
45. (2006) Μία βιοτεχνία μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50 cm.
 a) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο : $E(x) = \frac{1}{2}x(50 - x)$, με $0 < x < 50$
 b) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο;
 c) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού
46. Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}, \quad t \geq 0$$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

47. Η κατανάλωση σε λίτρα ανά 100 km ενός κινητήρα, όταν αυτός λειτουργεί με x χιλιάδες στροφές ανά λεπτό, δίνεται από τη συνάρτηση: $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 10$, όπου $1 < x < 5$

- a) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία έχουμε τη μικρότερη κατανάλωση, καθώς επίσης και πόση είναι η κατανάλωση αυτή
- b) Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της κατανάλωσης του αυτοκινήτου για $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$ (δηλαδή για 2000 και 4000 στροφές ανά λεπτό αντίστοιχα)

2.10 Κυρτότητα – Σημεία Καμπής

Ορισμός1 :

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ θα λέμε ότι

- η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ
- η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

Θεώρημα : έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ

- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι κοίλη στο Δ

Ορισμός 2:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του χ_0 αν

- Η f είναι κυρτή στο (α, χ_0) και κοίλη στο (χ_0, β) ή αντιστρόφως
- Και η c_f έχει εφαπτομένη στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$

Τότε το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f

Θεώρημα : έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα (α, β) και $\chi_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του χ_0 και
- Ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(\chi_0, f(\chi_0))$

Τότε το σημείο $A(\chi_0, f(\chi_0))$ είναι σημείο καμπής

Παράδειγμα :

Να μελετήσετε την $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2$ ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Λύση:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$$

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1$$

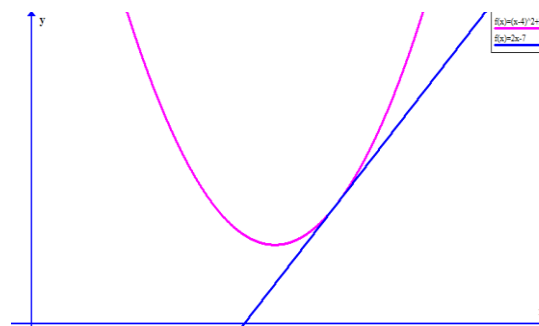
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$\curvearrowright$	$\Sigma.K$	$\Sigma.K$	$\curvearrowleft$

Στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, 1]$ η f είναι κοίλη και

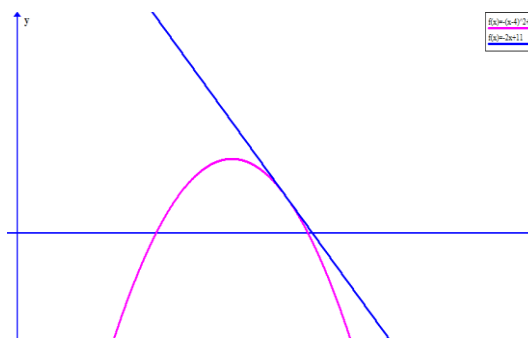
Στο $[1, +\infty)$ η f είναι κυρτή, ενώ στο $x_0 = 1$ η f έχει σημείο καμπής

Παρατήρηση

- 1) Αν η f είναι κυρτή τότε η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της θα βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση



- 2) Αν η f είναι κοίλη η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της θα βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση



Θεώρημα : Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής

της f και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε $f''(x_0) = 0$

Παράδειγμα :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$

- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
- Να βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο της $A(0,1)$
- Να δείξετε ότι: $e^x \geq x + 1$

Λύση:

- $f'(x) = e^x$ και $f''(x) = e^x > 0$ άρα η f είναι κυρτή σε όλο το $A_f = \mathbb{R}$
- $f'(0) = 1$, εφ: $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

- iii) Η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ επομένως η γραφική παράσταση της f θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη άρα $f(x) \geq x + 1 \Rightarrow e^x \geq x + 1$

Ασκήσεις στην κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Μελέτη συνάρτησης ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

- Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις :
 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 2$
 - $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 4$
 - $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{2} - x^2$
 - $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 3$
- Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις
 - $f(x) = \ln(x^2 + 4)$
 - $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 5)$
 - $f(x) = x^2(3 - 2 \ln x)$
 - $f(x) = x - \ln x - \frac{1}{x}$
- Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις :
 - $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$
 - $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$
 - $f(x) = 2x + 3 \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2$
 - $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x} - \ln x^2$
 - $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2$
- Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + x - 2$
 Να αποδείξετε ότι η C_f έχει τρία σημεία καμπής , τα οποία είναι συνευθειακά
- Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής τις παρακάτω συναρτήσεις :
 - $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 6, & \text{άν } x \leq 1 \\ x^3 - 9x^2 + 15x - 2, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$
 - $f(x) = \begin{cases} -x^3 - 6x^2 - 9x + 1, & \text{αν } x < -1 \\ -x^3 + 3x^2 + 9x + 10, & \text{αν } x \geq -1 \end{cases}$
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 + 3ax^3 + 3a^2x^2 + 5x - 6$, με $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημείο καμπής

Προσδιορισμός παραμέτρων

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(-1,4)$
8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ , ώστε η C_f να έχει στο $x_1 = -1$ ακρότατο το 10 και το $x_2 = 1$ να είναι θέση σημείου καμπής
9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^2 x^4 - 4(\alpha + 1)x^3 + 24\alpha x^2 - 7x + 4$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του α , το $x_0 = 2$ είναι θέση σημείου καμπής της C_f
10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = a^2 x^3 - 6ax^2 + 5x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β η C_f έχει σημείο καμπής το $A(2,3)$

Κυρτότητα και εφαπτομένη

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 - Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$
 - Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1 + 2x - x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + \alpha \ln x)^2$ με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη (ϵ) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ζ): $8x - 2y + 2014 = 0$
- Να βρείτε τον αριθμό α και την εξίσωση της (ϵ)
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 - Να αποδείξετε ότι $3 + (x + \ln x)^2 \geq 4x$ για κάθε $x > 0$
13. α) Να αποδείξετε ότι $e^x > x - x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 β) Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x) = 2x^3 - x^4 - 12e^x$
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 - Να αποδείξετε ότι:

$$12e^x \geq -x^4 + 2x^3 + 12x + 12 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$
14. α) Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση, να αποδείξετε ότι:
- $$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \geq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta$$
- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, με $x > 0$
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
 - Να αποδείξετε ότι:
- $$\frac{\alpha \ln \alpha + \beta \ln \beta}{\alpha + \beta} \geq \ln \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{ για κάθε } \alpha, \beta > 0$$
15. α) Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι κοίλη στο Δ , να αποδείξετε ότι:
- $$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta$$

b) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\ln x)$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta > 1$ ισχύει ότι:

$$\ln \frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\ln \alpha \cdot \ln \beta}$$

16. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$ και $B(4,8)$. Αν η f είναι κυρτή να αποδείξετε ότι :

- a) $f'(4) > 3$
- b) $f(3) < 5$

17. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι κυρτή και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ έχει εξίσωση $y = 2x + 4$

- a) Να βρείτε τις τιμές των α και β
- b) Να αποδείξετε ότι $f(-3) + f(3) > 8$
- c) Να αποδείξετε ότι $f(x+2) - f(x) > 4$ για κάθε $x > 0$

18. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι κοίλη, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

- i. $2f(x) > f(x+1) + f(x-1)$
- ii. $f'(x+1) < f(x+1) - f(x) < f'(x)$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + \alpha}{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ διέρχεται από το σημείο $A(-e, -2)$

- a) Να βρείτε τον αριθμό α
- b) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 4$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(-1, f(-1))$ διέρχεται από το σημείο $K(-2, -9)$

- a) Να βρείτε τον αριθμό α
- b) Αν x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο καμπής να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ex \ln x - e^x$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- b) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- c) Να λύσετε την ανίσωση :

$$f\left(2 + \frac{f(x^2 + x + 1)}{e}\right) + e < 0$$

22. Δίνεται πραγματικός αριθμός $\alpha \in (0,1)$ και η συνάρτηση $f(x) = a^x - x$, με $x \in \mathbb{R}$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα
- b) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

2.11 Ασύμπτωτες

Κατακόρυφη ασύμπτωτη :

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ είναι } +\infty \text{ ή } -\infty$$

Τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f

Παράδειγμα :

Η $f(x) = \ln x$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$ (άξονας y)

Διότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Οριζόντια ασύμπτωτη :

Αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

Τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

Παράδειγμα:

Η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 0$ στο $+\infty$

Διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Πλάγια ασύμπτωτη:

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$$

(αντίστοιχα στο $-\infty$)

Παράδειγμα:

Αν $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1}$ να δείξετε ότι η $y = x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Λύση:

Πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = 0$$

Έχω :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 1} - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{4e^x}{e^x + 1} \right] = 0$$

Θεώρημα :

Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \beta$$

Παρατήρηση :

- 1) Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.

Π.χ $f(x) = x^2 + 5$

- 2) Οι ρητές συναρτήσεις στις οποίες ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του παρονομαστή τουλάχιστον κατά δύο μονάδες δεν έχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες

Π.χ $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{x+4}$

Που αναζητώ ασύμπτωτες:

- 1) Στα άκρα του πεδίου ορισμού
 - ♥ Αν είναι της μορφής (α, β) αναζητώ κατακόρυφες ασύμπτωτες
 - ♥ Αν είναι της μορφής $(-\infty, +\infty)$ ή $(\alpha, +\infty)$ ή $(-\infty, \alpha)$ αναζητώ πλάγιες και οριζόντιες ασύμπτωτες στο $\pm\infty$
- 2) Εκεί που η f δεν είναι συνεχής
- 3) Εκεί που η f δεν ορίζεται

Ασκήσεις στις ασύμπτωτεςΠροσδιορισμός ασύμπτωτων

1. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες, αν υπάρχουν, των παρακάτω συναρτήσεων

a) $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-2x+1}$

b) $f(x) = \frac{x-5}{|x-2|}$

c) $f(x) = \frac{x^2-7}{x+2}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-3x-4}$

e) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

f) $f(x) = \ln \frac{5-x}{x-2}$

2. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες, αν υπάρχουν, των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f(x) = \frac{3x^2+7x+13}{x^2+2}$

b) $f(x) = \frac{2x-|x-3|}{x+1}$

c) $f(x) = \frac{x^3+|x^3-4x|}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x+2}}{x-3}$

3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των παρακάτω συναρτήσεων :

a) $f(x) = \frac{x^2+5x-2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{2x^3+3x^2-5}{x^2-x+1}$

c) $f(x) = \frac{x^3-5x^2+2x+3}{x+1}$

d) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 7x + 21$

4. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 2}{x - 3}$$

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$

5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x + 5}{x - 2}, & \text{αν } x < 2 \\ \sqrt{x^2 + 4x + 13}, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\chi - 1)f(x) - 3x^2 + x] = 2014$$

Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 2x^2}{\sqrt{4x^2 + x + 1}} = -3$$

Να αποδείξετε ότι η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση

Προσδιορισμός παραμέτρων

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β , αν η ευθεία $(\epsilon): y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

9. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 3}{2x^2 + \alpha x + \beta}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$. Να βρείτε :

- a) Τις τιμές των α και β
b) Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f

10. Η γραφική παράσταση της

$$f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + 4x - 6}{x^2 - 3x + 2}, \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$. Να βρείτε :

- a) Τις τιμές των α και β
b) Τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f

11. Η ευθεία $y = 4x + 2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Να βρείτε τα όρια :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 f(x) - 4x^3}{x f(x) - 2014}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)(x+1) - 4x^2}{3x - 2014}$

12. Η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της f . Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x f(x) + x \eta \mu x}{x^2 f(x) - 2x^3 + 2014}$$

13. Έστω η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}, x \in \mathbb{R} - \{2\}$$

a) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

- b) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

- c) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$

14. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}, & x < 2 \\ \frac{x^2 - 5x + 6}{2(x - 1)}, & x \geq 2 \end{cases}$$

- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$

- b) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(0, f(0))$

- c) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \frac{1}{2}x - 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$

15. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4}x + \lambda, & x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

- b) Για $\lambda = 0$:

- i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

- ii. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$

16. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{(2 - \alpha)x^2 - \kappa x + 2}{x - 3}, \alpha, \kappa \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 3.$$

Η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$

a) Να αποδείξετε ότι :

i) $\alpha=1$ και $\kappa=3$

ii) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in (1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλα στον άξονα $x'x$

b) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$

17. Έστω η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + \kappa}{x}$$

Όπου κ πραγματικός αριθμός

a) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

b) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του κ

c) Για $\kappa=1$

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

2.12 Κανόνες De L' Hospital

Θεώρημα 1^ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Παράδειγμα:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \left(\frac{0}{0} \text{ DLH} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1$$

Θεώρημα 2^ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty, x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Παράδειγμα :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \left(\frac{0}{0} \text{ DLH} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Παρατήρηση:

Τα θεωρήματα ισχύουν και για απροσδιόριστες μορφές $\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}$

Και μπορούν να εφαρμοστούν παραπάνω από μια φορά αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις

Ασκήσεις στους κανόνες De L'Hospital

1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 4} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 5\eta\mu x}{2x - \eta\mu x}$$

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\eta\mu x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{e^x - 1} \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2} \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{x - \eta\mu x} \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 2^x}{x}$$

4. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 2)}{x} \quad iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + \ln x}{x^2 + 2 \ln x}$$

5. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x + \ln x}{4x + \ln x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)^{15}}{\ln(x+2)^5} \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 2)}{\ln(x^2 + 5)} \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$$

6. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\sigma\phi x} \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(\ln x)}{\ln(x^2 - 1)} \quad iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - e^{-x}}{x^2}$$

Προσδιορισμός παραμέτρων

7. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α , β και γ ώστε να ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha e^{2x} + \beta x + \gamma}{(x - 1)^2} = 2$$

8. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x^3} + \alpha + \frac{\beta}{x^2} \right) = 0$$

9. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β ώστε η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha x + \beta)e^x, & x < 1 \\ \frac{e \ln x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

Άλλες απροσδιόριστες μορφές

10. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\varepsilon\phi x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) \quad iii) \lim_{x \rightarrow 1^+} [\ln x \cdot \ln(\ln x)] \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} [\eta\mu x \cdot \ln(e^x - 1)]$$

11. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \cdot \ln x) \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \quad iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} [(e^x - 1) \ln x]$$

12. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x) \quad ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x^2) \quad iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - e^x) \quad iv) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2 - \ln x)$$

13. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\eta \mu x} \right) \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x \eta \mu x} - \frac{\sigma \nu \nu x}{\eta \mu^2 x} \right)$$

14. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \quad ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^{\ln x} \quad iii) \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)^x \quad iv) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \sigma \nu \nu x)^{\eta \mu x}$$

15. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta \mu 2x} = 0$$

a) Να βρείτε την τιμή $f(0)$

b) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

c) Αν $h(x) = e^{-x}f(x)$ να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ είναι παράλληλες

16. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(x) - f(x-h) - f(x+h)}{h^2} = e^x + x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

a) Να βρείτε την f''

b) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

17. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $f(0) = f'(0) = 2$ και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+3h) - 3f(x+h) + 2f(x)}{h^2} = 12e^{2x} - 3\eta \mu x \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f

18. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη

a) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+ah) - f'(x)}{h} = af''(x), \text{ όπου } a \in \mathbb{R}^*$$

b) Επιπλέον αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+4h) - 2f(x+2h) + f(x)}{h^2} = 24x - 8$$

Και η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$ έχει εξίσωση $y = 5x - 8$, τότε να βρείτε :

i) Τις τιμές $f'(1)$ και $f(1)$

ii) Τον τύπο της f

19. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ a, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Όπου $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $g(1) = g'(1) = 0$

και $g''(1) = 10$

a) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α

b) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$

c) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$$

20. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και ισχύει ότι: $g(x) \neq 0$ Για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θέτουμε:

$$A = \frac{f(a)}{g(a)} \text{ και } B = \frac{f'(a) - Ag'(a)}{g(a)}$$

Αν ϕ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{a\}$ τέτοια ώστε:

$$\frac{f(x)}{(x-a)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{x-a} + \frac{\phi(x)}{g(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{a\}$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(x)$$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

b) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

c) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(\chi^2 + 7)^{2\chi^2+2} < (2\chi^2 + 3)^{\chi^2+6}$$

2.13 Μελέτη συνάρτησης

Βήμα 1^ο

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

Βήμα 2^ο

Εξετάζουμε αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Βήμα 3^ο

Εξετάζουμε αν η f είναι άρτια, περιττή ή περιοδική

Βήμα 4^ο

Βρίσκουμε την f' , τις ρίζες της (αν υπάρχουν) και το πρόσημό της, ώστε να μελετήσουμε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

Βήμα 5^ο

Βρίσκουμε την f'' , τις ρίζες της (αν υπάρχουν) και το πρόσημό της ώστε να μελετήσουμε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής

Βήμα 6^ο

Βρίσκουμε τις οριακές τιμές της f , δηλαδή μελετάμε τη συμπεριφορά της f στα άκρα του πεδίου ορισμού της

Βήμα 7^ο

Βρίσκουμε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f

Βήμα 8^ο

Βρίσκουμε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες, αν υπάρχουν

Βήμα 9^ο

Τα συμπεράσματα όλων των προηγούμενων βημάτων τα συγκεντρώνουμε σε ένα πίνακα, ο οποίος ονομάζεται πίνακας μεταβολών της f

Βήμα 10^ο

Με τη βοήθεια του πίνακα μεταβολών της f κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της f

Παράδειγμα :

Να μελετήσετε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$$

Και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f

Λύση:

- **Πεδίο ορισμού** $A_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

- Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ως ρητή
- **Μελέτη μονοτονίας και ακρότατα**
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ με :

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \right)' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$$

Η μονοτονία και τα ακρότατα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	-		-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\nearrow$

T.M T.E

Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-1) = -4$ και τοπικό ελάχιστο το $f(3) = 4$

- **Μελέτη κυρτότητας και σημείων καμπής**

Για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι :

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \right)' = \dots = \frac{8}{(x - 1)^3}$$

Η κυρτότητα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Παρατηρούμε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής

- **Ασύμπτωτες**

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x^2 - 2x + 5) \cdot \frac{1}{x - 1} \right] = 4 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^2 - 2x + 5) \cdot \frac{1}{x - 1} \right] = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 5}{x - 1} = -1$$

Επομένως η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Ομοίως η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

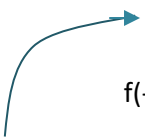
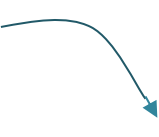
- Σημεία τομής με τους άξονες

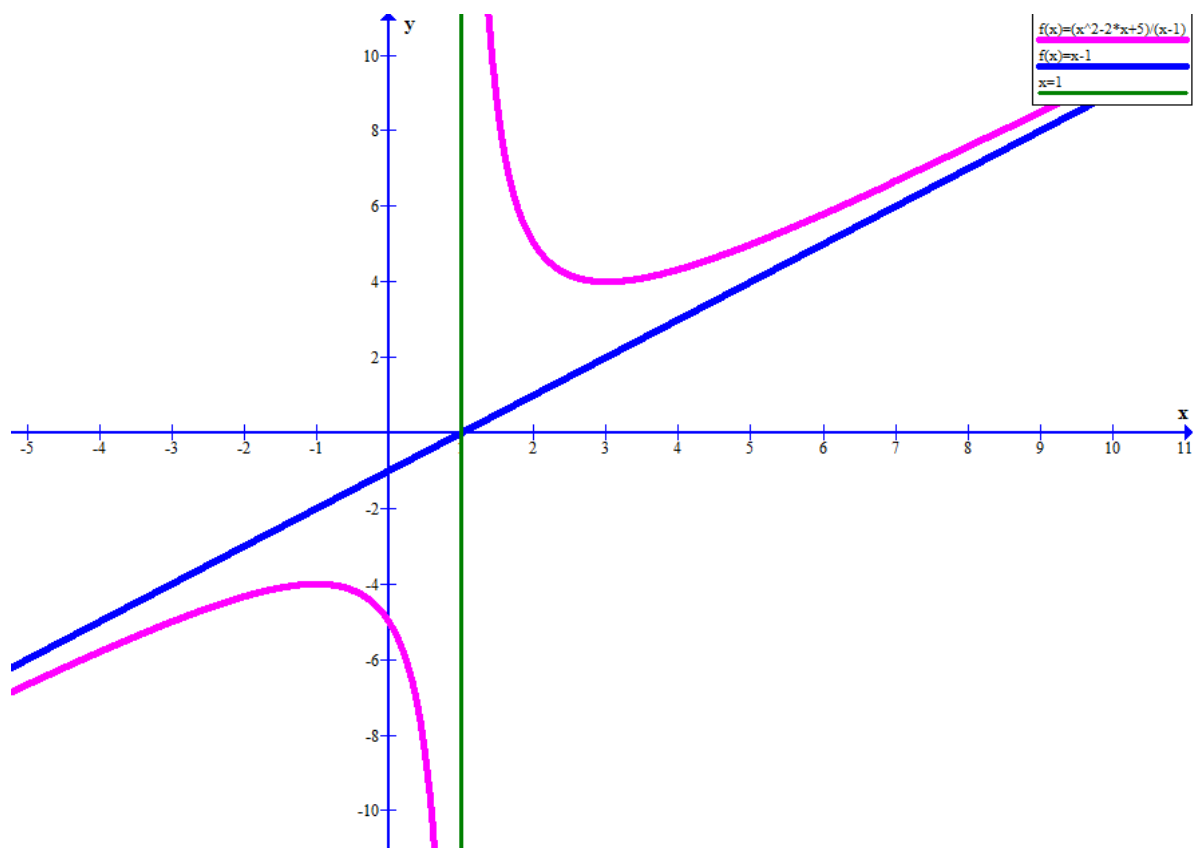
$$f(0) = \frac{0^2 - 2 \cdot 0 + 5}{0 - 1} = -5$$

Άρα η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -5)$

Επίσης : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$, $\Delta < 0$ άρα δεν τέμνει τον $x'x$

- Πίνακας μεταβολών

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	-	+
$f''(x)$	-		-	+	+
$f(x)$	 $f(-1) = -4$ T.M			 $f(3) = 4$ T.E	



Ασκήσεις στη μελέτη συνάρτησης

1. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις και να σχεδιάσετε τις γραφικές τους παραστάσεις:

i) $f(x) = x^3 - 3x^2$

ii) $f(x) = x^4 - 4x^3$

2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$$

Και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

Και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση

5. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

- a) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
- b) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής
- c) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
- d) Να σχεδιάσετε τις C_f
- e) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$\frac{x^3}{x^4 - 1} = \frac{\alpha}{x^2 + 1}$$

Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

2.14 Γενικές Ασκήσεις στις παραγώγους

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της f .

2) Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x}$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2$

3) Να δείξετε ότι: $2 \ln(x-1) \leq x-3 + \ln 4$ για κάθε $x > 1$

4) 1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $e^{x^2} \geq 1 - x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

5) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

1. Η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

2. $f(2) - f(1) < 3$

3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

6) 1. Να δείξετε ότι: $\ln x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

2. Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

7) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν: f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0) = 2$ και $f'(x) \cdot \sin x = f(x)(\eta \mu x + \sin x)$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε να βρείτε τον τύπο της.

- 8) 1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$
2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
 - Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.
 - Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h(x) = \varphi(x)$.

- 9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.
 - Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.
 - Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
 - Να αποδείξετε την ανισότητα: $(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3$ για κάθε $x \geq -4 + \sqrt{3}$.

- 10) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x + 1) - 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους α, β .

- 11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \ln x, x > 0$.

- Να δείξετε ότι $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.
- Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

- iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f .
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- 12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$.
- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1)$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$.
- 13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να αποδείξετε ότι: $f'(x + 1) > f(x + 1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.
- 14) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(3) = 12$.
- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.
- 15) 1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ . Να δείξετε ότι:
- $$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \Delta.$$
2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}, x > -1$.
- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Αν $a > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$ να δείξετε ότι: $\frac{2-\ln^2 \alpha}{\ln \alpha + 1} + \frac{2-\ln^2 \beta}{\ln \beta + 1} \geq 2 \cdot \frac{2-\ln^2(\sqrt{a \cdot \beta})}{\ln(\sqrt{a \cdot \beta}) + 1}$
- 16) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.
1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

17) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}$$

18) Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) < 0$ και $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Δίνονται επίσης οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 με $z_1 = f(1) + f(0) \cdot i$ και $z_2 = -3 + f(0) \cdot i$.

Αν $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2\xi$.

19) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

20) Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(1) = 2$ και $x \cdot f'(x) = -3 \cdot f(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 \cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

21) Δίνεται η συνάρτηση $f: [1,6] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1) = f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - x \ln x$, με $x \in (0, +\infty)$

i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$ με $x \in (0, +\infty)$

- i. Να μελετήσετε τη g ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της
- ii. Να λύσετε την ανίσωση :
$$\ln(x^2 + 3) \ln(2x^2 + 3) < \ln(2x^2 + 2) \ln(x^2 + 4)$$

2.15 Ερωτήσεις Σωστού - Λάθους

1) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .	Σ	Λ
2) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ'ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x	Σ	Λ
3) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό	Σ	Λ
4) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η παράγωγος της f δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ	Σ	Λ
5) $(\sin x)' = \eta \mu x, x \in \mathbb{R}$	Σ	Λ
6) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ ισχύει $(\varepsilon \varphi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	Σ	Λ
7) Έστω η συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός του είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .	Σ	Λ
8) Για τη συνάρτηση $F(x) = x\eta\mu(x-1)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0$	Σ	Λ
9) Τοπικό ακρότατο δεν μπορεί να παρουσιάζει η f σε άκρο αν αυτό ανήκει στο πεδίο ορισμού.	Σ	Λ
10) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0	Σ	Λ
11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$	Σ	Λ
12) Δεν υπάρχει γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$	Σ	Λ
13) Η συνάρτηση $f(x) = 1 + \sin 2x$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, \pi]$	Σ	Λ

14) Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε ένα διάστημα $[α,β]$ τότε θα ικανοποιεί και τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής	Σ	Λ
15) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α,β]$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο $(α,β)$, τότε δεν υπάρχει $ξ \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0$	Σ	Λ
16) Αν είναι $f'(x) = g'(x)$ για κάθε πραγματικό αριθμό x τότε είναι $f(x) = g(x)$	Σ	Λ
17) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 0$ τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$	Σ	Λ
18) Αν για τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = g'(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$	Σ	Λ
19) Αν η f είναι συνεχής στο $A = (α,β) \cup (γ,δ)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A	Σ	Λ
20) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0	Σ	Λ
21) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 τότε η f' είναι συνεχής στο x_0	Σ	Λ
22) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι κυρτή στο Δ .	Σ	Λ
23) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση	Σ	Λ
24) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0	Σ	Λ
25) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση fg είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$	Σ	Λ
26) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ	Σ	Λ
27) Ισχύει ο τύπος $(5^x)' = x \cdot 5^{x-1}$	Σ	Λ